Îndrumător matematic și tehnic

Traducere din limba rusă, adaptată





EDITURA TEHNICĂ
București — 1964

Îndrumătorul matematic şi tehnic cuprinde cinci părţi:

— *Matematica*: cunoştinţe generale, determinanţi, ecuaţii liniare, geometria analitică, calculul diferenţial, calculul integral, geometria diferenţială, serii infinite, calculul vectorial, ecuaţii diferenţiale, metode aproximative în analiză şi se încheie cu o secţiune cuprinzînd cele mai necesare tabele matematice.

— *Fizica*: mărimi fizice, prelucrarea rezultatelor experimentale, o secţiune specială cuprinzînd cele mai uzuale tabele fizico-chimice, privind proprietăţile generale ale corpurilor, acustica, fenomenele moleculare şi căldura, fenomenele magnetice şi electrice, optica structura atomului şi procesele nucleare.

— *Mecanica*: cinematica, statica, dinamica.

— *Rezistenţa materialelor*: calculul şi dimensionarea diferitelor corpuri supuse la solicitări: simple, elastice, compuse, dinamice şi prin şoc.

— *Teoria mecanismelor şi a maşinilor*: mecanisme, cuple cinematice, lanţuri cinematice, proprietăţile structurale ale mecanismelor plane, al mecanismelor spaţiale, solicitarea mecanismelor şi echilibrarea lor, probleme de proiectare.

— Lucrarea se încheie cu un capitol cuprinzînd *tabele de transformare a unităţilor* nemetrice în unităţi metrice.

Menţionăm că s-a făcut adaptarea la normele şi standardele noastre la toate capitolele unde aceasta s-a considerat necesară.

Lucrarea se adresează unui larg cerc de tehnicieni, ingineri cum şi studenţilor din primii ani ai Institutelor Tehnice Superioare.

Краткий физико-технический справочник

под общей редакцией К. П. ЯКОВЛЕВА

Том первый: Математика. Физика

Том второй: Общая механика, сопротивление материалов, теория механизмов и машин

Государственное издательство физико-математической литературы

Москва 1960

Pentru cititori

Această carte reprezintă o traducere din limba rusă, adaptată, după primele două volume ale lucrării apărute sub redacția generală a lui K. P. Iakovlev „Scurt îndreptar fizico-tehnic".

Cele cinci părți au fost elaborate după cum urmează: Matematica — G. E. Lunț și A. R. Iampolski, Fizica — K. P. Iakovlev, Mecanica generală — G. N. Sveșnikov, Rezistența materialelor — I. K. Snitko, Teoria mecanismelor și a mașinilor — V. A. Zinoviev.

Trebuie să menționăm că autorii au expus materialul foarte concentrat; acolo unde a fost posibil au dat chiar numai formule, fără text explicativ (în deosebi în partea „Matematica"), cum și numeroase tabele și grafice. Această concentrare nu dăunează, însă, rigurozității.

Mai este de remarcat că tabelele numerice care însoțesc textul sînt alcătuite după ultimele date din literatura universală de specialitate.

În ceea ce privește adaptarea, aceasta se referă mai cu seamă la părțile II—V, care au fost puse de acord cu normele prevăzute în standardele noastre privitoare la unități de măsură și notații.

Pentru apariția în cele mai bune condiții a acestei lucrări, am solicitat colaborarea prof. Gh. Buzdugan, membru corespondent al Acad. R.P.R., prof. Al. Davidescu, prof. N. Manolescu, prof. Edmond Nicolau și prof. R. Voinea, membru corespondent al Acad. R.P.R.

Sperăm că prin publicarea acestei lucrări vom veni în sprijinul tehnicienilor, inginerilor și studenților de la institutele tehnice, care vor găsi aici principalele formule și date numerice necesare în activitatea lor profesională.

Editura tehnică

Tabla de materii

1 *Matematica*

2 *Fizica*

3 *Mecanica*

A. Cinematica

B. Statica

C. Dinamica



4 *Rezistența materialelor*

5 *Teoria mecanismelor şi maşinilor*

Anexă

Matematica **1**

Notații

$\equiv$ — identic sau identic egal (se folosește în cazul cînd se subliniază în mod deosebit identitatea ambelor părți ale unei egalități).
$\approx$ — aproximativ egal.
$\ll$ — mult mai mic.
$\gg$ — mult mai mare.
$|a|$ — valoarea absolută a numărului a.
i — rădăcina pătrată din -1; $i = \sqrt{-1}$.
lg — logaritm cu baza 10 (logaritm obișnuit sau zecimal).
ln — logaritm cu baza $e = 2{,}71828...$ (logaritm natural).
$n!$ — factorial; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... n$.
sh — sinus hiperbolic.
ch — cosinus hiperbolic.
th — tangenta hiperbolică.
coth — cotangenta hiperbolică.
arg sh — argumentul sinusului hiperbolic.
arg ch — argumentul cosinusului hiperbolic.
arg th — argumentul tangentei hiperbolice.
arg coth — argumentul cotangentei hiperbolice.
const — constantă.
Δ — creștere.
d — diferențială; d^2, d^3, d^n — diferențiale de ordinul 2, 3, n.
$\frac{d}{dx}$ — derivata de ordinul întîi a unei funcții în raport cu variabila x.
$\frac{d^n}{dx^n}$ — derivata de ordinul n a unei funcții în raport cu variabila x, de exemplu: $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

$'$, $''$, $'''$, IV, V — notații pentru derivatele de ordin superior ale funcției de o variabilă, de exemplu $f'(x)$, y'', y''', $f^{IV}(x)$, y^{V}.

f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy} — $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ — derivate parțiale ale funcției f de mai multe variabile $x, y, z, \ldots$

$\sum$ — suma, de exemplu $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

$\prod$ — produs, de exemplu $\prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$.

$\Big|_a^b$ — semnul substituției duble, de exemplu $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

$\int_l$, $\int_C$ — integrala curbilinie, pe arcul l, pe conturul închis C.

$\int_S$, $\int_V$ — integrala extinsă la suprafața S, la volumul V.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, — notații pentru vectori.

$\vec{a}^0$ — vectorul unitate (versor) al direcției pe care este situat și vectorul $\vec{a}$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — versorii axelor de coordonate în sistemul ortogonal de coordonate.

$|\vec{a}|$ sau a — lungimea (valoarea absolută) a vectorului $\vec{a}$.

$\alpha\vec{a}$ — produsul unui scalar cu un vector.

$\vec{a}\vec{b}$ — produsul scalar a doi vectori.

$\vec{a}\times\vec{b}$ sau $[\vec{a}, \vec{b}]$ — produsul vectorial a doi vectori.

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ — produsul mixt a trei vectori.

a_x, a_y, a_z — proiecțiile vectorului $\vec{a}$ în sistemul cartezian xOy.

∇ — operatorul diferențial al lui Hamilton („nabla").

grad — gradientul cîmpului scalar (grad $\varphi = \nabla\varphi$).

div — divergența cîmpului vectorial (div $\vec{V} = \nabla\vec{V}$).

rot — rotorul cîmpului vectorial (rot $\vec{V} = \nabla\times\vec{V}$).

$\frac{\partial U}{\partial \vec{e}}$ — derivata cîmpului scalar în raport cu direcția $\vec{e}$.

$\Delta(=\nabla^2)$ — operatorul lui Laplace $\left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$.

1.1
Cîteva cunoştinţe de matematică elementară

§ 1.1. Algebra

Progresii. 1. *Progresia aritmetică*

$$a_1;\ a_1 + r;\ a_1 + 2r;\ a_1 + 3r;\ \ldots$$

a_1 este primul termen al progresiei; r este raţia progresiei; pentru $r > 0$, progresia este crescătoare, pentru $r < 0$, progresia este descrescătoare.

Expresia generală a termenului de ordinul n

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Suma primilor n termeni

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)r].$$

2. *Progresia geometrică*

$$a_1;\ a_1q;\ a_1q^2;\ a_1q^3;\ \ldots$$

a_1 este primul termen al progresiei, q este raţia; pentru $q > 1$, progresia este crescătoare; pentru $q < 1$, progresia este descrescătoare.

Expresia generală a termenului de ordinul n este

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Suma primilor n termeni

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Dacă numărul de termeni ai progresiei geometrice descrescătoare creşte nelimitat, atunci $q^n \to 0$ şi $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$ (suma progresiei geometrice infinite descrescătoare).

Citeva sume finite de numere

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $p + (p+1) + (p+2) + \ldots + (p+n-2) + (p+n-1) = \frac{n(2p+n-1)}{2}$;

3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$;

4) $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n-2) + 2n = n(n+1)$;

5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$;

7) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

8) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

Logaritmi. Trecerea de la un sistem de logaritmi la altul se face cu ajutorul formulei

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

În particular, la trecerea de la logaritmii zecimali la logaritmii naturali şi de la logaritmii naturali la logaritmii zecimali, adică pentru $a = 10$, $c = e \approx 2{,}71828$, $\lg b = M \ln b$; $\ln b = \frac{1}{M} \lg b$, unde $M = \lg e \approx 0{,}43429$ şi $\frac{1}{M} \approx 2{,}30259$.

Analiza combinatorie. 1. Aranjamente 2. Permutări şi 3. Combinări.

1. *Aranjamente* (de n elemente luate cîte m). Numărul tuturor aranjamentelor de n elemente luate cîte m (notaţia: A_n^m) este dat de formula

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

De exemplu, numărul aranjamentelor de trei elemente a, b şi c cîte două (ab, ac, bc, ba, ca, cb) este $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

2. *Permutări* (de n elemente). Numărul tuturor permutărilor de n elemente (notaţia: P_n) este dat de formula

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n = n! = A_n^n.$$

De exemplu, numărul tuturor permutărilor de trei elemente a, b şi c (abc, bca, cab, acb, bac, cba) este $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Dacă printre cele n elemente $a, b, c, \ldots$ unele se repetă (de exemplu, a se repetă de α ori, b de β ori, c de γ ori etc.), numărul de permutări se calculează după formula

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots},$$

unde $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$.

3. *Combinări* (de n elemente luate cîte m). Numărul tuturor combinărilor de n elemente luate cîte m [notaţia C_n^m sau $\binom{n}{m}$] se determină cu formula

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

De exemplu, numărul de combinări de trei elemente luate cîte două (ab, ac, bc) este $C_3^2 \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$. În particular: $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Proprietatea fundamentală a combinărilor este

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Binomul lui Newton. Se numeşte binomul lui Newton formula care prezintă expresia $(a + b)^n$ în formă de polinom, pentru n întreg şi pozitiv.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k}b^k + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

sau

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots$$

$$\ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

La determinarea valorilor numerice ale coeficienţilor termenilor consecutivi din partea dreaptă a acestei formule putem folosi ***triunghiul lui Pascal*****:**

n	coeficienţii binomiali
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

....

Gradul binomului este dat în prima coloană; valorile coeficienţilor sînt date în rîndurile orizontale. Fiecare dintre coeficienţi se obţine în urma adunării celor doi coeficienţi de la dreapta şi de la stînga din rîndul precedent. În afară de aceasta, trebuie avut în vedere că, coeficienţii care se află la distanţă egală de începutul şi de sfîrşitul fiecărui rînd sînt egali între ei.

Numere complexe. *Forma algebrică*: $a + bi$; a este partea reală a numărului complex, b este partea imaginară.

Forma trigonometrică: $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$; r este *modulul* sau *mărimea absolută* a numărului complex $(r \geqslant 0)$; φ este argumentul.

Între mărimile a, b, r şi φ din aceste expresii există relaţiile

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Două numere complexe $a_1 + b_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ şi $a_2 + b_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ se numesc *conjugate*, dacă $a_2 = a_1$, $b_2 = -b_1$ (adică $r_2 = r_1$, $\varphi_2 = -\varphi_1$).

Adunarea şi scăderea numerelor complexe

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i,$$

adică la adunarea (sau scăderea) numerelor complexe se adună (sau se scad) separat părţile lor reale şi separat părţile imaginare.

Suma a două numere complexe conjugate este un număr real

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

Înmulţirea numerelor complexe

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

sau sub formă trigonometrică

$$[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)][r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

adică modulul produsului este egal cu produsul modulelor factorilor iar argumentul, cu suma argumentelor factorilor.

Produsul a două numere complexe conjugate este un număr real, determinat de formula

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Împărţirea numerelor complexe

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

sau

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

adică modulul cîtului este egal cu cîtul modulelor deîmpărțitului şi împărţitorului, iar argumentul cu diferenţa argumentelor lor.

Ridicarea la putere a unui număr complex

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

(formula lui Moivre), adică modulul se ridică la puterea n, iar argumentul se înmulțește cu n. În particular,

$$i^{4m} = 1;\quad i^{4m+1} = i;\quad i^{4m+2} = -1;\quad i^{4m+3} = -i\ (m - \text{întreg}).$$

Extragerea rădăcinii dintr-un număr complex

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

unde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$.

Exemplu.

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1(\cos\pi + i\sin\pi)} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}.$$

Admițînd $k = 0, 1, 2$, se obțin trei valori

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad -1;\quad \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Expresii algebrice raţionale. Orice expresie algebrică raţională întreagă $P(x)$ poate fi pusă sub formă de polinom

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

ordonat după puterile descrescătoare (sau crescătoare) ale lui x, unde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt coeficienţii polinomului.

În multe cazuri se poate efectua uşor descompunerea polinomului în factori, cu ajutorul unor transformări identice, de exemplu

$$x^2 + ax + bx + ab = (x^2 + ax) + (bx + ab) =$$
$$= x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b).$$

Orice expresie raţională fracţionară poate fi transformată într-un raport de două polinoame care nu au factori comuni (fracţie ireductibilă)

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}.$$

Raportul a două polinoame se numeşte *fracţie raţională regulată*, dacă gradul numărătorului este mai mic decît gradul numitorului ($m < n$), și neregulată dacă gradul numărătorului este mai mare sau egal cu gradul numitorului ($m \geqslant n$). Orice fracţie raţională

neregulată poate fi transformată, prin împărţirea numărătorului la numitor, într-o sumă a unui polinom cu o fracţie regulată, de exemplu

$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 13x + 4}{x^2 + 2x + 3} = 2x + 1 + \frac{5x + 1}{x^2 + 2x + 3}.$$

Restul împărţirii polinomului $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ la $x - \alpha$ este egal cu valoarea polinomului pentru $x = \alpha$,

adică $P(x) = (x - \alpha)P_1(x) + P(\alpha)$, unde $P_1(x)$ este un polinom de gradul $n - 1$.

În cazul cînd $P(\alpha) = 0$ (adică α este o rădăcină a polinomului), împărţirea se face fără rest

$$P(x) = (x - \alpha)P_1(x).$$

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sînt rădăcinile polinomului dat, polinomul poate fi reprezentat sub forma unui produs de factori liniari (adică de gradul întîi) în raport cu x

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n).$$

Dacă în descompunerea polinomului factorul $x - \alpha$ se întîlneşte de k ori, α se numeşte *rădăcină multiplă de ordinul k a polinomului*. În cazul cînd coeficienţii polinomului $a_0, a_1, \dots, a_n$ sînt reali, fiecare pereche de factori care corespunde la două rădăcini complexe conjugate poate fi înlocuită prin trinomul de gradul al doilea $x^2 + px + q$, unde p şi q sînt numere reale. De aceea, în cazul general*) avem (pentru coeficienţi reali ai polinomului)

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \dots$$

unde $k_1, k_2, \dots$ sînt indicii de multiplicitate ai rădăcinilor reale; $s_1, s_2, \dots$ sînt indicii de multiplicitate ai perechilor de rădăcini complexe conjugate ($k_1 + k_2 + \dots + 2s_1 + 2s_2 + \dots = n$), iar numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, p_1, q_1, p_2, q_2, \dots$ sînt reale.

Orice fracţie regulată ireductibilă**) cu coeficienţi reali

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}{x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}$$

poate fi descompusă în mod univoc într-o sumă de fracţii elementare (simple) de forma

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k} \text{ sau } \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^s}$$

*) Dacă $a + bi$ este o rădăcină multiplă de ordinul k a unui polinom cu coeficienţi reali, $a - bi$ este şi ea o rădăcină a acestui polinom şi de acelaşi ordin de multiplicitate.

** Coeficientul termenului de gradul cel mai mare al numitorului poate fi făcut totdeauna egal cu 1, împărţind cu el numărătorul şi numitorul fracţiei.

$\left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$, unde k şi s sînt numere pozitive întregi, iar α, p şi q, numere reale; avem

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}...(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}...} =$$

$$= \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-\alpha_2} +$$

$$+ \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + ... + \frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + ... + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+ \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + ...$$

Mărimile $A_1, A_2, ..., A_{k_1}, B_1, B_2, ..., B_{k_2}, C_1, C_2, ..., C_{s_1}$ etc. pot fi calculate prin *metoda coeficienţilor nedeterminaţi*. În acest scop se adună toate fracţiile simple, luînd ca numitor comun numitorul fracţiei iniţiale; numărătorul sumei obţinute se scrie în ordinea puterilor descrescătoare ale lui x şi se egalează coeficienţii puterilor egale ale lui x de la acest numărător cu cei ai numărătorului fracţiei iniţiale (din cauza identităţii acestor numărători).

Exemplu. Să se descompună fracţia $\frac{x-3}{x^3-x}$ în fracţii simple. Deoarece $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, rezultă că

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

şi

$$x - 3 \equiv (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A.$$

Egalînd coeficienţii, se obţine

$$A+B+C=0, \quad B-C=1, \quad -A=-3,$$

de unde $A = 3$, $B = -1$, $C = -2$, şi prin urmare,

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}.$$

Expresii iraţionale. Orice *expresie iraţională* poate fi adusă la o formă simplă (aşa-numita formă *normală)* prin diferite transformări algebrice, ca: reducerea indicelui, scoaterea de sub semnul rădăcinii şi raţionalizarea numitorului.

Raţionalizarea numitorului unei fracţii

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}; \quad \frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{b-c}.$$

Transformarea expresiei $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+m}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-m}{2}},$$

unde $m = \sqrt{A^2 - B}$.

Ecuaţii. Orice ecuaţie algebrică cu o necunoscută poate fi adusă prin transformări algebrice la aşa-numita *formă canonică*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

n se numeşte *gradul ecuaţiei*.

Ecuaţia de gradul întîi *(liniară)* $ax + b = 0$ are rădăcina $x = -\frac{b}{a}$.

Ecuaţiile de gradul al doilea *(pătrate)* au rădăcinile determinate de următoarele formule:

Ecuaţia redusă, $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ecuaţia sub forma generală, $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ecuaţia cu coeficientul mediu par, $ax^2 + 2mx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}.$$

Ecuaţia incompletă de forma $ax^2 + bx = 0$:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Ecuaţia incompletă de forma $ax^2 + c = 0$:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Studiul rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea poate fi făcut cu ajutorul expresiei $4ac - b^2$ $\left(\text{sau } q - \frac{p^2}{4} \text{ pentru ecuaţia redusă}\right)$, care se notează cu Δ, şi se numeşte *discriminantul ecuaţiei*. Dacă $\Delta < 0$, rădăcinile sînt reale şi diferite; dacă $\Delta = 0$, rădăcinile sînt reale şi egale între ele; dacă $\Delta > 0$, rădăcinile sînt imaginare.

Dacă x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, trinomul $ax^2 + bx + c$ poate fi transformat după formula

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Orice trinom de gradul al doilea cu coeficienţi *reali* poate fi pus sub forma $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \alpha^2\right]$ $(\Delta < 0)$ sau $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \alpha^2\right]$ $(\Delta > 0)$, unde α este un număr real egal cu $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ cînd $\Delta < 0$ şi egal cu $\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ cînd $\Delta > 0$.

Rădăcinile ecuaţiei de gradul al treilea *(cubice)*, sub forma redusă $x^3 + px + q = 0$, se află cu formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

În acest caz:

a) dacă $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, atunci:

$$x_1 = A + B;$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(A+B) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B);$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(A+B) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B),$$

unde A şi B sînt valorile reale ale rădăcinilor cubice din formulă;

b) dacă $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, atunci

$$A = B, \quad x_1 = 2A, \quad x_2 = x_3 = -A;$$

c) dacă $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ (aşa-numitul „caz ireductibil") sub forma reală rădăcinile sînt date de formulele:

$$x_1 = 2r\cos\frac{\varphi}{3};$$

$$x_2 = 2r\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} = r\left(-\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

$$x_3 = 2r\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} = r\left(-\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

unde $r = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ şi $\cos\varphi = -\frac{q}{2r^3}$.

Ecuaţia de gradul al treilea cu forma generală $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ poate fi adusă la forma redusă $y^3 + py + q = 0$, împărţind-o prin a şi făcînd substituţia $x = y - \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a}$.

Ecuaţiile reciproce de gradul al treilea $ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0$ pot fi aduse la forma $(x \pm 1)\,[ax^2 + (b \mp a)x + a] = 0$ şi rezolvarea lor se reduce la rezolvarea unor ecuaţii de gradul întîi şi al doilea.

Rădăcinile *ecuaţiei de gradul al patrulea* $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ coincid cu rădăcinile a două ecuaţii de gradul al doilea:

$$x^2 + (b + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0,$$

unde $A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}$, iar y este o rădăcină reală oarecare a ecuaţiei cubice

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0.$$

Rădăcinile *ecuaţiei bipătrate* $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se determină cu formula

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Ecuaţia reciprocă de gradul al patrulea $ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$, prin împărţirea cu x^2 şi substituţia $x + \frac{1}{x} = y$, se reduce la ecuaţia $ay^2 \pm by + (c - 2a) = 0$, de unde

$$y_{1,2} = \frac{\mp b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 8a^2}}{2a},$$

după care

$$x_{1,2,3,4} = \frac{y_{1,2} \pm \sqrt{y_{1,2}^2 - 4}}{2}.$$

Dacă ecuaţia este de forma $ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \mp bx + a = 0$, se face substituţia $x - \frac{1}{x} = y$.

Rădăcinile ecuaţiei binome $x^n - a = 0$ se determină cu formula $x = \sqrt[n]{a}$ (se iau toate valorile rădăcinii, v. p. 25).

Ecuaţia trinomă de forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, prin substituţia $x^n = y$, se reduce la ecuaţia de gradul al doilea $ay^2 + by + c = 0$.

Ecuaţia de gradul n, în cazul general cînd $n > 4$, nu poate fi rezolvată sub formă de radicali.

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuaţiei $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, atunci

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n);$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n;$$

$$a_3 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_n + x_2x_3x_4 + + x_2x_3x_5 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n);$$

. . . .

$$a_n = (-1)^n x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1}x_n.$$

Inegalităţii. A rezolva inegalitatea $F(x) > f(x)$ sau $F(x) < f(x)$, unde $F(x)$ şi $f(x)$ sînt expresii care conţin necunoscuta x, înseamnă a determina pentru care valori ale lui x are loc inegalitatea.

Două inegalităţi se numesc *echivalente* dacă sînt valabile pentru aceleaşi valori ale necunoscutei x.

Adăugarea sau scăderea din ambele părţi ale inegalităţii a aceleiaşi mărimi şi, prin urmare, trecerea oricărei mărimi dintr-o parte a inegalităţii în cealaltă, cu schimbarea semnului ei, duce la o inegalitate echivalentă cu cea iniţială.

La înmulţirea sau la împărţirea ambelor părţi ale unei inegalităţi cu un număr pozitiv se obţine o inegalitate echivalentă cu cea iniţială; la înmulţirea şi la împărţirea ambelor părţi ale unei inegalităţi cu un număr negativ, pentru a obţine o inegalitate echivalentă trebuie schimbat semnul inegalităţii ($>$ cu $<$ sau $<$ cu $>$).

Inegalităţile de gradul întîi se rezolvă cu ajutorul transformărilor menţionate.

Inegalităţile de gradul al doilea (pătrate) pot fi aduse la una din formele:

1) $x^2 + px + q > 0$.

Dacă rădăcinile x_1 şi x_2 ale polinomului $x^2 + px + q$ sînt imaginare ($p^2 - 4q < 0$), inegalitatea este valabilă pentru toate valorile lui x ($-\infty < x < \infty$).

Dacă rădăcinile x_1 şi x_2 sînt reale şi $x_1 = x_2$ ($p^2 - 4q = 0$), inegalitatea este valabilă pentru toate valorile lui x, în afară de $x = x_1 = x_2$.

Dacă rădăcinile x_1 şi x_2 sînt reale şi diferite ($p^2 - 4q > 0$), iar $x_1 < x_2$, inegalitatea are loc pentru $x < x_1$ şi $x > x_2$.

2) $x^2 + px + q < 0$.

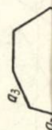
Dacă rădăcinile x_1 şi x_2 sînt imaginare ($p^2 - 4q < 0$), inegalitatea este contrazisă.

Dacă $x_1 = x_2$ ($p^2 - 4q = 0$), inegalitatea este de asemenea contrazisă.

Dacă x_1 şi x_2 sînt reale şi diferite ($p^2 - 4q > 0$) şi $x_1 < x_2$, inegalitatea are loc pentru $x_1 < x < x_2$.

Exemplul 1. $x^2 - 5x + 6 > 0$; rădăcinile trinomului sînt $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (reale) şi, prin urmare, $x < 2$ sau $x > 3$.

Exemplul 2. $x^2 - x + 2 < 0$; $p^2 - 4q = -7 < 0$ (rădăcini imaginare), inegalitatea este contrazisă.

Romb		D_1, D_2 — diagonalele γ — unghiul rombului a — latura	$S = a^2 \sin\gamma = \frac{1}{2} D_1 D_2$
Poligon		n — numărul laturilor	$S = \pm \frac{1}{2} [(x_2y_1 - x_1y_2) + (x_3y_2 - x_2y_3) + \ldots +$

§ 1.2. Geometria

Figuri plane (S aria figurii, P — perimetrul, p — semiperimetrul)

	Notaţii	Formule
Triunghi *)	$a, b, c,$ — laturile A, B, C — unghiurile opuse lor h — înălţimea (din vîrful unghiului A) R — raza cercului circumscris r — raza cercului înscris m_1, m_2, m_3 — medianele $\mu = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)$ — semisuma medianelor x_1 şi y_1, x_2 şi y_2, x_3 şi y_3 — coordonatele vîrfurilor triunghiului în sistemul cartezian ortogonal	$S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} ab \sin C =$ $= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \sin C}{\sin A} =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$ $= 2R^2 \sin A \sin B \sin C =$ $= r^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} =$ $= rp = \frac{abc}{4R} =$ $= \frac{4}{3}\sqrt{\mu(\mu-m_1)(\mu-m_2)(\mu-m_3)} =$ $= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$
	patrulaterului	
Trapez	a, b — bazele c, d — laturile neparalele D_1, D_2 — diagonalele φ — unghiul dintre diagonale m — linia mijlocie h — înălţimea	$m = \frac{1}{2}(a + b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \frac{a+b}{2} h = mh =$ $= \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \varphi$

matematic şi tehnic

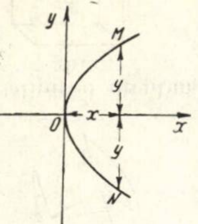
(continuare)

	Notaţii	Formule

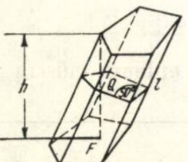
Inel circular	r — raza interioară R — raza exterioară d — diametrul interior D — diametrul exterior $\rho = \frac{r+R}{2}$ — raza medie $\delta = R - r$ — lărgimea inelului φ — unghiul la centru al unei porțiuni de inel (în grade)	$S=\pi(R^2-r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2-d^2)=2\pi\rho\delta.$ Aria unei părți de inel $S = \frac{\pi\varphi}{360}(R^2-r^2)=\frac{\pi\varphi}{90} D^2 - d^2) =$ $= \frac{\pi\varphi}{180}\rho\delta$
Segment circular	r — raza φ — unghiul la centru (în grade) $l = \frac{\pi\varphi}{180} r$ — lungimea arcului a — lungimea coardei h — înălțimea segmentului	$P = l + a$ $S = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi\varphi}{180} - \sin\varphi\right) =$ $= \frac{r(l-a)+ah}{2}$ Aria unui segment, al cărui arc este mai mic decît un semicerc, $S \approx \frac{2}{3} ah + \frac{h^3}{2a}.$ Aria unui segment, al cărui arc este mai mic decît 50°, $S \approx \frac{2}{3} ah.$
Sector circular	r — raza; φ — unghiul la centru (în grade) $l = \frac{\pi\varphi}{180} r$ — lungimea arcului	$P = l + 2r$ $S = \frac{1}{2} lr = \frac{\pi r^2\varphi}{360} \approx 0{,}00873\, r^2\varphi.$

(*continuare*)

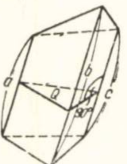
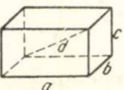
	Notații	Formule
Elipsa	a și b — semiaxa mare și semiaxa mică a elipsei $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — excentricitatea x, y — distanțele punctului M al elipsei pînă la axele Oy și Ox	$P = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right] = 4aE\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right).$ unde E este integrala eliptică de speța a doua (p.) $P \approx \pi\left(3\,\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right).$ $S = \pi ab.$ Aria segmentului MAN: $S = ab \arccos\frac{x}{a} - xy.$ Aria sectorului $OMAN$: $S = ab \arccos\frac{x}{a}.$
Hiperbola	a și b — semiaxa reală și semiaxa imaginară a hiperbolei x, y — distanțele punctului M al hiperbolei pînă la axele Oy și Ox	Aria segmentului hiperbolic AMN $S = xy - ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$ Aria sectorului hiperbolic $OMAN$ $S = ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = - ab \ln\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$

Parabola 	x și $2y$ — înălțimea și baza segmentului parabolic OMN	Aria segmentului parabolic OMN $$S = \frac{4}{3}xy$$

Poliedre (V — volumul corpului, S_σ și S — aria laterală și aria totală; dacă pentru S sau S_σ nu sînt date formulele, aceste arii pot fi calculate ca sume ale ariilor figurilor plane care mărginesc poliedrul)

	Notații	Formule
Prisma 	F — aria bazei h — înălțimea l — muchia laterală Q și P — aria și perimetrul secțiunii perpendiculare pe muchie	$V = Fh = Ql$ $S_\sigma = Pl$ $S = Pl + 2F$

(continuare)

	Notaţii	Formule
Prisma dreaptă	F şi P — aria şi perimetrul bazei l — muchia	$V = Fl$ $S_\sigma = Pl$ $S = Pl + 2F$
Prisma secţionată neparalel cu baza	l — lungimea segmentului OO_1, care uneşte centrele de greutate ale bazelor Q — aria secţiunii perpendiculare pe segmentul OO_1	$V = Ql$
Prismă triunghiulară, secţionată neparalel cu baza 	a, b, c — muchii paralele Q — aria secţiunii perpendiculare pe muchii	$V = \frac{1}{3}(a + b + c)\,Q$
Paralelipiped dreptunghic 	a, b, c — muchii d — diagonala $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$	$V = abc$ $S = 2(ab + bc + ac)$

Piramidă, piramidă dreaptă	F — aria bazei h — înălţimea P — perimetrul bazei α — apotema	$V = \frac{1}{3} Fh$ $S_\sigma = \frac{1}{2} P\alpha$ (pentru o piramidă regulată)
Piramidă triunghiulară (tetraedru)	a, b, c, p, q, r, — muchii x_1, y_1, z_1 x_2, y_2, z_2 x_3, y_3, z_3 — coordonatele celor trei vîrfuri ale piramidei într-un sistem de coordonate cartezian; vîrful al patrulea este aşezat în originea axelor de coordonate	$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
Trunchi de priamidă (planul secţiunii este paralel cu baza)	F, f — ariile bazelor h — înălţimea (distanţa dintre baze) A, a — două laturi corespunzătoare ale bazelor	$V = \frac{1}{3} h(F + f + \sqrt{Ff}) =$ $= \frac{1}{3} hF \left[1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right]$

(continuare)

	Notații	Formule
Trunchi de piramidă regulată	F, f — ariile bazelor h — înălțimea P, p — perimetrele bazelor α — apotema	$V = \frac{1}{3} h(F + f + \sqrt{Ff})$ $S_\sigma = \frac{P + p}{2} \alpha$

Corpurile circulare și cîteva alte corpuri
(V — volumul corpului, S_σ și S — aria laterală și aria totală)

	Notații	Formule
Cilindrul	F și P — aria și perimetrul bazei h — înălțimea l — generatoarea Q și s — aria și perimetrul secțiunii perpendiculare pe generatoare	$V = Fh = Ql$ $S_\sigma = sl = Ph$ $S = sl + 2F = Ph + 2F$

Cilindrul drept	F și P — aria și perimetrul bazei l — generatoarea	$V = Fl$ $S_\sigma = Pl$ $S = Pl + 2F$
Cilindru circular drept	R — raza bazei h — înălțimea	$V = \pi R^2 h$ $S_\sigma = 2\pi R h$ $S = 2\pi R (h + R)$
Cilindru secționat neparalel cu baza	h_1 și h_2 — generatoarea minimă și generatoarea maximă l — lungimea segmentului care unește centrele de greutate ale bazelor O și O' Q și L — aria și perimetrul secțiunii perpendiculare pe segmentul OO'	$V = Ql$ $S_\sigma = \frac{1}{2} L(h_1 + h_2)$

(continuare)

	Notaţii	Formule
Cilindru circular drept secţionat neparalel cu baza	R — raza bazei h_1 şi h_2 — generatoarea minimă şi generatoarea maximă	$V = \frac{1}{2}\pi R^2 (h_1 + h_2)$ $S_\sigma = \pi R (h_1 + h_2)$ $S = \pi R \left[h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2} \right]$
Cilindru gol (tub cilindric)	R — raza exterioară r — raza interioară $\rho = \frac{R + r}{2}$ — raza medie h — înălţimea $\delta = R - r$ — grosimea	$V = \pi h (R^2 - r^2) = \pi h\delta (2R - \delta) = \pi h\delta (2r + \delta) = 2\pi h\delta\rho$ $S_\sigma = 2\pi h (R + r) = 4\pi h\rho$ $S = 2\pi (R + r)(h + R - r) = 4\pi\rho (h + \delta)$
Con	F — aria bazei h — înălţimea	$V = \frac{1}{3} F h$

Con circular drept	R – raza bazei h – înălţimea $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ – generatoarea	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $S_\sigma = \pi R\sqrt{R^2 + h^2} = \pi Rl$ $S = \pi R(R + l)$
Trunchi de con circular drept	R şi r – razele bazelor h – înălţimea l – generatoarea $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ H – înălţimea conului nesecţionat $H = h + \frac{hr}{R - r}$	$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$ $S_\sigma = \pi l(R + r)$ $S = \pi[R^2 + r^2 + l(R + r)]$
Con eliptic (drept)	a, b – semiaxele bazei h – înălţimea	$V = \frac{\pi hab}{3}$
Trunchi de con eliptic	Bazele paralele – elipse cu semiaxele a, b şi a_1, b_1 h – înălţimea	$V = \frac{\pi h}{6}[2(ab + a_1 b_1) + ab_1 + a_1 b]$

(continuare)

	Notații	Formule
Sferă goală	R — raza exterioară r — raza interioară D — diametrul exterior d — diametrul interior	$V = \frac{3}{4}\pi(R^3 - r^3) =$ $= \frac{1}{6}\pi(D^3 - d^3)$ $S = 4\pi(R^2 + r^2) = \pi(D^2 + d^2)$
Calotă sferică	h — înălțimea calotei R — raza sferei a — raza bazei calotei $a = \sqrt{h(2R - h)}$	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ $S_\sigma = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$ $S = \pi(2a^2 + h^2) = \pi(a^2 + 2Rh)$
Zonă sferică	h — înălțimea zonei a și b — razele bazelor ($a > b$) R — raza sferei	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2) =$ $+ V_1 + \frac{1}{6}\pi hl^2,$ unde V_1 este volumul trunchiului de con înscris în zona sferică, bazele acestuia avînd razele a și b, înălțimea h și generatoarea l $S_\sigma = 2\pi Rh$, $S = \pi(a^2 + b^2 + 2Rh)$

Sector sferic	h — înălţimea calotei a — raza bazei calotei R — raza sferei	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ $S = \pi R(a + 2h)$
Tor (inel cilindric)	r — raza secţiunii transversale R — distanţa dintre centrul secţiunii transversale şi axa de rotaţie $D = 2R$ $d = 2r$	$V = 2\pi^2 Rr^2 = \frac{1}{4}\pi^2 Dd^2$ $S = 4\pi^2 Rr = \pi^2 Dd$
Elipsoid	a, b, c — semiaxele	$V = \frac{4}{3}\pi abc$

(continuare)

	Notaţii	Formule
Elipsoid de rotaţie	$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \ (a > b)$ 1) Axa de rotaţie $2a$ $(c = b)$ 2) Axa de rotaţie $2b$ $(c = a)$	1) $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$ $S = 2\pi ab \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}\right)$ 2) $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ $S = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \ln \frac{a(1 + \varepsilon)}{b}$.
Segment de paraboloid eliptic	a, b — semiaxele elipsei (bazei) h — înălţimea	$V = \frac{1}{2}\pi abh$
Segment de paraboloid de rotaţie	r — raza bazei h — înălţimea	$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$
Trunchi de paraboloid de rotaţie	R şi r — razele bazelor paralele h — înălţimea	$V = \frac{1}{2}\pi h (R^2 + r^2)$

§ 1.3. Funcţii trigonometrice circulare şi funcţii hiperbolice

Cîteva formule trigonometrice

Formule de transformare:

$\beta =$	$-\alpha$	$90° \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$	$270° + \alpha$	$360° - \alpha$
$\sin\beta =$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta =$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta =$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{cotg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{cotg}\,\beta =$	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$
$\sec\beta =$	$\sec\alpha$	$\mp\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+\sec\alpha$
$\mathrm{cosec}\,\beta =$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+\sec.\,\alpha$	$\mp\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$

Funcţiile trigonometrice ale sumei şi ale diferenţei unghiurilor, unghiurilor multiple şi jumătăţilor de unghiuri:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}; \quad \mathrm{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{cotg}\,\alpha\cdot\mathrm{cotg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{cotg}\,\beta \pm \mathrm{cotg}\,\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\mathrm{cotg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha}; \quad \mathrm{cotg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{cotg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{cotg}\,\alpha} =$$

$$= \frac{\mathrm{cogt}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha}{2}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha}; \quad \mathrm{cotg}\,3\alpha = \frac{\mathrm{cotg}^3\alpha - 3\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{3\,\mathrm{cotg}^2\alpha - 1}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}\ ^{*)}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}\ ^{*)}$$

---

*) Semnul + sau semnul — se ia în funcţie de cadranul în care se află unghiul $\frac{\alpha}{2}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\,^{*)} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\,^{*)} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Produsele şi puterile funcţiilor trigonometrice:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}; \quad \cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}.$$

Sumele şi diferenţele funcţiilor trigonometrice

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad \operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

---

*) V. nota de la p. precedentă.

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = 2\sin 45° \sin(\alpha \pm 45°)$$

$$\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}; \quad \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cotg}2\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45° + \alpha)$$

$$\frac{\operatorname{cotg}\alpha + 1}{\operatorname{cotg}\alpha - 1} = \operatorname{cotg}(45° - \alpha)$$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha).$$

Graficele funcţiilor trigonometrice $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ sînt date respectiv în figurile 1.1–1.6.

Funcţii trigonometrice inverse

Dacă $x = \sin y$, $y = \operatorname{Arcsin} x$ (arc sinus)
Dacă $x = \cos y$, $y = \operatorname{Arccos} x$ (arc cosinus)
Dacă $x = \operatorname{tg} y$, $y = \operatorname{Arctg} x$ (arc tangentă)
Dacă $x = \operatorname{cotg} y$, $y = \operatorname{Arccotg} x$ (arc cotangentă)
Dacă $x = \sec y$, $y = \operatorname{Arcsec} x$ (arc secantă)
Dacă $x = \operatorname{cosec} y$, $y = \operatorname{Arccosec} x$ (arc cosecantă)

(y se măsoară în radiani).

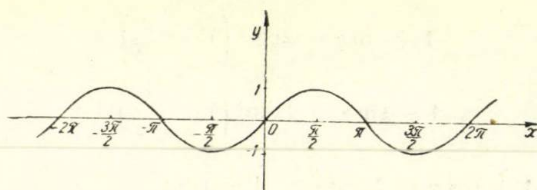


Fig. 1.1.

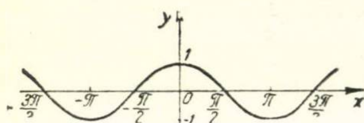


Fig. 1.2.

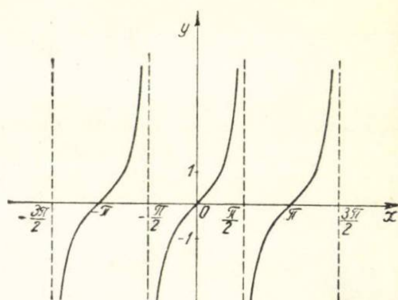


Fig. 1.3.

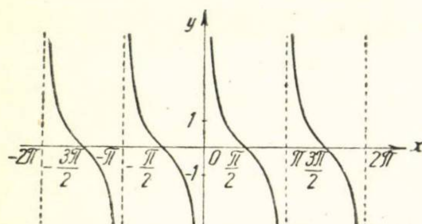


Fig. 1.4.

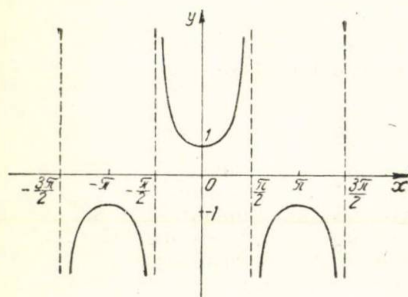


Fig. 1.5.

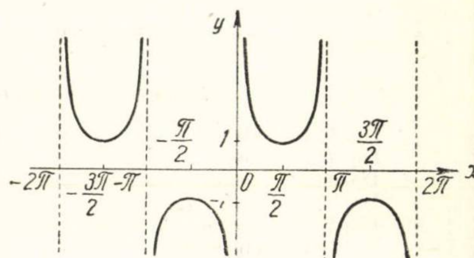


Fig. 1.6.

Funcţiile trigonometrice inverse sînt multiforme determinările lor principale se notează cu arcsin x, arccos x etc. şi sînt cuprinse între limitele:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \operatorname{arccotg} x < \pi.$$

Relaţiile trigonometrice fundamentale aplicate funcţiilor trigonometrice inverse ne duc la egalităţile:

$$\sin(\arcsin x) = x; \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2};$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad \sin(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}; \quad \cos(\arccos x) = x;$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad \cos(\operatorname{arccotg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{cotg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x};$$

$$\operatorname{cotg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad \operatorname{cotg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x.$$

Din relaţiile dintre funcţiile trigonometrice ale unghiurilor suplimentare rezultă

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Graficele funcţiilor trigonometrice inverse Arcsin x, Arccos x, Arctg x, Arccotg x sînt date respectiv în fig. 1.7—1.10. Determinărilor principale le corespund liniile pline.

Relaţii între laturile şi unghiurile triunghiului

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (\textit{teorema sinusurilor})$$

(R — raza cercului circumscris)

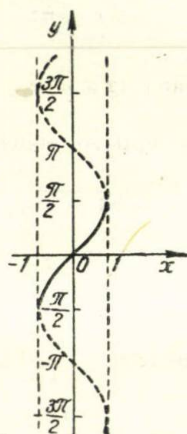


Fig. 1.7.

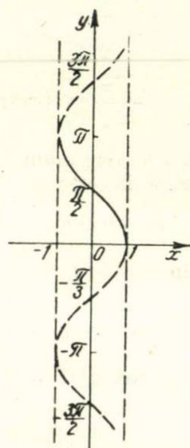


Fig. 1.8.

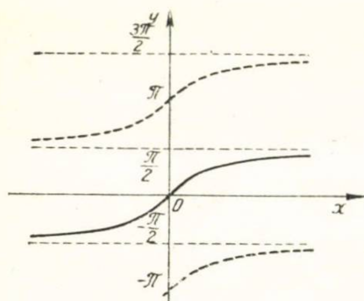


Fig. 1.9.

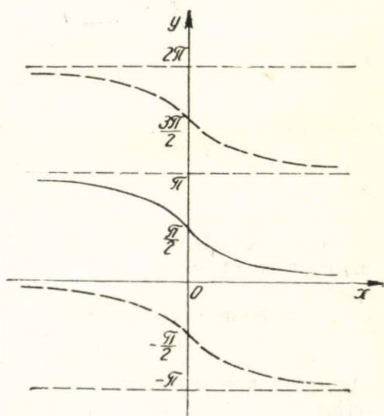


Fig. 1.10.

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A \quad \textit{(teorema cosinusurilor)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} \quad \textit{(teorema tangentelor)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \\ \frac{a-b}{c} &= \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \end{aligned}\right\} \textit{(formulele lui Molweide).}$$

Calculul lungimilor unor segmente legate de un triunghi

Înălțimea din vîrful A: $h_a = b \sin C = c \sin B$.

Mediana din vîrful A: $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$.

Bisectoarea unghiului A: $\beta_a = \dfrac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$.

Raza cercului circumscris:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}.$$

Raza cercului înscris:

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} =$$

$$= p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Rezolvarea triunghiurilor ascuţitunghice

Notaţii: A, B, C — unghiurile opuse laturilor a, b, c (fig. 1.11);

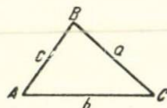


Fig. 1.11.

Date	Formule pentru determinarea celorlalte elemente
O latură şi două unghiuri (a, A, B)	$C = 180° - A - B$; $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$
Două laturi şi unghiul dintre ele (a, b, C)	Prima metodă: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$ $\sin B = \frac{b \sin C}{c}$; $A = 180° - B - C$. A doua metodă: unghiurile A şi B se află din sistemul de două ecuaţii $\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \\ \frac{A + B}{2} = 90° - \frac{C}{2} \end{array}\right\}$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$
Două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele (a, b, A)	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$. Dacă $a \geqslant b$, $B < 90°$, există o singură soluţie. Dacă $b \sin A > a$, rezolvarea nu este posibilă. Dacă $b \sin A = a$, există o singură soluţie $B = 90°$ Dacă $b \sin A < a$, există două soluţii: B_1 şi B_2, iar $B_2 = 180° - B_1$; $C = 180° - A - B$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

Rezolvarea triunghiurilor ascuţitunghice

Notaţii: A, B, C — unghiurile opuse laturilor a, b, c (fig. 1.11);

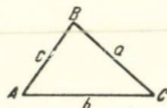


Fig. 1.11.

Date	Formule pentru determinarea celorlalte elemente
O latură şi două unghiuri (a, A, B)	$C = 180° - A - B$; $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$; $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$
Două laturi şi unghiul dintre ele (a, b, C)	Prima metodă: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$ $\sin B = \dfrac{b \sin C}{c}$; $A = 180° - B - C$. A doua metodă: unghiurile A şi B se află din sistemul de două ecuaţii $\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} \dfrac{A - B}{2} = \dfrac{a - b}{a + b} \operatorname{cotg} \dfrac{C}{2} \\ \dfrac{A + B}{2} = 90° - \dfrac{C}{2} \end{array}\right\}$ $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$
Două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele (a, b, A)	$\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$. Dacă $a \geqslant b$, $B < 90°$, există o singură soluţie. Dacă $b \sin A > a$, rezolvarea nu este posibilă. Dacă $b \sin A = a$, există o singură soluţie $B = 90°$ Dacă $b \sin A < a$, există două soluţii: B_1 şi B_2, iar $B_2 = 180° - B_1$; $C = 180° - A - B$; $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$.

(continuare)

Date	Formule pentru determinarea celorlalte elemente
Trei laturi (a, b, c)	Prima metodă: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$; $C = 180° - A - B$. A doua metodă: $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ $C = 180° - A - B$.

Funcţii hiperbolice şi funcţii hiperbolice inverse

Funcţiile hiperbolice se definesc cu ajutorul funcţiilor exponenţiale prin formulele:

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \quad \textit{(sinus hiperbolic)}$$

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \quad \textit{(cosinus hiperbolic)}$$

$$\operatorname{th} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \quad \textit{(tangentă hiperbolică)}$$

$$\operatorname{coth} \varphi = \frac{1}{\operatorname{th} \varphi} = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}} \quad \textit{(cotangentă hiperbolică)}$$

$$\operatorname{sech} \varphi = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} = \frac{2}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \quad \textit{(secantă hiperbolică)}$$

$$\operatorname{cosech} \varphi = \frac{1}{\operatorname{sh} \varphi} = \frac{2}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}} \quad \textit{(cosecantă hiperbolică)}.$$

Pentru valori reale ale argumentului φ au loc inegalităţile:

$$\operatorname{ch} \varphi \geqslant 1; \quad -1 < \operatorname{th} \varphi < +1; \quad |\operatorname{coth} \varphi| > 1,$$

iar $\operatorname{sh} \varphi$ poate avea orice valori pozitive sau negative.

Pentru funcţiile hiperbolice există următoarele relaţii:

1. Funcţii de argument negativ

$$\operatorname{sh}(-\varphi) = -\operatorname{sh} \varphi; \quad \operatorname{ch}(-\varphi) = \operatorname{ch} \varphi; \quad \operatorname{th}(-\varphi) = -\operatorname{th} \varphi;$$

$$\operatorname{coth}(-\varphi) = -\operatorname{coth} \varphi.$$

2. Funcţii de un argument

$$\mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi = 1;$$

$$1 - \mathrm{th}^2\varphi = \mathrm{sech}^2\varphi; \quad \mathrm{coth}^2\varphi - 1 = \mathrm{cosech}^2\varphi;$$

$$\frac{\mathrm{sh}\,\varphi}{\mathrm{ch}\,\varphi} = \mathrm{th}\,\varphi; \quad \frac{\mathrm{ch}\,\varphi}{\mathrm{sh}\,\varphi} = \mathrm{coth}\,\varphi; \quad \mathrm{th}\varphi\cdot\mathrm{coth}\,\varphi = 1.$$

3. Funcţii de suma şi de diferenţa a două argumente, de argumente duble şi jumătăţi de argumente

$$\mathrm{sh}\,(\varphi \pm \psi) = \mathrm{sh}\,\varphi\,\mathrm{ch}\,\psi \pm \mathrm{ch}\,\varphi\,\mathrm{sh}\,\psi;$$

$$\mathrm{ch}\,(\varphi \pm \psi) = \mathrm{ch}\,\varphi\,\mathrm{ch}\,\psi \pm \mathrm{sh}\,\varphi\,\mathrm{sh}\,\psi;$$

$$\mathrm{th}\,(\varphi \pm \psi) = \frac{\mathrm{th}\,\varphi \pm \mathrm{th}\,\psi}{1 \pm \mathrm{th}\,\varphi\,\mathrm{th}\,\psi}; \quad \mathrm{coth}\,(\varphi \pm \psi) = \frac{1 \pm \mathrm{coth}\,\varphi\,\mathrm{coth}\,\psi}{\mathrm{coth}\,\varphi \pm \mathrm{coth}\,\psi};$$

$$\mathrm{sh}\,2\varphi = 2\mathrm{sh}\,\varphi\,\mathrm{ch}\,\varphi; \quad \mathrm{ch}\,2\varphi = \mathrm{ch}^2\,1\varphi + \mathrm{sh}^2\,\varphi = 2\mathrm{sh}^2\,\varphi + 1 = 2\mathrm{ch}^2\,\varphi - 1;$$

$$\mathrm{th}\,2\varphi = \frac{2\,\mathrm{th}\,\varphi}{1 + \mathrm{th}^2\varphi}; \quad \mathrm{coth}\,2\varphi = \frac{1 + \mathrm{coth}^2\varphi}{2\,\mathrm{coth}\,\varphi};$$

$$\mathrm{sh}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\varphi - 1}{2}}\,{}^{*)}; \quad \mathrm{ch}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\varphi + 1}{2}};$$

$$\mathrm{th}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\varphi - 1}{\mathrm{ch}\,\varphi + 1}}\,{}^{*)}; \quad \mathrm{coth}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\varphi + 1}{\mathrm{ch}\,\varphi - 1}}\,{}^{*)}$$

4. Sumele şi diferenţele funcţiilor hiperbolice

$$\mathrm{sh}\,\varphi \pm \mathrm{sh}\,\psi = 2\mathrm{sh}\frac{\varphi \pm \psi}{2}\,\mathrm{ch}\frac{\varphi \mp \psi}{2};$$

$$\mathrm{ch}\,\varphi - \mathrm{ch}\,\psi = 2\mathrm{sh}\frac{\varphi + \psi}{2}\,\mathrm{sh}\frac{\varphi - \psi}{2};$$

$$\mathrm{ch}\,\varphi + \mathrm{ch}\,\psi = 2\mathrm{ch}\frac{\varphi + \psi}{2}\,\mathrm{ch}\frac{\varphi - \psi}{2}; \quad \mathrm{th}\,\varphi \pm \mathrm{th}\,\psi = \frac{\mathrm{sh}\,(\varphi \pm \psi)}{\mathrm{ch}\,\varphi\,\mathrm{ch}\,\psi}.$$

Graficele funcţiilor hiperbolice $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{th}\,x$, $\mathrm{coth}\,x$, se găsesc respectiv în fig. 1.12—1.15.

Funcţii hiperbolice inverse

Dacă $x = \mathrm{sh}\,y$, atunci $y = \arg\mathrm{sh}\,x$ *(argument sinus hiperbolic)*
Dacă $x = \mathrm{ch}\,y$, atunci $y = \arg\mathrm{ch}\,x$ *(argument cosinus hiperbolic)*
Dacă $x = \mathrm{th}\,y$, atunci $y = \arg\mathrm{th}\,x$ *(argument tangentă hiperbolică)*
Dacă $x = \mathrm{coth}\,y$, atunci $y = \arg\mathrm{coth}\,x$ *(argument cotangentă hiperbolică)*.

---

*) Semnul + se ia pentru $\varphi > 0$, semnul − pentru $\varphi < 0$.

Funcţiile hiperbolice inverse se exprimă prin logaritmi cu ajutorul formulelor

$$\arg \operatorname{sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}); \quad \arg \operatorname{ch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) \quad (x \geqslant 1);$$

$$\arg \operatorname{th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1); \quad \arg \operatorname{coth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1).$$

Graficele funcţiilor hiperbolice inverse arg sh x, argch x, arg th x, arg coth x sînt date respectiv în figurile 1.16–1.19.

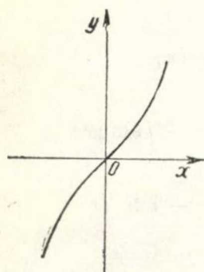


Fig. 1.12.

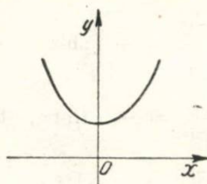


Fig. 1.13.

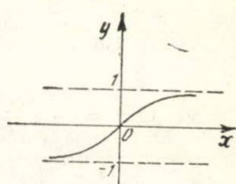


Fig. 1.14.

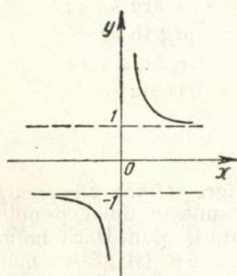


Fig. 1.15.

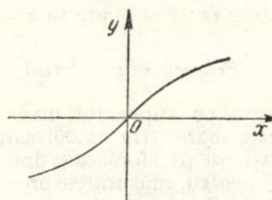


Fig. 1.16.

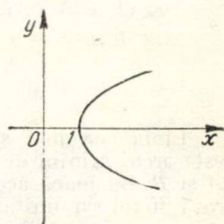


Fig. 1.17.

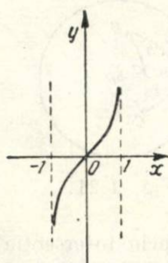


Fig. 1.18.

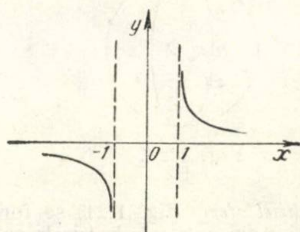


Fig. 1.19.

Relaţii între funcţiile trigonometrice circulare şi funcţiile hiperbolice

Din formulele lui Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

unde $i = \sqrt{-1}$, rezultă următoarele relaţii:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{ch} ix; \quad \operatorname{ch} x = \cos ix;$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = - i \operatorname{sh} ix; \quad \operatorname{sh} x = - i \sin ix;$$

$$\operatorname{tg} x = - i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = - i \operatorname{th} ix; \quad \operatorname{th} x = - i \operatorname{th} ix;$$

$$\operatorname{cotg} x = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = i \operatorname{cotg} ix; \quad \operatorname{coth} x = i \operatorname{cotg} ix;$$

$\operatorname{Arccos} x = - i \operatorname{arg\,ch} x$; $\operatorname{Arcsin} x = - i \operatorname{arg\,sh} ix$;
$\operatorname{Arctg} x = - i \operatorname{arg\,th} ix$; $\operatorname{Arccotg} x = i \operatorname{arg\,th} ix$;
$\operatorname{arg\,ch} x = i \operatorname{Arccos} x$; $\operatorname{arg\,sh} x = - i \operatorname{Arcsin} ix$;
$\operatorname{arg\,th} x = - i \operatorname{Arctg} ix$; $\operatorname{arg\,th} x = i \operatorname{Arccotg} ix$.

Trigonometria sferică

Linia cea mai scurtă pe suprafaţa unei sfere *(linia geodezică)* este arcul minim de cerc mare (fig. 1.20) care uneşte două puncte A şi B. Ea joacă acelaşi rol pe sferă ca şi dreapta în plan. Dacă luăm raza sferei ca unitate pentru măsurarea arcului AB (şi găsim măs $AB = a$), iar unghiul AOB îl măsurăm în radiani (şi găsim măs $\sphericalangle AOB = \alpha$) avem $\alpha = a$.

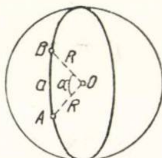


Fig. 1.20.

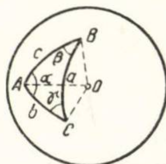


Fig. 1.21.

Triunghiul sferic (fig. 1.21) se formează prin intersecţia arcelor a trei cercuri mari pe sferă. Laturile sale a, b, c, se măsoară cu ajutorul unghiurilor plane ale unghiului triedru $OABC$.

Un triunghi sferic poate fi rezolvat în raport cu trei din cele şase elemente ale sale (trei laturi a, b, c şi trei unghiuri α, β, γ), deoarece unghiurile sale nu sînt legate printr-o relaţie ca unghiurile unui triunghi plan. Suma unghiurilor unui triunghi sferic este totdeauna mai mare decît π; de aceea se introduce noţiunea de *exces sferic* al triunghiului, care este diferenţa $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$.

Pentru rezolvarea triunghiurilor sferice dreptunghice cu unghiul drept $\alpha = \frac{\pi}{2}$ şi ipotenuza a (fig. 1.22), se folosesc următoarele formule

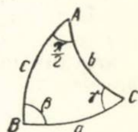


Fig. 1.22.

$$\cos a = \cos b \cos c = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma$$

$$\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}; \qquad \cos \beta = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}$$

$$\cos c = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}; \qquad \cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a}; \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin c}{\sin a}; \qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

Pentru rezolvarea triunghiurilor sferice cu unghiuri ascuţite, se folosesc formulele:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \quad (\textit{teorema sinusurilor})$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha; \\ \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \end{array}\right\} (\textit{teorema cosinusurilor})$$

$$\sin a \cos b = \cos a \sin b \cos \gamma + \sin c \cos \beta;$$

$$\sin a \operatorname{cotg} b = \operatorname{cotg} b \sin \gamma + \cos a \cos \gamma;$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \cos b \sin \gamma - \cos c \sin \beta \cos \alpha;$$

$$\sin \alpha \operatorname{cotg} \beta = \sin c \operatorname{cotg} b - \cos c \cos \alpha;$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$\text{unde } \sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}.$$

Aria triunghiului sferic este $S=\varepsilon R^2$, unde ε este excesul sferic, iar R este raza sferei.

Aria fusului (biunghiului) sferic format de două arce ale unui cerc mare este $S=2\varphi R^2$, unde unghiul φ dintre arce se măsoară în radiani.

1.2
Determinanţi şi sisteme de ecuaţii liniare

§ 1.4. Determinanţi

Definiţii. *Determinantul de ordinul n*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

conţine n^2 elemente distribuite în n linii şi în n coloane.

Minorul (subdeterminantul) unui element al determinantului de ordinul n se numeşte determinantul de ordinul $n-1$ ce se obţine din determinantul dat, prin tăierea liniei şi a coloanei cărora le aparţine elementul considerat.

Complementul algebric al unui element al determinantului de ordinul n se numeşte minorul său înmulţit cu $(-1)^{i+j}$, unde i este numărul liniei, iar j este numărul coloanei elementului considerat.

Determinantul este egal cu suma produselor elementelor unei linii sau unei coloane prin complemenţii algebrici respectivi *(descompunerea determinantului în minori)*: astfel, de exemplu, dacă $A_{11}, A_{21}, \dots A_{n1}$ sînt complemenţii algebrici ai elementelor primei coloane, atunci

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\dots+a_{n1}A_{n1}.$$

Pentru calculul unui determinant de ordinul al doilea $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ trebuie să scădem din produsul elementelor a_1 şi b_2, aşezate pe *diagonala*

principală, produsul elementelor a_2 şi b_1, aşezate *pe a doua diagonală*, adică

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Pentru calculul unui determinant de ordinul al treilea pe baza celor spuse mai înainte avem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) =$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1.$$

Determinantul de ordinul al treilea mai poate fi calculat folosind *regula lui Sarrus*: se scriu sub determinant primele două linii şi se formează suma algebrică a produselor elementelor (luate cîte trei) aşezate pe diagonalele determinantului şi pe paralelele lor; produsele de pe diagonala principală şi de pe paralelele sale se iau cu semnul + iar celelalte cu semnul —.

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{matrix} = 18 - 1 + 0 - 8 - 0 + 6 = 15.$$

În locul liniilor se pot lua în mod analog coloanele.

Determinanţii de ordin superior se calculează prin dezvoltarea lor succesivă după minori.

Proprietăţile fundamentale ale determinanţilor*). 1. Determinantul nu-şi schimbă valoarea dacă înlocuim toate liniile prin coloanele respective (proprietatea echivalenţei liniilor şi a coloanelor):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

---

*) Aceste proprietăţi sînt valabile pentru un determinant de orice ordin; ele sînt ilustrate în exemplul unui determinant de ordinul al treilea.

2. Dacă toate elementele unei linii (sau ale unei coloane) sînt nule, determinantul este nul

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

3. La permutarea a două linii (sau a două coloane) determinantul își schimbă semnul:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Dacă un determinant are două linii identice (sau două coloane identice), el este nul

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Factorul comun al tuturor elementelor unei linii (sau unei coloane) poate fi scos de sub semnul determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Determinantul, în care elementele unei linii (sau unei coloane) sînt proporționale cu elementele respective ale altei linii (sau ale altei coloane), este nul

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Dacă la elementele unei linii (sau unei coloane) se adaugă elementele altei linii (sau altei coloane), înmulțite cu același număr, valoarea determinantului nu se schimbă:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 & c_1 + \lambda c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

În particular, dacă elementele unei linii oarecare (sau unei coloane) sînt o combinaţie liniară a elementelor respective ale celorlalte linii (sau celorlalte coloane), determinantul este nul

$$\begin{vmatrix} \lambda a_2 + \mu a_3 & \lambda b_2 + \mu b_3 & \lambda c_2 + \mu c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Dacă doi determinanţi diferă între ei numai prin elementele unei singure linii (sau coloane), suma lor este determinantul în care elementele liniei (sau coloanei) respective sînt sumele elementelor determinanţilor-termeni, iar celelalte elemente sînt aceleaşi ca şi în determinanţii-termeni:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 + b_1' & c_1 + c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

9. Suma produselor elementelor unei linii (sau unei coloane) prin complemenţii algebrici ai elementelor respective ale altei linii (sau altei coloane) este nulă, de exemplu: $b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0$ (A_1, A_2 şi A_3 sînt complemenţii algebrici ai elementelor a_1, a_2 şi a_3).

§ 1.5. Sisteme de ecuaţii liniare

Sistemele de două şi de trei ecuaţii liniare. 1. Soluţia unui sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ cu condiţia ca $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, este:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

unde

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

În cazul cînd $\Delta = 0$, aceste formule devin lipsite de sens.

Dacă o dată cu egalitatea $\Delta = 0$ este satisfăcută cel puţin una din condiţiile $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, sistemul este incompatibil (nu are soluţii). Dacă, însă, o dată cu $\Delta = 0$ avem $\Delta_x = \Delta_y = 0$, sistemul este nedeterminat (există o infinitate de soluţii). În acest caz,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

adică una dintre ecuaţii este o consecinţă a celeilalte şi poate fi îndepărtată. Orice pereche de valori ale lui x şi y, care satisfac ecuaţia rămasă, reprezintă o soluţie a sistemului.

2. Sistemul de două ecuaţii omogene liniare cu două necunoscute $a_1x + b_1y = 0$, $a_2x + b_2y = 0$ sau este nedeterminat (pentru $\Delta = 0$ sau are o singură soluţie (nulă: $x = y = 0$ pentru $\Delta \neq 0$). Cazul incompatibilităţii pentru un sistem omogen se exclude. Dacă un sistem de două ecuaţii omogene este nedeterminat, în afară de soluţia nulă el are o infinitate de soluţii cuprinse în formula $x : y = -b_1 : a_1 = -b_2 : a_2$.

3. Sistemul de trei ecuaţii liniare cu trei necunoscute:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2,\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

dacă

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

se rezolvă prin formulele

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ \text{unde}\ \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ \text{unde}\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta},\ \text{unde}\ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

În cazul $\Delta = 0$, formulele de mai sus sînt lipsite de sens. Dacă pentru $\Delta = 0$, printre determinanţii Δ_x, Δ_y, Δ_z există cel puţin unul diferit de zero, sistemul este incompatibil; dacă, însă, $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, sistemul este fie incompatibil, fie nedeterminat (v. mai sus). În acest din urmă caz cel puţin una dintre ecuaţiile sistemului este o consecinţă a celorlalte două şi poate fi lăsată la o parte. Orice ansamblu de trei valori x, y şi z, care satisface celelalte două (sau una) ecuaţii, este o soluţie a sistemului.

Exemplu.

$$x + 2y - z = 2;\ 5x - 4y + z = 0;\ 2x + y - 3z = -5.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 32$$ ($\Delta \neq 0$, sistemul este compatibil şi are o singură soluţie)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{32} = 1;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}}{32} = 2;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{32} = 3.$$

4. Sistemul de două ecuaţii liniare, omogene, cu trei necunoscute $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ are o infinitate de soluţii, care se determină prin formulele

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t; \quad y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} t; \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t,$$

unde t este o valoare arbitrară (se presupune că nu toţi determinanţii, care intervin în formule sînt nuli; în caz contrar, una dintre ecuaţii este o consecinţă a celeilalte şi poate fi lăsată la o parte).

Exemplu. Rezolvînd sistemul de ecuaţii

$$x + y - z = 0, \ 3x - 3y + z = 0,$$

se obţine

$$x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} t = -2t; \ y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} t = -4t; \ z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} t = -6t,$$

unde t este arbitrar.

Punînd $t = -1/2$, se obţine soluţia: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; cînd $t = 1$, se obţine o altă soluţie: $x = -2$, $y = -4$, $z = -6$ etc.

5. Sistemul de trei ecuaţii liniare şi omogene cu trei necunoscute

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0, \ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \ a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

sau are o soluţie unică (nulă pentru $\Delta \neq 0$), sau este nedeterminat (pentru $\Delta = 0$). În acest din urmă caz, una sau două ecuaţii pot fi lăsate la o parte, fiind consecinţe ale celorlalte. Dacă se lasă la o parte o singură ecuaţie ($\Delta = 0$, însă cel puţin unul dintre minorii săi nu este nul), problema se reduce la rezolvarea sistemului de două ecuaţii omogene independente cu trei necunoscute (v. mai sus). Dacă, însă, două ecuaţii sînt consecinţa celei de a treia ($\Delta = 0$ şi toţi minorii sînt şi ei nuli), orice ansamblu de trei valori, care satisfac această ultimă ecuaţie reprezintă o soluţie a sistemului.

Matricea şi rangul ei. Un tablou dreptunghiular de mn elemente aşezate în m linii şi în n coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

se numeşte *matrice.*

Minorul matricei de ordinul k se numeşte determinantul compus din k^2 elemente, format cu k linii şi k coloane ale acestei matrice (ordinea elementelor se păstrează). Dacă la matricea dată cel puţin un minor de ordinul p este diferit de zero, iar toţi minorii de ordin mai mare decît p sînt nuli, numărul p se numeşte *rangul matricei.*

Sisteme de n ecuaţii liniare. Sistemul de n ecuaţii liniare cu n necunoscute

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}
$$

în cazul cînd determinantul sistemului este diferit de zero

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,
$$

are o soluţie unică:

$$
x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},
$$

în care determinantul Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ se obţine prin înlocuirea în determinantul Δ a coloanei k prin coloana formată din termenii liberi $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Dacă $\Delta = 0$, însă cel puţin unul dintre determinanţii Δ_k este diferit de zero, sistemul este incompatibil. Dacă $\Delta = 0$ şi $\Delta_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, atunci în cazul cînd rangul $r (r < n)$ al matricei acestui sistem

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

este mai mic decît rangul matricei lărgite

$$
B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix},
$$

obţinute prin asocierea la matricea A a unei coloane formate din termenii liberi, sistemul este incompatibil (nu are soluţii). Dacă, însă, $\Delta = 0$ şi $\Delta_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, iar rangul matricei A este egal cu rangul matricei B, sistemul este nedeterminat (are o infinitate de soluţii). În acest din urmă caz se permută ecuaţiile în sistem şi se renumerotează necunoscutele, astfel încît minorul de ordinul r al matricei A, diferit de zero, să fie aşezat în unghiul superior din stînga

matricei. După aceasta, se rezolvă sistemul format din primele r ecuaţii în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Astfel, aceste r necunoscute se exprimă prin celelalte $n-r$ şi anume: $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Acestea din urmă pot lua orice valori. Ecuaţiile rămase pot fi lăsate la o parte (ele sînt consecinţa primelor r).

Exemplu.

$$\begin{aligned} -x + y + 2z + u &= 4 \\ 2x - 2y + z + u &= 2 \\ x - y + 3z + 2u &= 6 \\ 3x - 3y + 4z + 3u &= 8. \end{aligned}$$

Rangul matricelor A şi B este egal cu 2 (sistemul este nedeterminat). Determinantul de ordinul al doilea din unghiul superior din stînga matricei $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$; de aceea schimbăm ordinea necunoscutelor

$$\begin{aligned} -x + 2z + y + u &= 4 \\ 2x + z - 2y + u &= 2 \\ x + 3z - y + 2u &= 6 \\ 3x + 4z - 3y + 3u &= 8. \end{aligned}$$

Acum determinantul stîng superior $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ este diferit de zero. Rezolvăm sistemul compus din primele două ecuaţii în raport cu x şi z (lăsăm la o parte ultimele două ecuaţii, întrucît ele rezultă din primele două):

$$\begin{aligned} -x + 2z &= 4 - y - u \\ 2x + z &= 2 + 2y - u \end{aligned}$$

Se obţine $x = \dfrac{5y - u}{5}$, $z = \dfrac{10 - 3u}{5}$. Aceasta este soluţia sistemului dat. Valorile lui y şi u sînt aici arbitrare.

În cazul general, sistemul de m ecuaţii cu n necunoscute ($m > n$)

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

este determinat, adică are o singură soluţie, atunci şi numai atunci cînd rangul matricei sale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

coincide cu rangul matricei lărgite B şi este egal cu numărul de necunoscute n. În acest caz, trebuie să se transcrie sistemul astfel, încît

minorul diferit de zero de ordinul n al matricei A să ocupe unghiul stîng superior şi să se rezolve sistemul primelor n ecuaţii, lăsînd la o parte celelalte (ele sînt consecinţa primelor n).

Dacă rangul matricei A este mai mic decît rangul matricei B, sistemul este incompatibil.

Dacă rangul r al matricei A este egal cu rangul matricei B, însă $r < n$, sistemul este nedeterminat; după permutările respective în ordinea ecuaţiilor şi a necunoscutelor, primele r ecuaţii se rezolvă în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_r$, exprimînd aceste necunoscute prin valorile arbitrare rămase: $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.

În cazul sistemului de ecuaţii omogene

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= 0 \end{aligned}$$

rangul matricei A este totdeauna egal cu rangul matricei B. Un astfel de sistem are în toate cazurile soluţia nulă $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$, care este unică, dacă sistemul este determinat, adică atunci cînd rangul r al matricei A este egal cu n. Dacă, însă, $r < n$, sistemul este nedeterminat şi prin metoda de mai sus putem exprima necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_r$ prin celelalte necunoscute, care rămîn arbitrare.

1.3
Geometria analitică

§ 1.6. Geometria analitică plană

Sistemele principale de coordonate. Pentru determinarea poziţiei unui punct în plan, se folosesc de cele mai multe ori două sisteme de coordonate: 1) sistemul cartezian ortogonal şi 2) sistemul polar.

1. Coordonatele unui punct oarecare M (fig. 1.23) în *sistemul de coordonate cartezian* sînt: *abscisa* x şi *ordonata* y, care se iau cu semne determinate. Distribuţia obişnuită a semnelor în cele patru cadrane este reprezentată în fig. 1.24.

Transformarea sistemului de coordonate cartezian poate consta din:

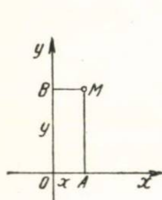


Fig. 1.23.

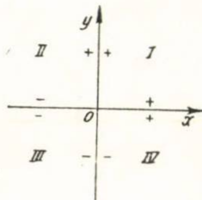


Fig. 1.24.

a) *translația paralelă a axelor* de coordonate (fig. 1.25, *a*), în care coordonatele inițiale x și y ale punctului M sînt legate de noile sale coordonate x' și y' prin relațiile

$$x = x' + a; \qquad y = y' + b,$$

unde a și b sînt coordonatele noii origini de coordonate O' în sistemul inițial, și

b) *rotația axelor* de coordonate cu un anumit unghi în jurul originii O (fig. 1.25, *b*); în acest caz, avem

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \; y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

unde α este unghiul de rotație a axelor.

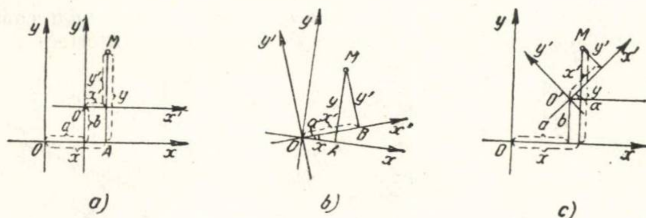


Fig. 1.25.

În cazul general al transformărilor de coordonate (fig. 1.25, *c*) avem relațiile:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a; \; y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b.$$

2. Coordonatele unui punct oarecare M (fig. 1.26) în *sistemul de coordonate polar* sînt *raza vectoare* (distanța de la punctul M pînă la un anumit punct O — polul sistemului de coordonate) și *unghiul polar* φ (unghiul dintre raza vectoare OM și o anumită axă Ox — axa polară). Unghiul φ se consideră pozitiv dacă, începînd de la axa polară, se socotește în direcția opusă mișcării acelor de ceasornic; în caz contrar φ se consideră negativ.

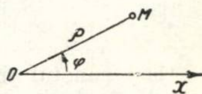


Fig. 1.26.

Dacă polul sistemului de coordonate polar coincide cu originea sistemului de coordonate cartezian (fig. 1.27) și axa polară coincide cu partea pozitivă a axei absciselor, între coordonatele carteziene x, y ale punctului M și coordonatele sale polare ρ, φ există relațiile:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \; \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

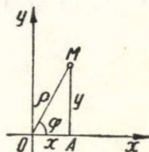


Fig. 1.27.

Cîteva probleme simple. a) *Distanța dintre două puncte* $M_1(x_1,y_1)$ și $M_2(x_2,y_2)$, într-un sistem de coordonate cartezian (fig. 1.28), este

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

În cazul particular cînd unul dintre puncte (de exemplu M_2) coincide cu originea axelor de coordonate,

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

În sistemul de coordonate polar distanța dintre punctele $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ și $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ (fig. 1.29) este

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

b) La *împărțirea unui segment de dreaptă într-un raport dat*, coordonatele carteziene ale punctului $M(x, y)$, care împarte interior segmen-

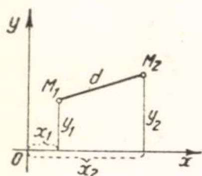


Fig. 1.28.

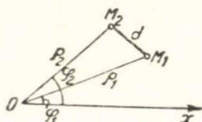


Fig. 1.29.

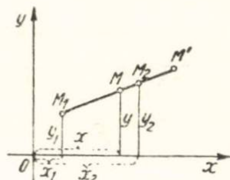


Fig. 1.30.

tul determinat de punctul inițial $M_1(x_1, y_1)$ și punctul final $M_2(x_2, y_2)$ în raportul $M_1M/MM_2 = \lambda$ (fig. 1.30), se determină prin formulele:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Dacă punctul M se află la mijlocul segmentului M_1M_2 ($\lambda = 1$), formulele capătă forma

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Cînd punctul împarte exterior segmentul (punctul de diviziune este M') λ devine negativ.

c) *Aria S a unui triunghi*, definit prin vîrfurile $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ și $C(x_3, y_3)$ (fig. 1.31, *a*), este dată de formula

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Valorii pozitive a determinantului îi corespunde parcurgerea vîrfurilor triunghiului A, B și C în sens opus sensului mișcării acelor

de ceasornic, iar valorii negative, parcurgerea în sensul mişcării acelor de ceasornic.

Dacă determinantul este egal cu zero, punctele A, B şi C sînt coliniare.

Dacă unul dintre vîrfurile triunghiului (C) coincide cu originea axelor de coordonate (fig. 1.31, b), atunci

$$S = \pm \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

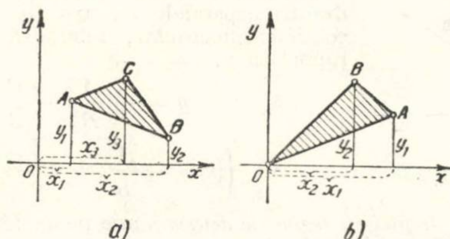


Fig. 1.31.

Aria S a unui poligon, definit prin vîrfurile $A_1(x_1, y_1)$ $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3),\ldots,A_n(x_n, y_n)$, este dată de formula

$$S = \pm \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) +$$

$$+ (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + \ldots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)].$$

Reprezentarea geometrică a ecuaţiei cu două variabile. Ecuaţia $F(x, y) = 0$ sau $y = f(x)$ este *ecuaţia unei drepte* în sistemul de coordonate cartezian dacă înlocuindu-se coordonatele oricărui punct al acestei drepte în ecuaţie se obţine o identitate (satisfac ecuaţia), iar coordonatele tuturor celorlalte puncte ale planului nu satisfac această ecuaţie.

Tot astfel, ecuaţia $F(\rho, \varphi) = 0$ sau $\rho = f(\varphi)$ este ecuaţia unei drepte în coordonate polare.

Dreapta. Într-un sistem de coordonate cartezian linia dreaptă este dată de o ecuaţie liniară în raport cu coordonatele curente x şi y.

1. *Ecuaţia generală a unei drepte*: $Ax + By + C = 0$. Pentru $C = 0$ dreapta trece prin originea axelor de coordonate, pentru $B = 0$ dreapta este paralelă cu axa Oy de ecuaţie $Ax + C = 0$, iar pentru $A = 0$ dreapta este paralelă cu axa Ox (fig. 1.32).

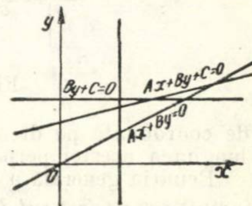


Fig. 1.32.

2. *Ecuația dreptei cu coeficient unghiular*

$$y = kx + b,$$

unde *coeficientul unghiular* k este egal cu tangenta unghiului format de dreaptă cu axa $Ox(k = \operatorname{tg} \varphi)$, iar parametrul b, numit *ordonata la origine*, este egal cu lungimea segmentului determinat de dreaptă pe axa Oy, ținînd seamă de semn (fig. 1.33). Ecuația dreptei cu coeficient unghiular poate reprezenta orice dreaptă, cu excepția dreptelor paralele cu axa Oy.

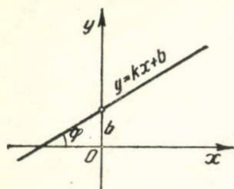


Fig. 1.33.

Pentru a reduce ecuația generală a unei drepte neparalele cu axa Oy la ecuația cu coeficient unghiular, trebuie să o rezolvăm în raport cu y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$\left(k = -\frac{A}{B};\ b = -\frac{C}{B}\right).$$

3. *Ecuația dreptei cu segmente determinante* pe axele de coordonate (*ecuația dreptei cu tăieturi*) este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

unde parametrii a și b, luați cu semnul + sau −, sînt lungimele segmentelor determinate de dreaptă pe axele de coordonate (fig. 1.34). Dacă $b = \infty$ (dreapta este paralelă cu axa Oy), ecuația dreptei este $x = a$; dacă $a = \infty$ (dreapta este paralelă cu axa Ox), ecuația dreptei este $y = b$.

4. *Ecuația normală a unei drepte* este $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, unde α este unghiul format de perpendiculara dusă din originea axelor

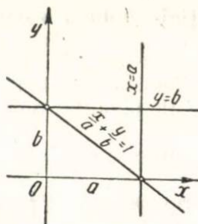


Fig. 1.34.

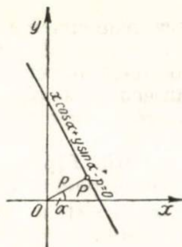


Fig. 1.35.

de coordonate pe dreaptă cu axa Ox, iar parametrul $p = OP$ este lungimea acestei perpendiculare (fig. 1.35).

Ecuația generală a dreptei poate fi redusă la forma normală prin înmulțirea cu *factorul de normare* $M = \pm 1/\sqrt{A^2 + B^2}$; semnul lui M este opus semnului lui C.

Între coeficienţii A, B şi C şi parametrii α şi p există relaţiile

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad p = \mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

5. În sistemul de coordonate polar *ecuaţia unei drepte* care nu trece prin pol (fig. 1.36) este de forma $\rho = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$, unde p este lungimea perpendicularei dusă din pol pe dreaptă, iar α, unghiul dintre

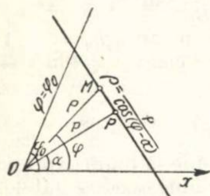


Fig. 1.36.

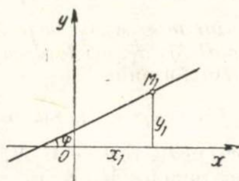


Fig. 1.37.

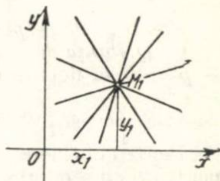


Fig. 1.38.

această perpendiculară şi axa polară $\varphi = \varphi_0$ este ecuaţia razei care porneşte din pol şi care formează cu axa polară unghiul φ_0.

6. *Ecuaţia unei drepte care trece printr-un punct dat* $M_1(x_1, y_1)$ *şi care are direcţia dată* (fig. 1.37) este $y - y_1 = k(x - x_1)$, unde k este coeficientul unghiular ($k = \operatorname{tg}\varphi$).

În cazul cînd k se consideră ca un parametru arbitrar, această ecuaţie reprezintă un *fascicul* de drepte care trec prin punctul $M_1(x_1, y_1)$ numit *centrul fasciculului* (fig. 1.38).

7. *Ecuaţia unei drepte care trece prin două puncte date* $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ (fig. 1.39):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Coeficientul unghiular al dreptei se determină în acest caz prin formula $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Condiţia ca trei puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ şi $M_3(x_3, y_3)$ *să se afle pe o aceeaşi dreaptă*:

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

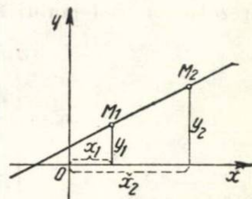


Fig. 1.39.

8. *Unghiul dintre două drepte*, date de ecuaţii sub forma generală $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ şi $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, se determină prin formula

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Unghiul θ se socotește de la prima dreaptă la a doua, în sens opus sensului mișcării acelor de ceasornic (fig. 1.40).

Dacă dreptele sînt date de ecuații cu coeficienți unghiulari $y = k_1x + b_1$ și $y = k_2x + b_2$, formula respectivă devine

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Condiția de paralelism a două drepte: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ sau $k_1 = k_2$.

Condiția de perpendicularitate: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ sau $k_1k_2 = -1$.

9. *Distanța de la punctul* $M_1(x_1, y_1)$ *la dreapta* $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ se determină prin formula

$$d = \pm (x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p).$$

Pentru obținerea valorii pozitive $d = M_1N$, trebuie să luăm expresia pentru d cu semnul + dacă punctul $M_1(x_1, y_1)$ și originea coordonatelor

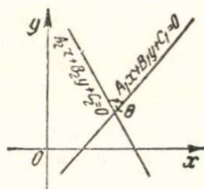


Fig. 1.40.

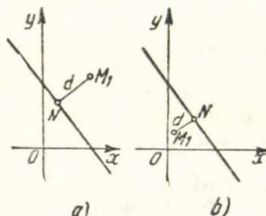


Fig. 1.41.

se află de părți diferite ale dreptei (fig. 1.41, *a*) și cu semnul − dacă sînt de aceeași parte (fig. 1.41, *b*).

10. Coordonatele *punctului de intersecție* $M_0(x_0, y_0)$ *a două drepte* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ și $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ se determină prin rezolvarea sistemului format de aceste ecuații după formulele

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

dacă $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

În cazul cînd $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ și $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\left(\text{sau } \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$, dreptele sînt paralele.

Dacă, însă, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0$, adică dacă sînt satisfăcute condiţiile $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$, dreptele se suprapun (există o infinitate de puncte comune).

11. *Condiția ca trei drepte* avînd ecuaţiile $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ *să treacă prin acelaşi punct*:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

12. *Ecuația fasciculului de drepte* care trec prin punctul de intersecţie a două drepte date $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ şi $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ este de forma

$$A_1x + B_1y + C_1 + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

unde factorul μ este arbitrar. Variind pe μ, putem obţine orice dreaptă din fascicul, care nu coincide cu dreapta a doua.

Cercul 1. Ecuaţia cercului în coordonate carteziene:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

unde R este raza cercului şi a, b, coordonatele centrului O_1 (fig. 1.42).

Dacă centrul se află în originea axelor de coordonate, ecuaţia cercului ia forma $x^2 + y^2 = R^2$ sau, sub forma parametrică: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$.

2. Ecuaţia generală de gradul al doilea în raport cu x şi cu y: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ reprezintă un cerc dacă $A = C$ şi $B = 0$, adică atunci cînd ea poate fi redusă la forma $x^2 + y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$.

Raza şi coordonatele centrului cercului se determină prin formulele

$$R = \sqrt{D'^2 + E'^2 - F'};$$

$$a = -D'; \quad b = -E'.$$

Dacă $D'^2 + E'^2 - F' > 0$, cercul este real; dacă $D'^2 + E'^2 - F' < 0$, cercul este imaginar, iar dacă $D'^2 + E'^2 - F' = 0$, cercul se reduce la un punct.

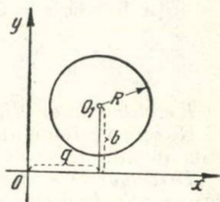


Fig. 1.42.

3. În coordonate polare, ecuaţia cercului (fig. 1.43 *a*) este de forma

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2,$$

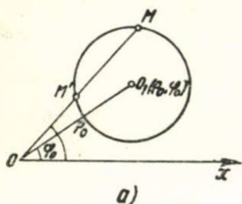
unde R este raza cercului, iar ρ_0, φ_0 sînt coordonatele polare ale centrului O_1.

Dacă cercul trece prin pol şi centrul se află pe axa polară (fig. 1.43, *b*), ecuaţia cercului capătă forma

$$\rho = 2R \cos \varphi.$$

Ecuaţia cercului al cărui centru coincide cu polul: $\rho = R$.

Elipsa. *Elipsa* (fig. 1.44) este locul geometric al punctelor din plan astfel încît suma distanţelor lor la două puncte date F_1 şi F_2, numite



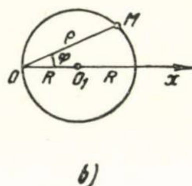


Fig. 1.43.

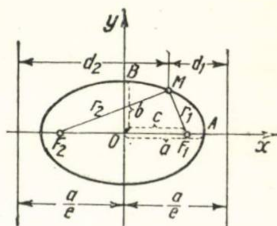


Fig. 1.44.

focare, este o mărime constantă: $r_1 + r_2 = 2a$ (segmentele r_1 şi r_2 sînt *razele vectoare* ale punctului M al elipsei).

1. Dacă focarele elipsei se află pe axa Ox, iar originea axelor de coordonate este situată în mijlocul segmentului F_1F_2, ecuaţia elipsei este de forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde a şi b sînt semiaxele elipsei *(ecuaţia canonică)*.

2. Ecuaţiile parametrice ale elipsei: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Semiaxa mare a elipsei este $a = OA$, *semiaxa mică* $b = OB$, semidistanţa focală $c = OF_1$; între aceste mărimi există relaţia

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Excentricitatea elipsei $e = c/a$ este mai mică decît unitatea.

Razele vectoare ale unui punct al elipsei cu abscisa x se calculează prin formulele: $r_1 = a - ex$; $r_2 = a + ex$.

Directoarele elipsei se numesc dreptele paralele cu axa mică şi care se află la distanţa a/e, de ambele părţi ale ei. Ecuaţiile directoarelor: $x = \pm a/e$.

Proprietatea fundamentală a directoarelor: raportul dintre raza vectoare a oricărui punct al elipsei şi distanţa de la acest punct la directoarea respectivă este o mărime constantă, egală cu excentricitatea elipsei:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e.$$

Hiperbola. *Hiperbola* (fig. 1.45) este locul geometric al punctelor din plan, astfel încît diferenţa distanţelor la două puncte date F_1 şi F_2, numite *focare*, este o mărime constantă: $r_1 - r_2 = \pm 2a$ (segmentele r_1 şi r_2 sînt *razele vectoare* ale punctului M al hiperbolei).

1. Dacă focarele hiperbolei se află pe axa Ox, iar originea axelor de coordonate este situată în mijlocul segmentului F_1F_2, ecuaţia hiperbolei este de forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde a şi b sînt *semiaxele* hiperbolei *(ecuaţia canonică)*.

2. Ecuaţiile parametrice ale hiperbolei: $x = \pm a \operatorname{ch} t$, $y = \pm b \operatorname{sh} t$.

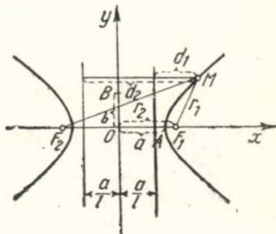


Fig. 1.45.

Semiaxa *reală* a hiperbolei, $a = OA$; semiaxa *imaginară*, $b = OB$; *semidistanţa focală*, $c = OF_1$; relaţia dintre aceste mărimi este

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Excentricitatea hiperbolei, $e = c/a$, este mai mare decît unitatea.

Razele vectoare ale unui punct al hiperbolei cu abscisa x se calculează după formulele:

$r_1 = -a + ex$, $r_2 = a + ex$ (pentru punctele de pe ramura dreaptă a hiperbolei)

$r_1 = a - ex$, $r_2 = -a - ex$ (pentru punctele de pe ramura stîngă a hiperbolei).

Directoarele hiperbolei se numesc dreptele paralele cu axa imaginară şi care se află la distanţa a/e, de ambele părţi ale ei. Ecuaţiile directoarelor: $x = \pm a/e$.

Proprietatea fundamentală a directoarelor: raportul dintre raza vectoare a oricărui punct al hiperbolei şi distanţa de la acest punct la directoarea respectivă este o mărime constantă, egală cu excentricitatea hiperbolei:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e.$$

Dreptele $y = \pm bx/a$ (fig. 1.46) sînt asimptotele hiperbolei (v. p. 157).

Hiperbolele $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ şi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se numesc *conjugate*.

Hiperbolele conjugate au asimptote comune; axa reală a uneia este axa imaginară a celeilalte şi invers.

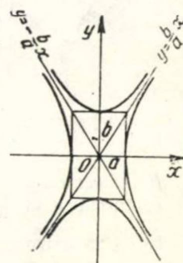


Fig. 1.46.

Hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$, care are semiaxele a şi b egale între ele, se numeşte *cu axe egale (echilateră)*. Asimptotele ei sînt perpendiculare între ele.

Dacă luăm ca axe de coordonate asimptotele unei hiperbole cu axe egale (fig. 1.47), ecuaţia acesteia devine:

$$xy = \pm \frac{a^2}{2}.$$

Ecuaţia $y = \dfrac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}$ este şi ea ecuaţia unei hiperbole cu axe egale (fig. 1.48). Asimptotele ei sînt paralele cu axele de coordonate; centrul $O'(-b_2/a_2, a_1/a_2)$, iar vîrfurile $A, B \left(-\dfrac{b_2 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}, \dfrac{a_1 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}\right)$, unde $D = a_1b_2 - a_2b_1$.

Parabola. *Parabola* (fig. 1.49) este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct dat F, numit *focar*, şi o dreaptă dată, numită *directoare*.

Dacă axa Ox care trece prin focar este perpendiculară pe directoare, iar originea axelor de coordonate se află în mijlocul segmentului de pe axa Ox, cuprins între focar şi directoare, ecuaţia parabolei este de forma $y^2 = 2px$, unde p este *parametrul* parabolei, egal cu distanţa dintre focarul F şi directoare *(ecuaţia canonică)*.

Vîrful parabolei, dat de ecuaţia sub formă canonică, coincide cu originea axelor de coordonate. *Excentricitatea* parabolei este egală cu unitatea. Spre deosebire de elipsă şi de hiperbolă, parabola nu are centru.

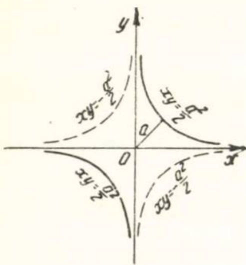


Fig. 1.47.

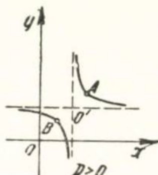


Fig. 1.48.

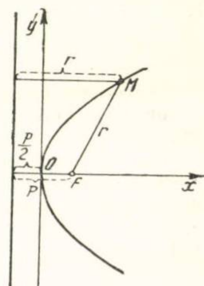


Fig. 1.49.

Raza vectoare a unui punct al parabolei cu abscisa x se calculează cu formula $r = x + p/2$.

Ecuaţia directoarei parabolei $x = -\dfrac{p}{2}$.

Ecuaţia $y = ax^2 + bx + c$, a cărei parte dreaptă este un trinom de gradul al doilea, este ecuaţia unei parabole cu axa paralelă cu axa

Oy (fig. 1.50). Parametrul ei este $p = \frac{1}{2|a|}$. Pentru $a > 0$, parabola este îndreptată cu concavitatea în sus. Pentru $a < 0$, cu concavitatea în jos. Coordonatele vîrfului parabolei sînt

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

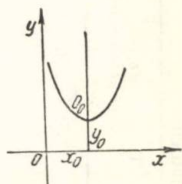


Fig. 1.50.

Tangentele și normalele la cerc, elipsă, hiperbolă și parabolă. Ecuația *tangentei* în punctul $M_1(x_1, y_1)$ al unui cerc, dat de ecuația generală în coordonate carteziene, este

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = R^2,$$

iar ecuația normalei în același punct este

$$\frac{y - b}{y_1 - b} = \frac{x - a}{x_1 - a}.$$

În cazul cînd centrul cercului se află în originea axelor de coordonate, ecuația tangentei în punctul $M_1(x_1, y_1)$ ia forma

$$xx_1 + yy_1 = R^2,$$

iar ecuația normalei în același punct,

$$y_1x - x_1y = 0.$$

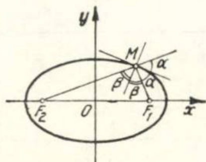
Ecuația tangentei la elipsă într-un punct dat $M_1(x_1, y_1)$ al elipsei este

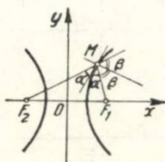
$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Ecuația normalei în același punct

$$\frac{x - x_1}{b^2x_1} - \frac{y - y_1}{a^2y_1} = 0.$$

Normala la elipsă (fig. 1.51, *a*) este bisectoarea unghiului interior format de razele vectoare ale punctului elipsei, iar tangenta este bisectoarea unghiului exterior respectiv.





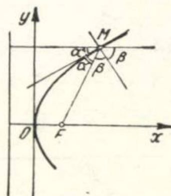


Fig. 1.51.

Reducerea ecuației generale a curbei de gradul al doilea la forma canonică

			Forma curbelor	Transformarea coordonatelor	Ecuația canonică a curbei după transformare
Curbele cu centru $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	Elipsă a) $\Delta \cdot I < 0$ – reală; b) $\Delta \cdot I > 0$ – imaginară	1) Translația originii în centrul curbei cu coordonatele $x_0 = \dfrac{BE - CD}{\delta}$	$S_1 x'^2 + S_2 y'^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0,$
		$\Delta = 0$	O pereche de drepte imaginare care au un punct comun	$y_0 = \dfrac{BD - AE}{\delta}$.	
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Hiperbolă	2) Rotația axelor cu unghiul α, unde $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2B}{A - C}$,	$S_1 = \dfrac{A+C+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}{2}$ $S_2 = \dfrac{A+C-\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}{2}$
		$\Delta = 0$	O pereche de drepte care se intersectează	iar semnul lui sin 2α coincide cu semnul lui 2B. Coeficientul unghiular al axei noi x': $k = \dfrac{C-A+\sqrt{(C-A)^2+4B^2}}{2B}$	(S_1 și S_2 sînt rădăcinile ecuației de gradul al doilea $S^2 - LS + \delta = 0$).

Curbele parabolice *) $\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	Parabolă	1) Rotația axelor cu unghiul α, unde $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$, iar semnul lui $\sin\alpha$ este opus semnului lui A. 2) Translația originii în vîrful parabolei, ale cărei coordonate x_0 și y_0 se determină prin ecuațiile $I_{y_0} + \frac{AD+BE}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ $2\frac{BD-AE}{\sqrt{A^2+B^2}}x_0 + \frac{AD+BE}{\sqrt{A^2+B^2}}y_0 + F = 0.$	$y'^2 = 2px'$, unde $p = \frac{AE-BD}{I\sqrt{A^2+B^2}}$
	$\Delta = 0$	O pereche de drepte paralele, dacă $D^2 - AF > 0$. O pereche de drepte confundate, dacă $D^2 - AF = 0$. O pereche de drepte imaginare, dacă $D^2 - AF < 0$.	Rotația axelor cu unghiul α, unde $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$ iar semnul lui $\sin\alpha$ este opus semnului lui A	$I_y'^2 + 2\frac{AD+BE}{\sqrt{A^2+B^2}}y' + F = 0$

*) Se are în vedere că nici unul dintre coeficienții principali (A, B, C) nu este nul. Dacă doi coeficienți (A și B sau B și C) sînt nuli, simplificarea ecuației se reduce la translația paralelă a axelor; ecuația $Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ se transformă în ecuația $y'^2 = 2px'$ și ecuația $Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ în ecuația $x'^2 = 2py'$.

Ecuaţia tangentei la hiperbolă într-un punct dat pe ea $M_1(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Ecuaţia normalei în acelaşi punct

$$\frac{x - x_1}{b^2 x_1} + \frac{y - y_1}{a^2 y_1} = 0.$$

Tangenta la hiperbolă (fig. 1.51, *b*) este bisectoarea unghiului interior format de razele vectoare ale punctului hiperbolei, iar normala este bisectoarea unghiului exterior respectiv.

Ecuaţia tangentei la parabolă într-un punct dat $M_1(x_1, y_1)$ al ei:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Ecuaţia normalei în acelaşi punct:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Tangenta la parabolă (fig. 1.51, *c*) este bisectoarea unghiului interior format de raza vectoare a punctului parabolei şi perpendiculara dusă din acest punct pe directoare, iar normala este bisectoarea unghiului exterior corespunzător.

Ecuaţiile polare ale elipsei, parabolei şi ramurii drepte a hiperbolei, cînd polul se află în focar şi sensul pozitiv al axei polare este de la vîrful cel mai apropiat de focar spre acesta (fig. 1.52), sînt de forma

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

unde *p* *(parametrul curbei)* este segmentul de dreaptă paralel cu directoarea, de la focar pînă la intersecţia cu curba; *e* este excentricitatea.

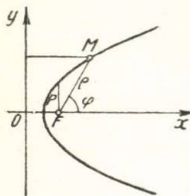


Fig. 1.52.

Ecuaţia generală a curbei de gradul al doilea,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

determină o elipsă (în particular un cerc), o hiperbolă, o parabolă sau o pereche de drepte *(curbă de gradul al doilea, descompusă)*.

Curba care are un centru determinat (centru de simetrie) se numeşte *cu centru*. Curbele cu centru de gradul al doilea sînt elipsa, hiperbola şi perechea de drepte concurente.

Invarianţii curbei de gradul al doilea:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & F \\ D & E & F \end{vmatrix}; \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2; \quad I = A + C.$$

Aceste mărimi nu variază la translaţia şi la rotaţia axelor de coordonate, adică, dacă după transformarea coordonatelor ecuaţia curbei este de forma

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

mărimile Δ, δ şi I, calculate pentru noile valori ale coeficienţilor, păstrează valorile iniţiale.

§ 1.7. Geometria analitică în spaţiu

Sistemele fundamentale de coordonate. Pentru determinarea poziţiei unui punct în spaţiu se folosesc următoarele sisteme de coordonate: 1) sistemul cartezian ortogonal, 2) sistemul sferic sau polar şi 3) sistemul cilindric sau semipolar.

1. *Coordonatele carteziene* ale punctului M (fig. 1.53) sînt: *abscisa* $x = OA$, *ordonata* $y = AN$ şi *cota* $z = NM$. Se deosebesc sisteme

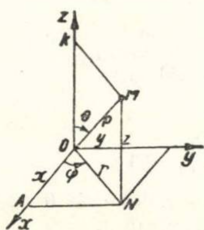


Fig. 1.53.

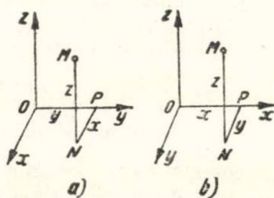


Fig. 1.54.

drepte de axe de coordonate (fig. 1.54, *a*) şi sisteme stîngi (fig. 1.54, *b*); în cele ce urmează vom folosi sistemele drepte de axe.

Planele de coordonate împart spaţiul în opt octanţi (fig. 1.55). Semnele coordonatelor depind de octantul în care se află punctul şi sînt date în tabela următoare

Octanţi / Coordonate	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

La translația paralelă a axelor de coordonate (fig. 1.56), coordonatele x, y, z ale punctului M în sistemul $Oxyz$ sînt legate de coordonatele x', y', z' ale aceluiași punct în sistemul $O'x'y'z'$ prin relațiile: $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$, unde a, b, c sînt coordonatele noii origini de coordonate O' în sistemul vechi.

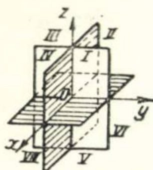


Fig. 1.55.

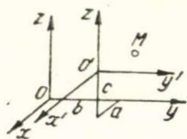


Fig. 1.56.

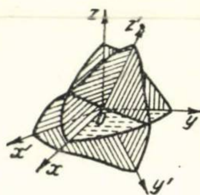


Fig. 1.57.

În cazul *rotației axelor* de coordonate (fig. 1.57) avem

$$x = x' \cos\alpha_1 + y' \cos\alpha_2 + z' \cos\alpha_3$$
$$y = x' \cos\beta_1 + y' \cos\beta_2 + z' \cos\beta_3$$
$$z = x' \cos\gamma_1 + y' \cos\gamma_2 + z' \cos\gamma_3,$$

unde $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, sînt unghiurile formate de axa Ox', $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — de axa Oy' și $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ — de axa Oz', cu axele vechi.

Aceste nouă unghiuri sînt legate prin relațiile

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$
$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1$$
$$\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0$$
$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 = 0$$
$$\cos\alpha_3\cos\alpha_1 + \cos\beta_3\cos\beta_1 + \cos\gamma_3\cos\gamma_1 = 0.$$

2) *Coordonatele sferice* ale unui punct M (fig. 1.53) sînt *raza vectoare* $\rho = OM$, unghiul $\varphi = \sphericalangle AON$ *(longitudinea)* și unghiul $\theta = \sphericalangle KOM$ *(distanța polară)*.

3. *Coordonatele cilindrice* ale punctului M (fig. 1.53) sînt: *raza vectoare* $r = ON$, unghiul polar $\varphi = \sphericalangle AON$ și *cota* z, iar $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Trecerea de la coordonatele carteziene la cele sferice se face după formulele

$$x = \rho \sin\theta\cos\varphi;\ y = \rho \sin\theta\sin\varphi;\ z = \rho\cos\theta,$$

valabile cu condiția ca planele principale ale ambelor sisteme să coincidă.

Trecerea de la coordonatele carteziene la cele cilindrice, în aceleași condiții, se face prin formulele

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi;$$

cotele sînt în ambele cazuri identice.

Cîteva probleme simple. 1) Distanţa dintre două puncte $M_1(x_1, y_1 z_1)$, şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

în particular, distanţa dintre punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi originea axelor de coordonate este

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

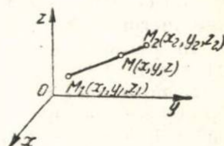


Fig. 1.58.

2) La *împărţirea unui segment de dreaptă într-un raport dat*, coordonatele punctului $M(x, y,z)$ care împarte segmentul $M_1 M_2$, determinat de punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$, în raportul $M_1M/MM_2 = \lambda$ (fig. 1.58) sînt date de formulele

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Dacă punctul M este mijlocul segmentului M_1M_2, atunci

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3) Dacă dreapta trece prin punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi formează cu axele de coordonate unghiurile α,β,γ (fig. 1.59), cosinusurile directoare ale dreptei sînt date de formulele

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \; \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \; \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

unde

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Cosinusurile directoare sînt legate între ele prin relaţia $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

4) *Volumul tetraedrului* (piramidă triunghiulară) cu vîrfurile $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ şi $M_4(x_4, y_4, z_4)$ este dat de formula

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}.$$

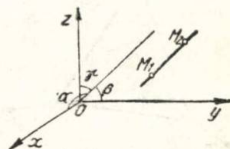


Fig. 1.59.

Determinantul din această formulă se obţine cu semnul + sau — în funcţie de faptul dacă vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ şi $\overrightarrow{M_1M_4}$ formează un sistem drept sau stîng.

Dacă determinantul este nul, punctele M_1, M_2, M_3, M_4 se află în acelaşi plan.

Reprezentarea geometrică a ecuației cu trei variabile. Ecuația $F(x, y, z) = 0$ sau $z = f(x, y)$ este *ecuația unei suprafețe* într-un sistem de coordonate cartezian dacă coordonatele oricărui punct al acestei suprafețe, înlocuite în ecuație, o prefac în identitate, iar coordonatele tuturor celorlalte puncte ale spațiului nu satisfac această ecuație.

Ecuația unei suprafețe cilindrice cu generatoarele paralele la axa Ox, nu conține coordonata x, adică este de forma $F(y, z) = 0$ (analog stau lucrurile în ceea ce privește celelalte două axe Oy și Oz).

În planul Oyz, aceeași ecuație $F(y, z) = O$ reprezintă curba de intersecție a suprafeței cilindrice cu planul de coordonate dat.

Ecuația unei suprafețe conice cu vîrful în originea axelor de coordonate este de forma $F(x, y, z) = 0$, unde F este o funcție omogenă de variabilele x, y, z, adică satisface condiția $F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z)$.

Ecuația suprafeței de rotație, generate de curba plană $z = f(x)$ care se rotește în jurul axei Oz, este de forma $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Două ecuații $F_1(x, y, z) = 0$ și $F_2(x, y, z) = 0$, date simultan, determină o anumită curbă în spațiu — intersecția suprafețelor reprezentate de aceste ecuații.

Sub formă parametrică, ecuațiile unei curbe în spațiu sînt de forma $x = \varphi_1(t)$; $y = \varphi_2(t)$; $z = \varphi_3(t)$.

Planul. În sistemul de coordonate cartezian planul este dat de o ecuație liniară în raport cu coordonatele curente x, y, z.

1. *Ecuația generală a planului* $Ax + By + Cz + D = 0$, sau, sub forma vectorială, $\vec{N}\vec{r} + D = 0$, unde r este raza vectoare a unui punct oarecare al planului, iar vectorul $\vec{N}\,(A, B, C)$ (fig. 1.60) este perpendicular pe plan.

În cazul cînd $D = 0$, planul trece prin originea axelor de coordonate. Cînd $A = 0$ (sau $B = 0$, sau $C = 0$), planul este paralel cu axa Ox (sau Oy sau Oz). Cînd $A = B = 0$ (sau $A = C = 0$, sau $B = C = 0$, planul este paralel cu planul xOy sau xOz sau yOz).

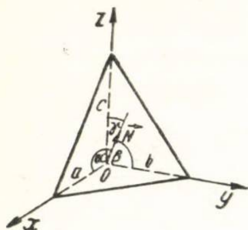


Fig. 1.60.

2. *Ecuația planului cu segmente determinate* pe axele de coordonate *(ecuația planului cu tăieturi)* este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

unde a, b, c, luate cu semnele respective, sînt lungimile segmentelor determinate de plan pe axele Ox, Oy, și Oz (fig. 1.60).

Dacă $b = c = \infty$ (planul este paralel cu planul yOz), ecuația planului este $x = a$. Dacă $a = c = \infty$ (planul este paralel cu planul xOz), ecuația planului este $y = b$. Dacă $a = b = \infty$ (planul este paralel cu planul xOy), ecuația planului este $z = c$.

3. *Ecuația normală a planului*: $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$ sau, sub forma vectorială, $\vec{N}^0\vec{r} - p = 0$, unde $\vec{N}^0$ este vectorul unitar

normal şi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sînt cosinusurile sale directoare; t este distanţa de la originea axelor de coordonate la plan (fig. 1.61).

Pentru a aduce ecuaţia generală a planului la forma normală, trebuie să înmulţim toţi termenii din partea stîngă cu *un factor de normare* $M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm \frac{1}{N}$ $(N = |\vec{N}|)$; semnul lui M se ia opus semnului lui D.

Parametrii p, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se deduc din coeficienţii ecuaţiei generale cu ajutorul formulelor:

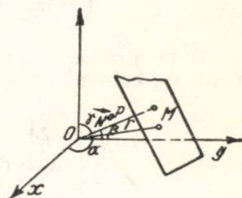


Fig. 1.61.

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\beta = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad p = \mp \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4. *Ecuaţia unui fascicul de plane* care trec printr-o dreaptă dată de sistemul de ecuaţii $Ax + By + Cz + D = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ este de forma $Ax + By + Cz + D + \mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$, unde μ este arbitrar.

5. *Ecuaţia planului care trece prin trei puncte date* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

sau, sub forma vectorială, $(\vec{r} - \vec{r_1})(\vec{r_2} - \vec{r_1})(\vec{r_3} - \vec{r_1}) = 0$.

6. *Unghiul dintre două plane*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ sau } \vec{N}\vec{r} + D = 0,$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ sau } \vec{N_1}\vec{r} + D_1 = 0$$

se determină prin formula

$$\cos\varphi = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \pm \frac{\vec{N}\vec{N_1}}{N \cdot N_1}.$$

Condiţia de paralelism a două plane este $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$ sau $\vec{N} \times \vec{N_1} = 0$.

Condiția de perpendicularitate a două plane: $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$ sau $\vec{N}\vec{N}_1 = 0$.

7. *Distanța de la un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ la planul* $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ se determină prin formula

$$d = \pm (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1\cos\gamma - p).$$

Pentru obținerea valorii pozitive a lui d, trebuie să se ia expresia pentru d cu semnul $+$, dacă punctul M_1 și originea axelor de coordo-

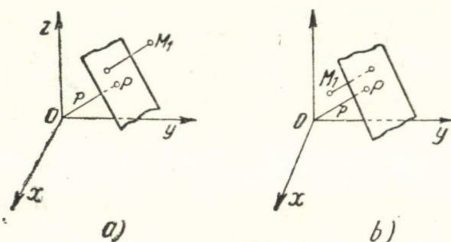


Fig. 1.62.

nate se află în părți diferite ale planului (fig. 1.62, *a*) și cu semnul $-$, dacă se află de aceeași parte a planului (fig. 1.62, *b*).

8. Pentru a afla *punctul de intersecție a trei plane* care au ecuațiile $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$, trebuie să se rezolve sistemul de ecuații date.

Dreapta în spațiu. O dreaptă în spațiu se determină ca linia de intersecție a două plane.

1. *Ecuațiile generale ale dreptei*:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \vec{N}\vec{r} + D = 0 \\ \vec{N}_1\vec{r} + D_1 = 0. \end{cases}$$

2. *Ecuațiile normale ale dreptei*: $\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$, unde x_1, y_1, z_1 sînt coordonatele unuia dintre punctele dreptei, iar α, β, γ sînt unghiurile formate de dreapta cu axele de coordonate.

3. *Ecuațiile canonice ale dreptei* $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ sau, sub forma vectorială, $(\vec{r} - \vec{r}_1) \times \vec{R} = 0$, unde x_1, y_1, z_1 sînt coordonatele unuia dintre punctele dreptei (coordonatele vectorului $\vec{r}_1$), și m, n, p

sînt coordonatele vectorului $\vec{R}$ (fig. 1.63), paralel cu dreapta, adică sînt numere proporţionale cu cosinusurile directoare *(parametri directori)*:

$$m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma.$$

Pentru trecerea de la ecuaţiile generale ale dreptei la cele canonice, trebuie să se aleagă x_1, y_1, z_1 astfel, încît ele să satisfacă ecuaţiile generale, iar numerele m, n, p trebuie determinate prin formulele:

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix};$$

$$p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

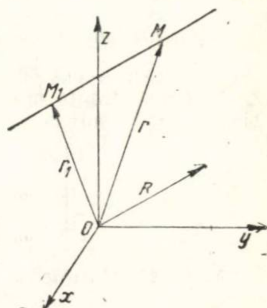


Fig. 1.63.

Pentru ca ecuaţiile canonice ale dreptei să fie reduse la forma normală, trebuie să se înmulţească numitorul cu *factorul de normare* $M = \mp \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$, prin urmare:

$$\cos\alpha = \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos\beta = \pm \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Semnul factorului de normare determină sensul pe dreaptă.

4. *Ecuaţiile parametrice ale dreptei*: $x = x_1 + mt$, $y = y_1 + nt$, $z = z_1 + pt$ sau, sub forma vectorială, $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{R}t$, unde t este un parametru.

5. *Ecuaţiile dreptei care trece prin punctele* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ sau, sub forma vectorială, $(\vec{r} - \vec{r_1}) \times (\vec{r_2} - \vec{r_1}) = 0$.

6. *Unghiul dintre două drepte* avînd cosinusurile directoare $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ şi $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ se determină prin formula

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1.$$

Dacă dreptele au ecuaţiile $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$,

$\frac{x - x_2}{m_1} = \frac{y - y_2}{n_1} = \frac{z - z_2}{p_1}$ sau, sub forma vectorială,

$(\vec{r} - \vec{r}_1) \times \vec{R}_1 = 0$, $(\vec{r} - \vec{r}_2) \times \vec{R}_2 = 0$, atunci

$$\cos\varphi = \pm \frac{mm_1 + nn_1 + pp_1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}} = \pm \frac{\vec{R}_1\vec{R}_2}{R_1R_2}.$$

Condiția de paralelism a două drepte: $\cos\alpha = \cos\alpha_1$, $\cos\beta = \cos\beta_1$, $\cos\gamma = \cos\gamma_1$ sau $\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}$ sau $\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = 0$.

Condiția de perpendicularitate a două drepte: $\cos\alpha\ \cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0$, sau $mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0$ sau $\vec{R}_1\vec{R}_2 = 0$.

7. Două drepte se află în același plan (sînt *coplanare*), dacă este satisfăcută condiția

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. *Unghiul dintre o dreaptă și un plan* se determină prin formula

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|\vec{R}\vec{N}|}{RN}.$$

Condiția de paralelism a unei drepte cu un plan: $Am + Bn + Cp = 0$, sau $\vec{R}\vec{N} = 0$.

Condiția de perpendicularitate a unei drepte pe un plan: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ sau $\vec{N} \times \vec{R} = 0$.

9. Coordonatele *punctului de intersecție a unei drepte* cu un plan: $x_0 = x_1 + mt_0$, $y_0 = y_1 + nt_0$, $z_0 = z_1 + pt_0$ sau $t_0 = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cp}$.

Dreapta se află în plan, dacă sînt satisfăcute condițiile: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ (dreapta și planul au un punct comun) și $Am + Bn + Cp = 0$ (dreapta și planul sînt paralele).

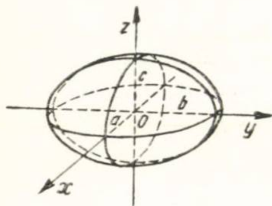


Fig. 1.64.

Ecuațiile canonice ale suprafețelor de gradul al doilea. 1. *Elipsoidul* (fig. 1.64)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dacă $a = b$, avem un *elipsoid de rotație* (suprafață de rotație generată de elipsa $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ prin rotația în jurul axei Oz).

Dacă $a = b = c$, atunci $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ şi în acest caz avem o *sferă* (*suprafaţă sferică*) cu raza a.

Ecuaţia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$ reprezintă o sferă cu raza a şi cu centrul în punctul $O_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. *Hiperboloidul cu o pînză* (fig. 1.65)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dacă $a = b$, avem un *hiperboloid de rotaţie cu o pînză* (suprafaţă de rotaţie generată de hiperbola $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ prin rotaţia în jurul axei Oz).

3. *Hiperboloidul cu două pînze* (fig. 1.66)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Dacă $a = b$, avem un *hiperboloid de rotaţie cu două pînze* (suprafaţă de rotaţie generată de hiperbola $x^2/a^2 - z^2/c^2 = -1$ prin rotaţia în jurul axei Oz).

4. *Conul de gradul al doilea* (fig. 1.67)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

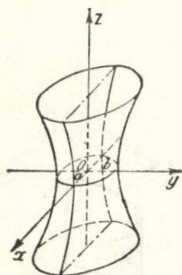


Fig. 1.65.

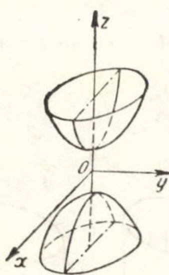


Fig. 1.66.

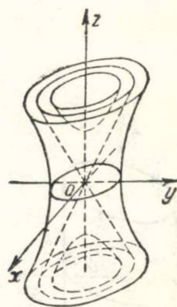


Fig. 1.67.

Generatoarele lui sînt asimptotele secţiunilor corespunzătoare hiperboloizilor $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = \pm 1$; în raport cu aceşti hiperboloizi conul se numeşte *asimptotic*.

Dacă $a = b$, avem un *con circular drept*.

5. *Paraboloidul eliptic* (fig. 1.68):

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Dacă $p = q$, avem un *paraboloid de rotaţie* (suprafaţă de rotaţie generată de parabola $x^2 = 2pz$ prin rotaţia în jurul axei Oz.

6. *Paraboloidul hiperbolic* (fig. 1.69):

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

7. *Cilindrii de gradul al doilea* cu generatoare paralele cu axa Oz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — } \textit{cilindrul eliptic} \text{ (fig. 1.70);}$$

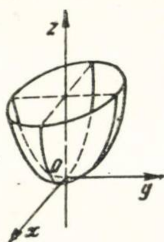


Fig. 1.68.

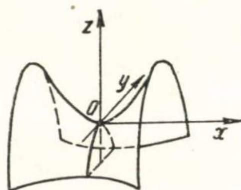


Fig. 1.69.

în particular, pentru $a = b$ avem *cilindrul circular*;

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \textit{ cilindrul hiperbolic} \text{ (fig. 1.71);}$$

$$y^2 = 2px \text{ — } \textit{cilindrul parabolic} \text{ (fig. 1.72).}$$

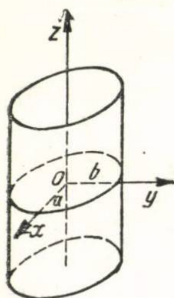


Fig. 1.70.

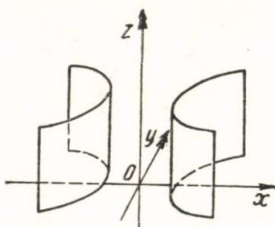


Fig. 1.71.

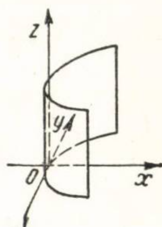


Fig. 1.72.

Ecuaţia generală a suprafeţei de gradul al doilea. Forma suprafeţei de gradul al doilea care are ecuaţia generală

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

se determină, după cum se arată mai departe, după semnele mărimilor

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$J = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2$$

care sînt *invarianții* acestei ecuații, deoarece aceste mărimi nu se modifică la transformarea sistemelor de coordonate (aici $a_{ij} = a_{ji}$).

	$\delta \neq 0$ (suprafețe cu centru)			$\delta = 0$ (paraboloizi, cilindri și perechi de plane)	
	$I\delta > 0;\ J > 0$	$I\delta$ și J nu sînt ambii pozitivi		$J > 0\ (\Delta < 0)$	$J < 0\ (\Delta > 0)$
$\Delta < 0$	Elipsoid	Hiperboloid cu două pînze	$\Delta \neq 0$	Paraboloid eliptic	Paraboloid hiperbolic
$\Delta > 0$	Elipsoid imaginar	Hiperboloid cu o pînză	$\Delta = 0$	Suprafață cilindrică, a cărei directoare este o curbă de gradul al doilea. În funcție de forma acestei curbe, cilindrul va fi eliptic (pentru $J > 0$), hiperbolic, (pentru $J < 0$), parabolic (pentru $J = 0$), sau suprafața se împarte în două plane (reale, imaginare, sau confundate).	
$\Delta = 0$	Con imaginar (cu vîrf real)	Con			

1.4
Calculul diferenţial

§ 1.8. Funcţii de o variabilă

Noţiuni fundamentale. Un număr real x poate fi reprezentat printr-un punct pe axa numerică (axa Ox) cu abscisa x (fig. 1.73).

Mulţimea de valori $a \leqslant x \leqslant b$ se numeşte *interval închis* sau *segment* şi se notează $[a, b]$. Mulţimea de valori $a < x < b$ se numeşte *interval* (interval deschis) şi se notează (a, b).

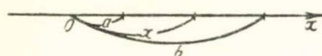


Fig. 1.73.

Vecinătate a punctului $x = x_0$ se numeşte orice segment pentru care punctul x_0 este interior.

Mărimea y se numeşte *funcţie de variabila independentă (argument)* x, dacă oricărei valori a lui x, care aparţine unei anumite mulţimi de valori, îi corespunde o valoare reală y, perfect determinată.

Notaţia: $x = f(x)$ (x — argumentul, y — funcţia, f — simbolul dependenţei funcţionale).

Domeniul de definiţie al funcţiei se numeşte mulţimea de valori a argumentului pentru care această funcţie este determinată.

Dacă între x şi y este dată o relaţie astfel încît fiecărei (sau unor anumite) valori a lui x îi corespunde mai mult decît o valoare a lui y, atunci această relaţie determină nu o singură funcţie, ci mai multe, sau, cum se spune pe scurt, o funcţie multivocă (fiecare din funcţiile univoce reunite în cadrul acestei funcţii multivoce se numeşte *ramura* ei).

O funcţie poate fi reprezentată geometric cu ajutorul *unui grafic*, dacă valorile argumentului x şi ale funcţiei y se consideră drept coordonate ale punctului în plan.

Funcţia $f(x)$ se numeşte *pară*, dacă $f(-x) = f(x)$ şi *impară*, dacă $f(-x) = -f(x)$. Graficul unei funcţii pare este simetric în raport cu axa Ox (fig. 1.74, *a*), graficul unei funcţii impare este simetric în raport cu originea axelor de coordonate (fig. 1.74, *b*).

Dacă $f(x + T) = f(x)$ pentru orice x (T este o mărime constantă), atunci funcţia $f(x)$ se numeşte *periodică*, iar numărul T este *perioada* sa.

Dependenţa funcţională, dată cu ajutorul unei anumite formule, se numeşte implicită dacă este de forma $F(x, y) = 0$, *explicită* dacă are forma $y = f(x)$ şi, în sfîrşit, *parametrică* dacă argumentul x şi funcţia y sînt exprimate cu ajutorul unei mărimi variabile auxiliare t (parametrul): $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$.

Dacă formula prin care se determină funcţia poate fi scrisă astfel, încît asupra argumentului să se efectueze un număr finit de operaţii algebrice (adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la putere,

extragere de rădăcină, rezolvarea unei ecuaţii algebrice), funcţia se numeşte *algebrică*; în caz contrar ea se numeşte *transcendentă* (funcţiile trigonometrice şi inversele lor, funcţia logaritmică, funcţia exponenţială etc.).

Funcţiile algebrice se împart în *raţionale* şi *iraţionale*. O funcţie este raţională dacă pentru calculul ei este suficient să efectuăm asupra

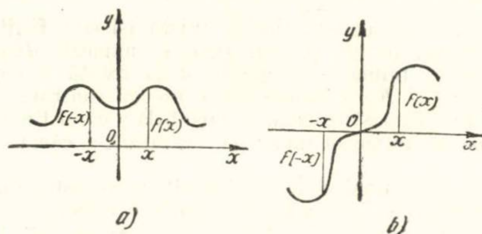


Fig. 1.74.

argumentului un număr finit de operaţii aritmetice (adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la o putere întreagă); în caz contrar funcţia este iraţională.

Funcţia raţională se numeşte *funcţie întreagă* sau *polinom*, dacă pentru calculul ei nu se recurge la împărţirea cu o expresie care conţine un argument (şi la ridicarea argumentului la o putere negativă); în caz contrar, ea este o *funcţie raţională*.

Funcţiile pentru determinarea cărora se efectuează asupra argumentului un număr finit de aşa-numite *operaţii elementare* (în operaţiile elementare intră toate operaţiile algebrice, precum şi logaritmarea, exponenţierea şi operaţiile definite prin funcţii trigonometrice şi funcţii trigonometrice inverse) se numesc *funcţii elementare*.

Limitele şi infiniţii mici. Numărul b se numeşte *limita funcţiei* $f(x)$ pentru x tinzînd către a [notaţia: $\lim_{x \to a} f(x) = b$] dacă, oricît de mic ar fi numărul pozitiv ε, putem să-i asociem un număr pozitiv δ, suficient de mic, astfel încît pentru orice valoare x ($x \neq a$), care satisface condiţia $|x - a| < \delta$, să aibă loc inegalitatea $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Egalitatea $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ înseamnă că pentru orice număr pozitiv ε putem alege un număr A suficient de mare, astfel încît, pentru orice x care satisface condiţia $|x| > A$, să aibă loc inegalitatea $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Egalitatea $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ [în acest caz $\lim_{x \to a} f(x)$ nu există] înseamnă că oricît de mare ar fi B, putem alege un număr pozitiv δ suficient de mic, pentru ca din $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, să rezulte $|f(x)| > B$.

Egalitatea $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ înseamnă că pentru orice număr pozitiv ε putem alege un număr A suficient de mare, astfel încît pentru orice x care satisface condiţia $x < 0$, $|x| > A$, să aibă loc inegalitatea $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Pentru a calcula $\lim_{x\to a}[\varphi(x)\psi(x)]$ cînd $\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$ şi $\lim_{x\to a}\psi(x)=\infty$ (nedeterminare de forma $0\cdot\infty$) putem face o transformare de forma $\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$ sau $\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$, ceea ce duce la cazul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Pentru a calcula $\lim_{x\to a}[\varphi(x)-\psi(x)]$, unde $\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ şi $\lim_{x\to a}\psi(x)=\infty$ (nedeterminare de forma $\infty-\infty$) putem transforma diferenţa $\varphi(x)-\psi(x)$ într-un raport, de exemplu, astfel:

$$\varphi(x)-\psi(x)=\left(\frac{1}{\psi(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}\right):\frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)},$$

ceea ce duce la cazul $\frac{0}{0}$.

Nedeterminările de forma 0^0, ∞^0, 1^∞, pot fi rezolvate prin logaritmarea expresiei $\varphi(x)^{\psi(x)}$ şi găsirea limitei funcţiei $\psi(x)\ln\varphi(x)$ după care prin exponenţiere se găseşte limita căutată.

Pentru calculul limitelor care au o formă nedeterminată, putem folosi, de asemenea, dezvoltarea funcţiilor în serie Taylor.

Continuitatea şi punctele de discontinuitate. Funcţia $f(x)$ se numeşte *continuă în punctul* $x=x_0$ (fig. 1.75), dacă în acest punct $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ [aici $\Delta x=x-x_0$ *(creşterea argumentului)* şi $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ *(creşterea funcţiei)*].

Condiţia de continuitate a lui $f(x)$ în punctul $x=x_0$ poate fi scrisă, de asemenea, cu ajutorul egalităţii $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

O funcţie este *continuă pe un segment* (interval închis), dacă este continuă în toate punctele acestui segment.

Punctul $x=x_0$ în care condiţia de continuitate nu este respectată se numeşte *punct de discontinuitate* a funcţiei.

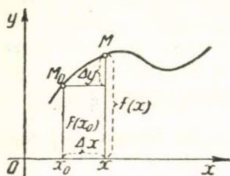


Fig. 1.75.

Limitele la stînga şi la dreapta ale funcţiei în punctul $x=x_0$ se numesc numerele determinate prin egalităţile:

$$f(x_0-0)=\lim_{\varepsilon\to 0}f(x_0-\varepsilon)\qquad(\varepsilon>0);$$

$$f(x_0+0)=\lim_{\varepsilon\to 0}f(x_0+\varepsilon)\qquad(\varepsilon>0).$$

Dacă aceste limite există (şi sînt finite), însă nu sînt egale între ele, punctul $x=x_0$ se numeşte *punct de discontinuitate de speţa întîi*. Dacă cel puţin una dintre aceste limite nu există, $x=x_0$ este *punct de discontinuitate de speţa a doua*.

Exemple.

a) $f(x)=\frac{1}{1+2^{1/x}}$; $x=0$ este punct de discontinuitate de speţa întîi (fig. 1.76); aici $f(-0)=1$, $f(+0)=0$;

b) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$; $x = 3$ este punct de discontinuitate de speţa a doua (fig. 1.77); aici $f(3-0) = 0$; $f(3+0) = \infty$;

c) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; $x = 0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua (fig. 1.78); aici $f(-0)$ şi $f(+0)$ nu există.

Dacă $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, atunci punctul $x = x_0$ se numeşte *punct de discontinuitate eliminabil.*

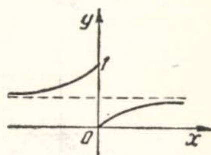


Fig. 1.76.

Derivata şi diferenţiala. *Derivata* funcţiei $y = f(x)$ se numeşte limita spre care tinde raportul dintre creşterea funcţiei şi creşterea argumentului atunci cînd creşterea argumentului tinde spre zero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Notaţiile derivatei sînt: y', y'_x, $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$.

A găsi derivata unei funcţii înseamnă a diferenţia funcţia.

Pentru ca funcţia să fie *diferenţiabilă* într-un anumit punct este necesar (dar nu este suficient) ca ea să fie continuă în acel punct.

Tangenta în punctul M al unei curbe este poziţia limită a secantei MN [N este un punct oarecare al curbei (fig. 1.79)], atunci cînd $N \to M$; *normala* este perpendiculara pe tangenta care trece prin punctul de tangenţă.

Derivata funcţiei $y = f(x)$ este egală cu tangenta trigonometrică a unghiului pe care îl face cu axa Ox tangenta la curbă în punctul $M(x, y)$ (fig. 1.80):

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha.$$

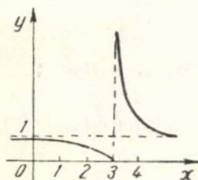


Fig. 1.77.

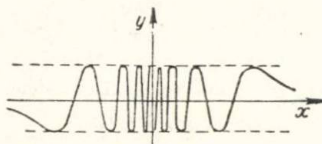


Fig. 1.78.



Fig. 1.79.

Derivata a doua a funcţiei $y = f(x)$ sau *derivata de ordinul al doilea* se numeşte *derivata derivatei* ei.

Notaţiile pentru derivata a doua: y'', $f''(x)$, d^2y/dx^2. Analog se definesc derivatele de orice ordin. Notaţiile pentru derivata de ordinul n: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, d^ny/dx^n.

Diferenţiala funcţiei $y = f(x)$ [notaţia: dy, $df(x)$] se numeşte produsul dintre derivata ei şi creşterea argumentului:

$$dy = f'(x)\,\Delta x = y'\Delta x.$$

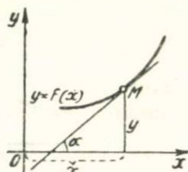


Fig. 1.80.

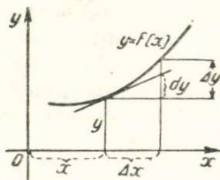


Fig. 1.81.

Diferenţa dintre creşterea funcţiei şi diferenţiala ei este un infinit mic de ordin mai mare decît Δx. Diferenţiala argumentului, dx, este egală cu creşterea sa, Δx, şi, prin urmare, $dy = y'dx$. Formula aceasta este *invariantă*, adică îşi păstrează forma şi în cazul cînd x nu este o variabilă independentă şi depinde la rîndul său de variabila t: $x = \varphi(t)$.

Geometric, diferenţiala este reprezentată prin creşterea ordonatei punctului pînă la tangenta la curba care reprezintă funcţia (fig. 1.81).

Diferenţiala de ordinul al doilea este diferenţiala diferenţialei: $d^2y = d(dy)$. Analog se definesc şi diferenţialele de orice ordin.

Formulele pentru diferenţialele de ordine superioare sînt:

$$d^2y = y''dx^2,\ d^3y = y'''dx^3, \ldots, d^ny = y^{(n)}dx^n$$

cu condiţia ca x să fie argumentul; dacă însă $x = \varphi(t)$ [iar funcţia $\varphi(t)$ este neliniară], aceste formule nu mai sînt valabile.

Reguli de derivare. Dacă u, v sînt funcţii de argumentul x, în raport cu care se efectuează derivarea, atunci:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ *(derivata sumei)*; $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

2) $(uv)' = u'v + uv'$ *(derivata produsului)*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)};$$

în particular, dacă c este o constantă, atunci $(cu)' = cu'$; $(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$ *(derivata cîtului)*;

4) $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'$ *(derivata funcţiei exponenţiale generale)*.

5) Dacă $y = f(u)$ şi $u = \varphi(x)$, atunci $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ *(regula de derivare a unei funcţii de funcţie)*.

Tabela derivatelor funcțiilor elementare fundamentale:

Funcția y	Derivata $\frac{dy}{dx}$	Funcția y	Derivata $\frac{dy}{dx}$
C (const)	0		
x	1	$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -$ $= -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x$
x^n	nx^{n-1}		
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x		
e^{kx}	ke^{kx}	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \ln a$		
a^{kx}	$ka^{kx} \ln a$	$\operatorname{arccosec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
		$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$	$\operatorname{coth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$		
$\cos x$	$-\sin x$	$\arg \operatorname{sh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\arg \operatorname{ch} x$	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\arg \operatorname{th} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$	$\operatorname{arc} \operatorname{coth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

Tabela derivatelor de ordin superior ale funcțiilor elementare fundamentale:

Funcția y	Derivata $\frac{d^n y}{dx^n}$
x^m	$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$ (pentru m întreg și $n > m$ derivata este egală cu zero)
$\frac{1}{x^m}$	$(-1)^n m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)\frac{1}{x^{m+n}}$
$\sqrt[m]{x}$	$(-1)^{n-1}\frac{1}{m^n}(m-1)(2m-1)\ldots$ $\ldots[(n-1)m-1]\frac{1}{\sqrt[m]{x^{mn-1}}}$
e^x	e^x
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k \ln a)^n a^{kx}$
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\cdot\frac{1}{x^n}$
$\sin x$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin kx$	$k^n \sin\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos kx$	$k^n \cos\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\text{sh}\, x$	$\begin{cases}\text{sh}\, x & \text{pentru } n \text{ par}\\ \text{ch}\, x & \text{pentru } n \text{ impar}\end{cases}$
$\text{ch}\, x$	$\begin{cases}\text{ch}\, x & \text{pentru } n \text{ par}\\ \text{sh}\, x & \text{pentru } n \text{ impar}\end{cases}$

În cazul mai general cînd $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, avem $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ etc.

6) Dacă variabila y este dată ca funcţie de argumentul x prin ecuaţia implicită $F(x, y) = 0$, derivatele ei pot fi găsite cu ajutorul derivatelor parţiale (în ceea ce priveşte definiţia derivatelor parţiale v. p. 105):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}(F'_x)^2}{F''_{yy}(F'_y)^2}.$$

7) Dacă dependenţa dintre y şi x este dată sub *forma parametrică* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, atunci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

8) Dacă egalitatea $y = f(x)$ se consideră ca definind implicit funcţia $x = \varphi(y)$, atunci f şi φ sînt simbolurile a două funcţii *inverse una alteia*. Derivatele acestor funcţii sînt legate între ele prin relaţia $\varphi'(y) = 1/f'(x)$.

Teoremele fundamentale ale calculului diferenţial. Teorema lui Roll. Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul (intervalul închis) $[a, b]$, derivabilă în intervalul (a, b) şi $f(a) = f(b)$, atunci în acest interval se găseşte cel puţin un punct $x = c$, în care $f'(c) = 0$ [tangenta la graficul funcţiei în punctul $x = c$ este paralelă cu axa Ox (fig. 1.82)].

Teorema lui Lagrange. Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul (intervalul închis) $[a, b]$ şi derivabilă în intervalul (a, b), atunci în acest interval există cel puţin un punct $x = c$, astfel încît să fie valabilă *formula creşterilor finite*:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

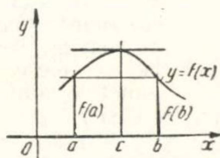


Fig. 1.82.

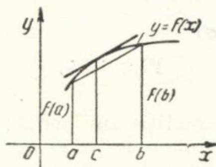


Fig. 1.83.

[tangenta la curba $y = f(x)$ în punctul cu abscisa $x = c$ este paralelă la coarda care uneşte punctele cu abscisele $x = a$ şi $x = b$ (fig. 1.83)].

Teorema lui Cauchy. Dacă funcţiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sînt continue pe segmentul (intervalul închis) $[a, b]$, derivabile în intervalul (a, b), în nici unul din punctele acestui interval $f'(x)$ şi $\varphi'(x)$ nu sînt nule

simultan și $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, atunci în acest interval există cel puțin un punct $x = c$, pentru care $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Creșterea și descreșterea funcțiilor. Dacă pentru orice puncte x_1 și x_2 din intervalul (a, b) din inegalitatea $x_1 < x_2$ rezultă că $f(x_1) < f(x_2)$, funcția $f(x)$ se numește *crescătoare* în acest interval. Dacă din inegalitatea $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) > f(x_2)$, funcția se numește *descrescătoare*.

Funcția se numește *monotonă* într-un interval dacă ea crește *(funcție monoton crescătoare)* sau scade *(funcție monoton descrescătoare)* în acest interval.

Pentru ca funcția $f(x)$ să crească sau să descrească într-un anumit interval, este suficient ca în toate punctele acestui interval $f'(x) > 0$ [respectiv $f'(x) < 0$].

Maxim și minim. Numărul x_0, care se reprezintă printr-un punct pe axa Ox, se numește *punct de maxim (punct de minim)* al funcției $f(x)$, dacă există o vecinătate a acestui punct, astfel încît pentru orice punct x al acestei vecinătăți ($x \neq x_0$) să aibă loc inegalitatea $f(x_0) > f(x)$ [respectiv $f(x_0) < f(x)$].

Valoarea funcției în punctul de maxim (minim) se numește *maximul (minimul)* funcției.

Denumirea comună pentru maxim și minim este *extrem*.

În punctul de extrem derivata $f'(x)$ a unei funcții date sau este nulă (fig. 1.84 *a*), sau nu există (fig. 1.84, *b*) *(condiția necesară a extremului)*. Dacă x_0 este rădăcina ecuației $f'(x) = 0$ [sau dacă $f'(x_0)$ nu există] și există o vecinătate a punctului x_0 astfel încît în toate punctele acestei vecinătăți la stînga lui x_0 derivata lui $f'(x)$ să aibă un semn, iar în toate punctele de la dreapta lui x_0 să aibă semnul opus, punctul x_0 este un punct de extrem *(condiție suficientă)*. Variația semnului (de la stînga la dreapta) de la + la — corespunde unui punct de maxim, iar de la — la + corespunde unui punct de minim.

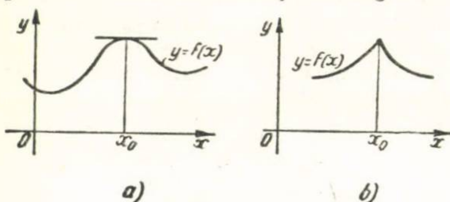


Fig. 1.84.

O altă condiție suficientă: dacă $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) < 0$, atunci x_0 este un punct de maxim; dacă $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) > 0$, atunci x_0 este un punct de minim.

§ 1.9. Funcții de mai multe variabile

Noțiuni fundamentale. O funcție de variabilele $x, y, z, \ldots$, este o mărime u [notația: $u = f(x, y, z, \ldots)$] care ia o anumită valoare, cînd sînt date valori argumentelor independente unul de altul $x, y, z, \ldots$ Ansamblul acestor valori ale argumentelor definesc *domeniul de definiție al funcției*.

Dacă funcţia depinde de două argumente: $z = f(x, y)$, atunci ea poate fi interpretată geometric cu ajutorul unei suprafeţe, a cărei ecuaţie este $z = f(x, y)$ (p. 86). Orice pereche de valori ale argumentelor (x, y) poate fi reprezentată cu ajutorul punctului $M(x, y)$ din planul xOy, iar funcţia de două variabile poate fi considerată ca o *funcţie de punct* în planul xOy: $z = f(M)$; domeniul de definiţie al acestei funcţii este un anumit domeniu din planul xOy.

Exemplu. Domeniul de definiţie al funcţiei $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ este cercul $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Ca vecinătate a punctului (x_0, y_0) se ia fie dreptunghiul cu centrul în acest punct şi cu laturile paralele cu axele de coordonate (adică ansamblul de valori ale lui x şi y care satisfac inegalităţile $|x - x_0| \leqslant h$, $|y - y_0| \leqslant k$, unde $2h$ şi $2k$ sînt lungimile laturilor dreptunghiului), fie cercul cu centrul în punctul dat $[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant \rho^2$, unde ρ este raza cercului].

Numărul c se numeşte *limita funcţiei* $f(x, y)$, cînd x tinde către a şi y tinde către b, dacă unui număr pozitiv δ, oricît de mic, i se pot asocia două numere pozitive suficient de mici, h şi k, astfel încît pentru toate valorile x şi y $(x \neq a,\ y \neq b)$, care satisfac condiţiile $|x - a| < h$ şi $|y - b| < k$, să aibă loc inegalitatea $|f(x, y) - c| < \delta$.

Notaţia: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = c$.

În mod asemănător se defineşte noţiunea de limită pentru funcţia de un număr oarecare de argumente.

Semnificaţia simbolurilor: $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to b}} f(x, y) = c$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to b}} f(x, y) = \infty$ etc. este identică cu semnificaţia simbolurilor respective pentru funcţia de un singur argument (p. 95).

Funcţia $f(x, y)$ se numeşte *continuă în punctul* (x_0, y_0), dacă $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

O funcţie continuă în toate punctele unui anumit domeniu se numeşte *continuă în acel domeniu.*

Derivate şi diferenţiale. Se numeşte *derivată parţială* în raport cu argumentul x a funcţiei $u = f(x, y, z, \ldots)$ derivata acestei funcţii calculată în ipoteza că toate argumentele, în afară de x, sînt constante:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\Delta x}.$$

Notaţiile derivatei parţiale în raport cu x: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x, $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z, \ldots)$.

În mod analog se definesc şi se notează derivatele parţiale în raport cu alte argumente.

Pentru funcția $z = f(x, y)$ derivata parțială $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, unde α este unghiul dintre tangenta în punctul dat al suprafeței $z = f(x, y)$ la secțiunea suprafeței cu planul paralel cu planul xOz și direcția pozitivă a axei Ox (fig. 1.85); în mod analog $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$.

Derivatele parțiale de ordine superioare se definesc și se notează astfel: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$ etc. În cazul

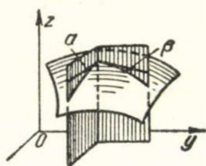


Fig. 1.85.

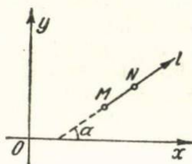


Fig. 1.86.

cînd derivatele parțiale, care trebuie calculate, sînt continue, rezultatul derivării de un număr de ori nu depinde de ordinea de derivare; astfel, de exemplu, $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Derivata după o anumită direcție. *Derivata unei funcții* $f(x, y)$ *în punctul* $M(x, y)$ *după direcția* l $\left(\text{notația: } \frac{\partial f}{\partial l}\right)$ se numește limita $\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{N \to M} \frac{f(N) - f(M)}{MN}$ (fig. 1.86).

Dacă α este unghiul dintre direcția l și direcția pozitivă a axei Ox, atunci $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha$.

În mod analog se definește derivata funcției $f(x, y, z)$ după o anumită direcție l în spațiu. Dacă α, β, γ sînt unghiurile formate de direcția l cu direcțiile pozitive ale axelor de coordonate respective, avem $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$.

Diferențiala. *Diferențiala totală* a funcției $z = f(x, y, \ldots)$ care are derivatele parțiale continue $f'_x(x, y, \ldots)$, $f'_y(x, y, \ldots)$, se numește expresia $dz = f'_x(x, y, \ldots)\, \Delta x + f'_y(x, y, \ldots)\, \Delta y + \ldots$, în care Δx, Δy, ... sînt creșterile argumentelor.

Diferențialele argumentelor sînt egale cu creșterile lor $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, ... și de aceea putem scrie: $dz = f'_x\, dx + f'_y\, dy + \ldots$ Formula aceasta este invariantă, adică își păstrează forma și în cazul cînd x, y, ... nu sînt argumente, ci la rîndul lor depind de variabilele u, v.

Expresiile $f'_x\,\mathrm{d}x$, $f'_y\,\mathrm{d}y$, ... se numesc *diferenţiale parţiale*: $\mathrm{d}_x z = f'_x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}_y z = f'_y\,\mathrm{d}y$, ...

Diferenţiala totală a funcţiei, $\mathrm{d}z$, diferă de *creşterea totală* $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y \ldots) - f(x, y, \ldots)$ printr-un infinit mic de ordin superior în raport cu $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \ldots}$

Pentru ca expresia $M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y$, unde funcţiile $M(x, y)$, $N(x, y)$ sînt continue împreună cu derivatele lor parţiale de ordinul întîi $\frac{\partial M}{\partial y}$ şi $\frac{\partial N}{\partial x}$, să fie diferenţiala totală a unei funcţii oarecare de două variabile x şi y este necesar şi suficient să fie satisfăcută identitatea $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$. În mod analog, expresia $P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ este diferenţiala totală a unei funcţii de trei variabile x, y, z dacă $\frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}$; $\frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$.

Geometric, diferenţiala totală $\mathrm{d}z$ a unei funcţii de două variabile se reprezintă cu ajutorul creşterii cotei planului tangent, în punctul dat, la suprafaţa $z = f(x, y)$, corespunzătoare creşterilor $\mathrm{d}x$ şi $\mathrm{d}y$ ale argumentelor (fig. 1.87).

Formulele pentru *diferenţialele totale de ordine superioare* ale unei funcţii de două variabile:

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^2 z; \ldots;$$

$$\mathrm{d}^n z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n z$$

sînt valabile dacă x şi y sînt argumente sau dacă x şi y depind de argumentele $u, v, \ldots$, liniar.

Derivarea funcţiilor compuse şi implicite. Dacă $z = f(x, y, \ldots)$ şi $x = \varphi_1(u, v, \ldots)$; $y = \varphi_2(u, v, \ldots)$, ... atunci

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \ldots;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \ldots$$

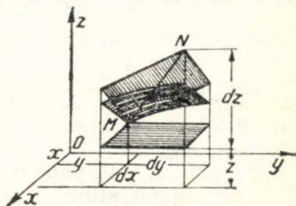


Fig. 1.87.

În particular, dacă $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t) \ldots$, atunci

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \ldots$$

Dacă egalitatea $f(x, y, z, ...) = 0$ determină pe z implicit ca funcție de argumentele $x, y, ...,$ atunci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z}; \ ...$$

Extrem. Punctul (x_0, y_0) se numește *punct de extrem* al funcției $f(x, y)$, dacă există o vecinătate, astfel încît pentru toate punctele (x,y), ale acestei vecinătăți să aibă loc una din inegalitățile $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (în cazul maximului) sau $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ (în cazul minimului). Din punct de vedere geometric, aceasta înseamnă că în punctul de maxim (minim) $A(x_0, y_0)$ cota suprafeței, AP, este mai mare (respectiv mai mică) decît cota oricărui alt punct al unei anumite vecinătăți a punctului A (fig. 1.88).

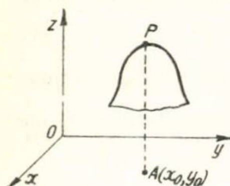


Fig. 1.88.

În mod asemănător se definește extremul pentru funcția $f(x, y,...)$ de un număr oarecare de argumente.

În punctul extrem derivatele parțiale ale funcției, în raport cu toate argumentele, sînt egale cu zero (dacă aceste derivate există):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ ...$$

(condiția necesară de extrem).

În cazul unei funcții $f(x, y)$ care depinde de două argumente, modul de determinare a punctelor de extrem este următorul. Dacă (x_0, y_0) este una din soluțiile sistemului de ecuații

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

numerele A, B, C egale cu

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \, \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

iar discriminantul $\Delta = AC - B^2$ este pozitiv, atunci (x_0, y_0) este un punct de maxim pentru $A < 0$ și un punct de minim pentru $A > 0$.

În cazul $\Delta < 0$, punctul (x_0, y_0) nu este un punct de extrem. Cazul $\Delta = 0$ cere un studiu mai detaliat.

Pentru găsirea extremului unei funcții de n variabile $f(x, y, z, ...)$ în cazurile cînd argumentele $x, y, z, ...$ sînt legate între ele cu ajutorul a k condiții $(k < n)$:

$$\varphi_1(x, y, z, ...) = 0; \quad \varphi_2(x, y, z...) = 0; \quad \varphi_k(x, y, z, ...) = 0$$

(extrem condiționat), trebuie să introducem funcția auxiliară

$$F(x, y, z, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z, \ldots) + \\ + \lambda_2\varphi_2(x, y, z, \ldots) + \ldots + \lambda_k\varphi_k(x, y, z, \ldots)$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sînt constante, așa-numiții *multiplicatori ai lui Lagrange*).

Sistemul de $n + k$ ecuații cu $n + k$ necunoscute ($x, y, z, \ldots; \lambda_1 \lambda_2, \ldots, \lambda_k$):

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_k = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots,$$

dă *condițiile necesare* (dar nu suficiente) *ale extremului condiționat.*

1.5
Calculul integral

§ 1.10. Integrala nedefinită

Definiții. Funcția $F(x)$ se numește *primitivă* pentru funcția $f(x)$, dacă $F'(x) = f(x)$. Dacă $F_1(x)$ și $F_2(x)$ sînt primitive pentru una și aceeași funcție $f(x)$, atunci diferența $F_1(x) - F_2(x)$ este o constantă. Ansamblul tuturor primitivelor unei anumite funcții $f(x)$ se numește *integrala nedefinită* a acestei funcții și se notează cu $\int f(x)\,dx$. Aici $f(x)$ este *funcția de integrat*, $f(x)dx$ — *integrandul* iar x *variabila de integrare*.

Astfel,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

unde $F(x)$ este una dintre primitivele funcției $f(x)$, iar C, o *constantă arbitrară (constantă de integrare)*.

Integrala nedefinită este legată de integrala definită (v. p. 125) prin egalitatea

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C,$$

unde C este o constantă arbitrară (și a este arbitrar).

Integrarea funcțiilor elementare nu duce totdeauna la funcții elementare. În astfel de cazuri integrala formează o nouă funcție,

neelementară, care poate fi calculată cu precizie suficientă şi care capătă uneori o denumire specială. Astfel de integrale sînt, de exemplu

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \text{li}\, x \quad \textit{(logaritm integral)}$$

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx = \text{si}\, x \quad \textit{(sinus integral)}$$

$$\int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = F(k, \varphi) \quad \textit{(integrală eliptică de speța întîi)}$$

Regulile de integrare a funcțiilor

1) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx$ (regula de integrare a sumei);

2) $\int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$ (regula de scoatere de sub semnul integralei a unui factor constant a);

3) $\int u(x)\, dv(x) = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, du(x)$ (regula de *integrare prin părți);*

4) dacă $x = \varphi(t)$, atunci $\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt$ *(regula de înlocuire a variabilei sau regula substituției).*

Tabela integralelor fundamentale)*:

1) $\int dx = x$ 2) $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x$ **); 4) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$;

5) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a} \operatorname{arg\,th} \dfrac{x}{a}, & \text{dacă } |x| < a \\ -\dfrac{1}{a} \operatorname{arg\,coth} \dfrac{x}{a}, & \text{dacă } |x| > a; \end{cases}$$

6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a}$;

---

*) Constantele arbitrare din această tabelă şi din următoarele nu sînt trecute.

**) Aici şi în celelalte formule care conțin în dreapta expresii logaritmice, în loc de $\ln f(x)$ trebuie înțeles $\ln |f(x)|$; semnul valorii absolute nu este trecut.

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a}) = \begin{cases} \text{arg sh} \frac{x}{\sqrt{a}}, & \text{dacă } a > 0 \\ \text{arg ch} \frac{x}{\sqrt{-a}}, & \text{dacă } a < 0; \end{cases}$

8) $\int e^x \, dx = e^x$; 9) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}$;

10) $\int \sin x \, dx = -\cos x$; 11) $\int \cos x \, dx = \sin x$;

12) $\int \text{tg}\, x \, dx = -\ln \cos x$; 13) $\int \text{cotg}\, x \, dx = \ln \sin x$;

14) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \text{tg} \frac{x}{2}$; 15) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

16) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg}\, x$; 17) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\, x$;

18) $\int \text{sh}\, x \, dx = \text{ch}\, x$; 19) $\int \text{ch}\, x \, dx = \text{sh}\, x$;

20) $\int \text{th}\, x \, dx = \ln \text{ch}\, x$; 21) $\int \text{coth}\, x \, dx = \ln \text{sh}\, x$;

22) $\int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\text{coth}\, x$; 23) $\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th}\, x$.

Integrarea funcţiilor raţionale:

1) $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{(n+1)\,a} (ax+b)^{n+1}$ $(n \neq -1)$;

2) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$;

3) $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{(n-1)\,a(ax+b)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$;

4) $\int \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{arctg} \sqrt{\frac{a}{b}}\, x$ $(ab > 0)$;

5) $\int \frac{dx}{ax^2-b} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{ab}-ax}{\sqrt{ab}+ax}$ $(ab > 0)$;

6) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \frac{x+b}{x+a}$ $(a \neq b)$;

7) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}} =$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}, \text{ dacă } 4ac - b^2 > 0; \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \text{ dacă } 4ac - b^2 < 0; \\ -\frac{2}{2ax + b}, \text{ dacă } 4ac - b^2 = 0; \end{cases}$$

8) $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{M}{2a} \ln (ax^2 + bx + c) +$

$+ \frac{2aN - Mb}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c};$

9)*) $\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{2ax + b}{(n - 1)(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} +$

$+ \frac{2(2n - 3)a}{(n - 1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$

Se poate, de asemenea, prin substituţia $x + \frac{b}{2a} =$ $= \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \operatorname{tg} t (4ac - b^2 > 0)$ reduce la forma $\int \cos^{2(n-1)} t \, dt$ (p. 119-120);

10) $\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = -\frac{M}{2(n - 1) a (ax^2 + bx + c)^{n-1}} +$

$+ \frac{2aN - bM}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (n \neq 1).$

Integrarea fracţiilor raţionale în cazul general. Fracţia raţională neregulată $\frac{P(x)}{Q(x)}$ poate fi reprezentată sub forma sumei unui polinom $P_0(x)$ şi a fracţiei raţionale regulate $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ (v. p. 26). Prin urmare

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_0(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx.$$

*) Pentru calcularea integralei, se utilizează această formulă de $n - 1$ ori *(formulă de recurenţă)*.

O fracţie raţională regulată $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ poate fi descompusă într-o sumă de fracţii simple (v. p. 27) care se integrează după formulele (2), (3), (7), (8,), (9), (10) de la pag. 110-111.

Integrarea expresiilor algebrice iraţionale

1) $\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}(\sqrt{ax+b})^3$;

2) $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n}{(n+1)a}(\sqrt[n]{ax+b})^{n+1}$;

3) $\int (\sqrt[n]{ax+b})^m\,dx = \frac{n}{(n+m)a}(\sqrt[n]{ax+b})^{n+m}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n}{(n-1)a}(\sqrt[n]{ax+b})^{n-1}$;

6) $\int \frac{dx}{(\sqrt[n]{ax+b})^m} = \frac{n}{(n-m)a}(\sqrt[n]{ax+b})^{n-m}$;

7) $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{3a^2}(3Na - 2Mb + Max)\sqrt{ax+b}$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c})$,

dacă $a > 0$;

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\arg\operatorname{sh}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$,

dacă $a > 0$ şi $4ac - b^2 > 0$;

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\arg\operatorname{ch}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$,

dacă $a>0$ şi $4ac - b^2 < 0$;

$= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$,

dacă $a < 0$;

9) $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$

$= \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

10) $$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}{na} -$$

$$-\frac{(n-1)c}{na}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{(2n-1)b}{2na}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

11) $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arg\,sh}\frac{x}{a};$$

12) $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{arg\,ch}\frac{x}{a};$$

13) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a};$$

14) $$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\left(x^2\pm a^2\right)^{\frac{3}{2}};$$

15) $$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}};$$

16) $$\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3} -$$

$$-\frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{x}{4}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3} - \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{x^2\pm a^2} + a^2\operatorname{arg\,sh}\frac{x}{a}\right);$$

17) $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} +$$

$$+\frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right);$$

18) $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x};$$

19) $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x};$$

20) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \mathrm{d}x = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$;

21) $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, \mathrm{d}x = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} +$

$+ \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$;

se poate, de asemenea, punînd $x + b/2a = t$, să se aducă la una din formele (11), (12) sau (13).

22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ se reduce la forma (10) prin substituția $x - \alpha = 1/z$;

23) $\int R\left\{x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right\} \mathrm{d}x$, sau în cazul particular ($c = 0$; $d = 1$):

$$\int R\left\{x(ax + b)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, (ax + b)^{\frac{m_p}{n_p}}\right\} \mathrm{d}x,$$

unde R este o funcție rațională de argumentele care apar în interiorul parantezei cu acolade, iar $m_1, m_2, \dots, m_p, n_1, n_2, \dots, n_p$ sînt numere întregi, se reduce la integrala unei fracții raționale prin substituția $\frac{ax + b}{cx + d} = t^N$ (în cazul particular indicat $ax + b = t^N$), unde N este cel mai mic multiplu comun al numerelor $n_1, n_2, \dots, n_p$.

Exemplul 1. $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Punînd $\frac{1 - x}{1 + x} = t^2$, rezultă:

$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ și $\mathrm{d}x = \frac{-4t\, \mathrm{d}t}{(1 + t^2)^2}$, de unde $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{-4t^2\, \mathrm{d}t}{(1 - t^2)(1 + t^2)}$.

Dezvoltînd expresia de sub integrală într-o sumă de fracții simple, se obține:

$$-\frac{4t^2}{(1 + t)(1 - t)(1 + t^2)} = -\frac{1}{1 + t} - \frac{1}{1 - t} + \frac{2}{1 + t^2},$$ și mai departe,

$$\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 2 \operatorname{arctg} t - \ln(1 + t) + \ln(1 - t) + c =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \ln \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} + c.$$

Exemplul 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$. Punînd $1+x=t^6$, rezultă $dx=6t^5\,dt$; prin urmare

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1} = 2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+C=$$
$$=2\sqrt{1+x}-3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}-6\ln\left(\sqrt[6]{1+x}+1\right)+C.$$

24) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, unde R este o funcţie raţională de x şi de $\sqrt{ax^2+bx+c}$, se reduce la integrala unei fracţii raţionale prin una din următoarele trei substituţii *(substituţiile lui Euler)*:

a) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$ $\quad(a>0)$,

b) $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$ $\quad(c>0)$,

c) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$ $\quad(4ac-b^2<0)$,

unde α este una dintre rădăcinile trinomului ax^2+bx+c.

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ poate fi redusă, de asemenea, la forma $\int R_1(\sin t, \cos t)dt$
(p. 120) cu ajutorul *substituţiilor trigonometrice*:

$$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sin t\\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cos t\end{cases} \quad (a<0,\ 4ac-b^2<0);$$

$$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sec t\\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{cosec} t\end{cases} \quad (a>0,\ 4ac-b^2<0);$$

$$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{tg} t\\ \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{cotg} t;\end{cases} \quad (a> \quad 4ac-b^2>0);$$

25) $\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$ (integrala unei *diferenţiale binomiale*) se exprimă prin funcţii elementare numai atunci cînd este satisfăcută cel puţin una din următoarele condiţii *(condiţiile lui Cebîşev de integrabilitate a diferenţialei binomiale)*:

a) p întreg; b) $\frac{m+1}{n}$ întreg; c) $\frac{m+1}{n}+p$ întreg.

În primul caz, dacă $p>0$, se obţine suma integralelor de puteri; dacă, însă, $p<0$, atunci substituţia $x = z^N$, unde N este numitorul comun al numerelor fracţionare m şi n, duce la integrala unei funcţii raţionale.

În al doilea caz se scrie $ax^n + b = z^s$, unde s este numitorul fracţiei $p = r/s$.

În cazul al treilea se foloseşte substituţia $ax^n + b = z^s x^n$.

Exemplul 1. $\int x^{1/3} (1 + 3x^{2/3})^{1/3}\, dx$. Aici $\frac{m+1}{n} = 2$, şi prin urmare, $1 + 3x^{2/3} = z^3$, de unde

$$x = \frac{(z^3-1)^{3/2}}{3\sqrt{3}}, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}(z^3-1)^{1/2} z^2\, dz$$

şi

$$\int x^{1/3}(1 + 3x^{2/3})^{1/3}\, dx = \frac{1}{2}\int z^3(z^3-1)\, dz = \frac{z^7}{14} - \frac{z^4}{8} + C =$$

$$= \frac{(1+3x^{2/3})^{7/3}}{14} - \frac{(1+3x^{2/3})^{4/3}}{8} + C.$$

Exemplul 2. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$. Aici $\frac{m+1}{n} + p = -3$; punînd $1 + x^4 = z^2x^4$, rezultă $x = \frac{1}{(z^2-1)^{1/4}}$, $dx = -\frac{z\, dz}{2(z^2-1)^{5/4}}$ şi

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{2}\int (z^2-1)^2\, dz = -\frac{z^5}{10} + \frac{z^3}{3} - \frac{z}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}} + C.$$

Integrarea funcţiilor trigonometrice (m, n, p, q sînt numere pozitive întregi)

1) $\int \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x$;

2) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x$;

3) $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x$;

4) $\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} \quad (m \neq n)$;

5) $\int \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \qquad (m \neq n);$

6) $\int \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \qquad (m \neq n);$

7) $\int \sin(mx+\alpha)\sin(mx+\beta)\,\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{2m}\left[\cos(\beta-\alpha)\,mx - \sin(mx+\alpha)\cos(mx+\beta)\right];$

8) $\int \cos(mx+\alpha)\cos(mx+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2m}\left[\cos(\beta-\alpha)\,mx + \right.$

$\left. + \sin(mx+\alpha)\cos(mx+\beta)\right];$

9) $\int \sin(mx+\alpha)\cos(mx+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2m}\left[\sin(\alpha-\beta)\,mx + \right.$

$\left. + \sin(mx+\alpha)\sin(mx+\beta)\right];$

10) $\int \sin(mx+\alpha)\sin(nx+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(m-n)}\sin[(m-n)x+\alpha-\beta] -$

$- \frac{1}{2(m+n)}\sin[(m+n)\,x+\alpha+\beta)];$

11) $\int \cos(mx+\alpha)\cos(nx+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(m+n)}\sin[(m+n)\,x+\alpha+\beta] +$

$+ \frac{1}{2\,(m-n)}\sin[(m-n)\,x+\alpha-\beta];$

12) $\int \sin(mx+\alpha)\cos(nx+\beta)\,\mathrm{d}x = - \frac{1}{2(m+n)}\cos[(m+n)\,x+\alpha+\beta] -$

$- \frac{1}{2(m-n)}\cos[(m-n)x+\alpha-\beta];$

13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = -\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$

15) $\int \frac{dx}{a + b\cos x} =$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \text{ (dacă } a^2 > b^2\text{)}, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x} = \\ = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arg\,th}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \text{ (dacă } a^2 < b^2\text{)}; \end{cases}$$

16) $\int \frac{\cos x \, dx}{a + b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a + b\cos x};$

17) $\int \frac{\sin x \, dx}{a + b\cos x} = -\frac{1}{b}\ln(a + b\cos x);$

18) $\int \sin^n x \, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \, dx;$

19) $\int \cos^n x \, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \, dx;$

20) $\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx;$

21) $\int \operatorname{cotg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x \, dx;$

22) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x};$

23) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x};$

24) $\int \sin^p x \cos^q x \, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} +$

$+ \frac{q-1}{p+q}\int \sin^p x \cos^{q-2} x \, dx = -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} +$

$+ \frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2} x \cos^q x \, dx;$

25) $\int \sin^{-p} x \cos^q x \, dx = -\frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} +$

$+ \frac{p-q-2}{p-1}\int \sin^{-p+2} x \cos^q x \, dx;$

26) $\int \sin^p x \cos^{-q} x \, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+1} x}{q-1} +$

$+ \frac{q-p-2}{q-1} \int \sin^p x \cos^{-q+2} x \, dx;$

27) $\int \sin^r x \cos^s x \, dx$ se reduce la o sumă de integrale de puteri prin substituția $\sin x = z$, dacă $s > 0$ și impar, și $\cos x = z$, dacă $r > 0$ și impar.

Exemplu. $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt{\cos x}} = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x \, dx}{\sqrt{\cos x}} =$

$= - \int \frac{1 - z^2}{\sqrt{z}} dz = - 2z^{1/2} + \frac{2}{5} z^{5/2} + C = - 2 \cos^{1/2} x +$

$+ \frac{2}{5} \cos^{5/2} x + C.$

În particular, în locul formulelor (18), (19), (20), (21), (24), (25), (26), dacă n, p sau q sînt impare, este mai bine să folosim substituția indicată.

În cazul cînd ambele numere r și s sînt pare și pozitive putem micșora puterea, folosind identitatea:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}.$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

28) $\int \mathrm{tg}^r x \sec^n x \, dx$, $\int \mathrm{cotg}^r x \sec^n x \, dx$, $\int \mathrm{tg}^r x \, \mathrm{cosec}^n x \, dx$,

$\int \mathrm{cotg}^r x \, \mathrm{cosec}^n \, dx$,

unde $n > 0$ și par, iar r este arbitrar, se reduc la o sumă de integrale de puteri: primele două prin substituția $\mathrm{tg}\, x = z$, următoarele două prin substituția $\mathrm{cotg}\, x = z$ (trebuie să ținem seama de identitatea: $\sec^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x$, $\mathrm{cosec}^2 x = 1 + \mathrm{cotg}^2 x$).

În particular, pe această cale este indicat să se calculeze integralele (22) și (23) în cazul cînd n este par.

Exemplu. $\int \sqrt{\mathrm{cotg}\, x} \sec^4 x \, dx = \int \frac{1 + \mathrm{tg}^2 x}{\sqrt{\mathrm{tg}\, x}} \sec^2 x \, dx =$

$= \int \frac{1 + z^2}{\sqrt{z}} dz = 2z^{1/2} + \frac{2}{5} z^{5/2} + C = 2\mathrm{tg}^{1/2} x +$

$+ \frac{2}{5} \mathrm{tg}^{5/2} x + C.$

29) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, unde funcția de sub integrală, R, este rațională în raport cu $\sin x$ și $\cos x$, se reduce la integrala unei fracții raționale prin substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$; avem

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Integrarea funcțiilor hiperbolice:

1) $\int \operatorname{sh}^2 x\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \frac{1}{2} x;$

2) $\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \frac{1}{2} x;$

3) $\int \operatorname{sh}^n x\, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sh}^{n-2} x\, dx \quad (n > 0);$

4) $\int \operatorname{ch}^n x\, dx = \frac{1}{n} \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{ch}^{n-2} x\, dx \quad (n > 0);$

5) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \operatorname{th} \frac{x}{2};$ 6) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\operatorname{arctg} e^x;$

7) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^n x} = \frac{1}{1-n} \operatorname{sh}^{1-n} x \operatorname{ch} x - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{n-2} x} \quad (n > 1);$

8) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x} = \frac{1}{n-1} \operatorname{ch}^{1-n} x \operatorname{sh} x + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-2} x} \quad (n > 1);$

9) $\int \operatorname{th}^2 x\, dx = x - \operatorname{th} x;$

10) $\int \operatorname{coth}^2 x\, dx = x - \operatorname{coth} x;$

11) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\, dx = \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{sh}(a+b)x -$

$- \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{sh}(a-b)x \quad (a^2 \neq b^2);$

12) $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\, dx = \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{sh}(a+b)x +$

$+ \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{sh}(a-b)x \quad (a^2 \neq b^2);$

13) $\int \text{sh}\, ax\, \text{ch}\, bx\, dx = \frac{1}{2(a+b)}\, \text{ch}\, (a+b)\, x +$

$+ \frac{1}{2(a-b)}\, \text{ch}\, (a-b)\, x \qquad (a^2 \neq b^2).$

Integrarea altor funcții transcendente:

1) $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

2) $\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$;

3) $\int \text{arctg}\, x\, dx = x\, \text{arctg}\, x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2)$;

4) $\int \text{arccotg}\, x\, dx = x\, \text{arccotg}\, x + \frac{1}{2} \ln (1+x^2)$;

5) $\int x \arcsin x\, dx = \frac{1}{4} \left[(2x^2-1) \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]$;

6) $\int x \arccos x\, dx = \frac{1}{4} \left[(2x^2-1) \arccos x - x\sqrt{1-x^2}\right]$;

7) $\int x\, \text{arctg}\, x\, dx = \frac{1}{2} \left[(x^2+1)\, \text{arctg}\, x - x\right]$;

8) $\int x\, \text{arccotg}\, x\, dx = \frac{1}{2} \left[(x^2+1)\, \text{arccotg}\, x + x\right]$;

9) $\int x^n \arcsin x\, dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \arcsin x - \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

10) $\int x^n \arccos x\, dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \arccos x + \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

11) $\int x^n\, \text{arctg}\, x\, dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1}\, \text{arctg}\, x - \int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2}\right)$;

12) $\int x^n\, \text{arcotg}\, x\, dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1}\, \text{arccotg}\, x + \int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2}\right)$;

13) $\int \text{arg sh}\, x\, dx = x\, \text{arg sh}\, x - \sqrt{1+x^2}$;

14) $\int \text{arg ch}\, x\, dx = x\, \text{arg ch}\, x - \sqrt{x^2-1}$;

15) $\int \arg \text{th}\, x\, dx = x \arg \text{th}\, x + \frac{1}{2} \ln (1 - x^2)$;

16) $\int x \arg \text{sh}\, x\, dx = \frac{1}{4} \left[(2x^2 + 1) \arg \text{sh}\, x - x\sqrt{1 + x^2}\right]$;

17) $\int x \arg \text{ch}\, x\, dx = \frac{1}{4} \left[(2x^2 - 1) \arg \text{ch}\, x - x\sqrt{x^2 - 1}\right]$;

18) $\int \ln x\, dx = x \ln x - x$;

19) $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$;

20) $\int x^n \ln x\, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$;

21) $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$;

22) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x$;

23) $\int \sin \ln x\, dx = \frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x)$;

24) $\int \cos \ln x\, dx = \frac{x}{2} (\sin \ln x + \cos \ln x)$;

25) $\int x \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} x \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax$;

26) $\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a} x \sin ax - \frac{1}{a^2} \cos ax$;

27) $\int x^n \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax\, dx$;

28) $\int x^n \cos ax\, dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax\, dx$;

29) $\int x\, \text{sh}\, ax\, dx = \frac{1}{a} x\, \text{ch}\, ax - \frac{1}{a^2} \text{sh}\, ax$;

30) $\int x\, \text{ch}\, ax\, dx = \frac{1}{a} x\, \text{sh}\, ax - \frac{1}{a^2} \text{ch}\, ax$;

31) $\int x^n\, \text{sh}\, ax\, dx = \frac{1}{a} x^n\, \text{ch}\, ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1}\, \text{ch}\, ax\, dx$;

32) $\int x^n\, \text{ch}\, ax\, dx = \frac{1}{a} x^n\, \text{sh}\, ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1}\, \text{sh}\, ax\, dx$;

33) $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$;

34) $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$;

35) $\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}$;

36) $\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab}\ln(b+ce^{ax})$;

37) $\int \frac{e^{ax}\,dx}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ac}\ln(b+ce^{ax})$;

38) $$\int \frac{dx}{be^{ax}+ce^{-ax}} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{bc}}\operatorname{arctg}\left(e^{ax}\sqrt{\frac{b}{c}}\right) & (bc>0); \\ \frac{1}{2a\sqrt{-bc}}\ln\frac{c+e^{ax}\sqrt{-bc}}{c-e^{ax}\sqrt{-bc}}; & (bc<0); \end{cases}$$

39) $\int \frac{xe^{ax}\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}$;

40) $\int e^{ax}\sin(\omega x+\varphi)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+\omega^2}[a\sin(\omega x+\varphi) -$
$- \omega\cos(\omega x+\varphi)]$;

41) $\int e^{ax}\cos(\omega x+\varphi)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+\omega^2}[a\cos(\omega x+\varphi) +$
$+ \omega\sin(\omega x+\varphi)]$;

42) $\int xe^{ax}\sin(\omega x+\varphi)\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+\omega^2}[a\sin(\omega x+\varphi) -$
$- \omega\cos(\omega x+\varphi) -$
$- \frac{e^{ax}}{(a^2+\omega^2)^2}[(a^2-\omega^2)\sin(\omega x+\varphi) - 2a\omega\cos(\omega x+\varphi)]$;

43) $\int xe^{ax}\cos(\omega x+\varphi)\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+\omega^2}[a\cos(\omega x+\varphi) +$
$+ \omega\sin(\omega x+\varphi)] - \frac{e^{ax}}{(a^2+\omega^2)^2}[(a^2-\omega^2)\cos(\omega x+\varphi) +$
$+ 2a\omega\sin(\omega x+\varphi)]$;

44) $\int \operatorname{sh} ax \sin bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx)$;

45) $\int \operatorname{ch} ax \cos bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sh} ax \cos bx + b \operatorname{ch} ax \sin bx)$;

46) $\int \operatorname{sh} ax \cos bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{ch} ax \cos bx + b \operatorname{sh} ax \sin bx)$;

47) $\int \operatorname{ch} ax \sin bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sh} ax \sin bx - b \operatorname{ch} ax \cos bx)$.

§ 1.11. Integrala definită

Definiția și semnificația geometrică. Fie dată o funcție $f(x)$ pe segmentul $[a, b]$. Numerele $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ se aleg astfel, încît

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \text{ dacă } b > a,$$

și

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n = b, \text{ dacă } b < a.$$

În interiorul sau la capetele fiecărui interval elementar $[x_{i-1}, x_i]$, se ia un număr arbitrar ξ_i:

$$x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1, x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2, \ldots, x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant x_n, \text{ dacă } b > a$$

și

$$x_0 \geqslant \xi_1 \geqslant x_1, x_1 \geqslant \xi_2 \geqslant x_2, \ldots, x_{n-1} \geqslant \xi_n \geqslant x_n, \text{ dacă } b < a$$

și se formează suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \, \Delta x_i \text{ (suma integrală)},$$

unde $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

Limita acestei sume, cînd cea mai mare dintre mărimile $|\Delta x_i|$ tinde spre zero (și, prin urmare, $n \to \infty$), se numește *integrala definită* a funcției $f(x)$ între limitele a și b:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \, \Delta x_i.$$

Dacă funcția $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a, b]$, limita din partea dreaptă a acestei egalități există și nu depinde de alegerea numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *(teorema existenței integralei definite)*.

Numele a şi b se numesc *limita inferioară*, respectiv *limita superioară* a integralei, segmentul $[a, b]$ — *segment (interval) de integrare* $f(x)$ — *funcţia de sub integrală*, $f(x)\mathrm{d}x$ — *expresia integrandului*, x — *variabila de integrare*.

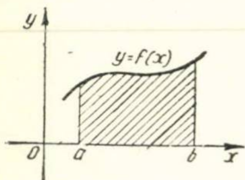


Fig. 1.89.

Mărimea integralei definite nu depinde de variabila de integrare:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Integrala definită cu limite egale este, prin definiţie, egală cu zero:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dacă funcţia $f(x)$ este pozitivă în interiorul segmentului de integrare, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ poate fi exprimată geometric prin aria trapezului curbiliniu format de curba $y = f(x)$, de axa Ox şi de dreptele $x = a$ şi $x = b$ (fig. 1.89).

Proprietăţile integralei definite

1) $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a;$

2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}\,x;$

3) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x;$

4) $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $(k = \text{const});$

5) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$

Teorema mediei. Dacă $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sînt continue pe segmentul $[a, b]$ şi, în afară de aceasta, $\varphi(x)$ nu-şi schimbă semnul pe acest segment, atunci pentru cel puţin un număr ξ din intervalul (a, b) există egalitatea

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

În particular, punînd $\varphi(x) = 1$, avem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b - a)\,f(\xi).$$

Din punct de vedere geometric, în acest caz particular teorema afirmă existenţa unui dreptunghi $AB'C'D$ cu aria egală cu aria trapezului curbiliniu $ABCD$ (fig. 1.90).

Derivata integralei definite în raport cu limita superioară:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x); \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Derivata unei integrale definite în raport cu parametrul:

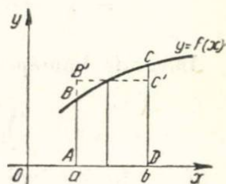


Fig. 1.90.

1) $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x;$$

2) $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x(\alpha)}^{X(\alpha)} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x(\alpha)}^{X(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x + f[X(\alpha), \alpha]\,\frac{\mathrm{d}X(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} - f[x(\alpha), \alpha]\,\frac{\mathrm{d}x(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}.$$

Calculul integralei definite. Dacă $F(x)$ este primitiva funcţiei $f(x)$ [adică $F'(x) = f(x)$], atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$$

(formula lui Newton-Leibniz), unde

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Regula de integrare prin părţi:

$$\int_a^b u(x)\,\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

Exemplu:

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = 1.$$

Regula de substituţie a variabilei: dacă $x = \varphi(t)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, iar funcţia $\varphi(t)$ este monotonă şi continuă pentru $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemplu. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. Punînd $x = \sin t$ ($t = \arcsin x$), obținem

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t \cdot dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Integrale improprii. 1) *Integrale cu limite infinite*:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dacă limita indicată în această definiție a integralei improprii există și este finită, integrala se numește *convergentă*; în caz contrar ea se numește *divergentă*.

În mod analog se definesc integralele de forma

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \text{ și } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Exemplul 1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$; integrală convergentă.

Exemplul 2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$, integrală divergentă.

2) *Integrala unei funcții discontinue.* Dacă funcția $f(x)$ este continuă în intervalul $[a, b]$, iar în punctul $x = b$ devine infinită, prin definiție

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad (\varepsilon > 0).$$

În mod analog se definește integrala improprie, dacă $f(x)$ este continuă în intervalul $[a, b]$, iar în punctul $x = a$ devine infinită. Cazul în care $f(x)$ este discontinuă în punctul $x = c$, aflat în interiorul intervalului de integrare, se reduce la cele precedente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx,$$

unde $\varepsilon_1 > 0$ și $\varepsilon_2 > 0$.

Exemplul 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$, integrală convergentă.

Exemplul 2. $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \ln \varepsilon = \infty$, integrală divergentă.

Aplicații în geometrie și mecanică. *Aria trapezului curbiliniu* format de o curbă cu ecuația $y = f(x)$, y păstrînd semnul constant în interiorul segmentului $[a, b]$, de axa Ox și de dreptele $x = a$ și $x = b$ (v. fig. 1.89), este

$$S = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dacă $f(x)$ își schimbă semnul, formula pentru calculul ariei trebuie aplicată separat pentru fiecare segment în care $f(x)$ își păstrează semnul și trebuie adunate valorile absolute ale mărimilor obținute.

Dacă ecuațiile curbei sînt date sub forma parametrică:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \text{ și } a = \varphi(t_1),\ b = \varphi(t_2),$$

atunci

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt.$$

Pentru o arie mărginită de curba reprezentativă a funcției $x = F(y)$, de axa Oy și de dreptele $y = \alpha$, $y = \beta$ (fig. 1.91 *a*),
$S = \int_\alpha^\beta x\, dy = \int_\alpha^\beta F(y)\, dy.$

Aria unui sector curbiliniu, mărginit de curba $\rho = \rho(\varphi)$ și de razele $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ (fig. 1.91 *b*), este $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\, \alpha\varphi.$

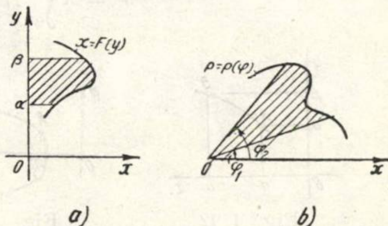


Fig. 1.91.

Lungimea arcului unei curbe plane, dată printr-o ecuație explicită $y = f(x)$ sau $x = F(y)$, sau sub forma parametrică $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$;

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + [F'(y)]^2}\, dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Aici punctul iniţial şi punctul final al arcului sînt respectiv $A(a, \alpha)$, $B(b, \beta)$ (fig. 1.92), iar $t = t_1$, $t = t_2$ sînt valorile parametrului t, corespunzătoare punctelor A şi B.

Dacă ecuaţia curbei este dată în coordonate polare $\rho = \rho(\varphi)$, iar valorile unghiului polar φ în punctul iniţial şi în punctul final al arcului sînt respectiv $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, atunci

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Aria unei suprafeţe de rotaţie cînd axa de rotaţie este axa Ox (fig. 1.93) şi ecuaţia curbei care generează suprafaţa de rotaţie este $y = f(x)$ sau sub forma parametrică $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, devine:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

unde $x = a$, $x = b$ sînt abscisele punctelor iniţial şi final ale arcului. Corespunzător acestor puncte, valorile parametrului t sînt $t = t_1$, respectiv $t = t_2$.

Atunci cînd axa de rotaţie este axa Oy (fig. 1.94) şi ecuaţia curbei care generează suprafaţa de rotaţie este $x = F(y)$, rezultă

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta F(y) \sqrt{1 + [F'(y)]^2}\, dy,$$

unde $y = \alpha$, $y = \beta$ sînt ordonatele punctelor iniţial şi final ale arcului.

Volumul unui corp de rotaţie cînd axa de rotaţie este axa Ox (fig. 1.93):

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx,$$

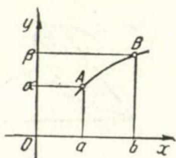


Fig. 1.92.

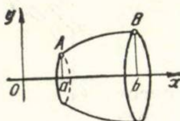


Fig. 1.93.

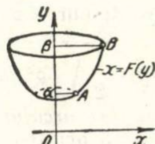


Fig. 1.94.

iar atunci cînd axa de rotaţie este axa Oy (fig. 1.94):

$$V = \pi \int_\alpha^\beta [F(y)]^2\, dy$$

(notaţiile sînt aceleaşi ca şi în formulele pentru calculul ariei suprafeţei de rotaţie).

Volumul unui corp de formă arbitrară. Dacă un corp este mărginit de planele $x = a$ şi $x = b$, perpendiculare pe axa Ox, iar aria secţiunii perpendiculare pe această axă, $S = S(x)$, este dată ca funcţie de x, unde x este distanţa de la planul acestei secţiuni pînă la punctul O (fig. 1.95), volumul corpului se calculează după formula

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

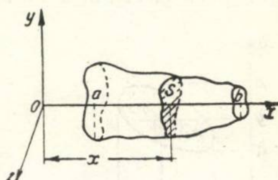


Fig. 1.95.

Spaţiul parcurs de un punct care se mişcă cu viteza $v = v(t)$ în intervalul de timp de la $t = \tau$ pînă la $t = T$ este egal cu

$$S = \int_\tau^T v(t)\,dt.$$

Lucrul mecanic efectuat de forţa variabilă $F(x)$, care îşi deplasează punctul de aplicaţie pe o linie dreaptă din poziţia $x = a$ în poziţia $x=b$ (dacă direcţia forţei coincide cu direcţia axei Ox) este egal cu

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Momentele statice, coordonatele centrului de greutate şi momentele de inerţie.

a) *Arcul unei curbe plane.* Notaţii: ecuaţia curbei $y = y(x)$ sau $x = x(y)$, punctul iniţial al curbei $A(a, \alpha)$, punctul final $B(b, \beta)$ (fig. 1.92).

Momentele statice: în raport cu axa Ox,

$$S_x = \int_a^b y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx = \int_\alpha^\beta y\sqrt{1 + [x'(y)]^2}\,dy;$$

în raport cu axa Oy

$$S_y = \int_a^b x\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx = \int_\alpha^\beta x(y)\sqrt{1 + [x'(y)]^2}\,dy.$$

Coordonatele centrului de greutate:

$$x_c = \frac{S_y}{L}; \quad y_c = \frac{S_x}{L},$$

unde L este lungimea arcului.

Momentele de inerţie: în raport cu axa Ox

$$I_x = \int_a^b [y(x)]^2\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta y^2\sqrt{1 + [x'(y)]^2}\,dy;$$

în raport cu axa Oy

$$I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = \int_\alpha^\beta [x(y)]^2 \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy;$$

în raport cu originea axelor de coordonate,

$$I_o = I_x + I_y =$$

$$= \int_a^b \{x^2 + [y(x)]^2\} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{[x(y)]^2 + y^2\} \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy.$$

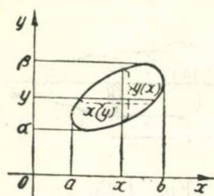


Fig. 1.96.

b) *Aria unei figuri plane.* Notații: $x = a$ și $x = b$ sînt valorile extreme ale lui x; $y = \alpha$ și $y = \beta$ sînt valorile extreme ale lui y, $x(y)$ este lungimea secțiunii paralele cu axa Ox dusă la distanța y de ea; $y(x)$ este lungimea secțiunii paralele cu axa Oy dusă la distanța x de ea (fig. 1.96).

Momentele statice: în raport cu axa Ox

$$S_x = \int_\alpha^\beta y\, x(y)\, dy;$$

în raport cu axa Oy

$$S_y = \int_a^b x\, y(x)\, dx.$$

Coordonatele centrului de greutate

$$x_c = \frac{S_y}{S}\ ; \ \ y_c = \frac{S_x}{S},$$

unde S este aria figurii.

Momentele de inerție: în raport cu axa Ox

$$I_x = \int_\alpha^\beta y^2\, x(y)\, dy;$$

în raport cu axa Oy

$$I_y = \int_a^b x^2\, y(x)\, dy;$$

în raport cu originea axelor de coordonate

$$I_o = I_x + I_y.$$

Prima teoremă a lui Guldin. Dacă arcul de lungime l al unei curbe plane se rotește în jurul unei axe care nu intersectează acest

arc şi care se află în acelaşi plan cu el, aria suprafeţei generate de arc se calculează după formula $S = 2\pi d \cdot l$, unde d este distanţa centrului de greutate al arcului la axa de rotaţie.

A doua teoremă a lui Guldin. Dacă figura plană de arie S se roteşte în jurul unei axe care nu intersectează această figură şi care se află în acelaşi plan cu ea, volumul corpului de rotaţie, format astfel, se calculează după formula $v = 2\pi d \cdot S$, unde d este distanţa centrului de greutate al figurii la axa de rotaţie.

Cîteva integrale definite

1) $$\int_0^\infty \frac{dx}{ax^2 + b} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \quad (a > 0, b > 0);$$

2) $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1 + x^b}\, dx = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}} \quad (0 < a < b);$$

3) $$\int_0^\infty \frac{\sin ax\, dx}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (a > 0);$$

4) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

5) $$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

6) $$\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}};$$

7) $$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}};$$

8) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}$$

$(n > 0$ şi întreg$)$;

9) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \; \frac{\pi}{2}$$

$(n > 0$ şi întreg$)$;

10) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cos^{2m+1} x\, dx = \frac{m!\, n!}{2(m+n+1)!}$$

$(m > 0, n > 0, m$ şi n întregi$)$;

11) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1} x\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{2\,\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

(v. definiţia funcţiei Γ la p. 138);

12) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$; 13) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

14) $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$

($n > 0$ și întreg);

15) $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$;

16) $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$;

17) $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{e^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{a}$ (cînd $a > 0$);

18) $\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{x-1} = \frac{\pi^2}{6}$; 19) $\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{x+1} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Ceîtva funcții neelementare definite prin integrale

1) $\int_0^x \frac{\sin x\,dx}{x} = \text{si}\,x = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$ (*sinus integral*);

2) $-\int_x^\infty \frac{\cos x\,dx}{x} = \text{ci}\,x = C + \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \ldots$ (*consinus integral*), unde $C = 0{,}5772\ldots$ *este constanta lui Euler*, $x > 0$;

3) $\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \text{li}\,x = C + \ln(-\ln x) + \frac{\ln^2 x}{2\cdot 2!} + \frac{\ln^3 x}{3\cdot 3!} + \ldots\ (0<x<1)$ (*logaritm integral*), unde C este constanta lui Euler;

4) $\int_0^x e^{-ax^2}\,dx$ se reduce la *integrala probabilității* (v. tabela la p. 137) prin substituția $x = \frac{t}{\sqrt{2a}}$.

Integrale eliptice: *integrala de speța întîi* (v. tabela la p. 136)

5) $\int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(k,\varphi)$;

integrala de speța a doua (v. tabela la p. 136)

6) $\int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = E(k,\varphi)$.

Integralele lui Euler: integrala de prima speță

7) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = B(\alpha, \beta)$;

integrala de speța a doua (funcția gamma) (v. tabela de mai jos

8) $\int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\,dx = \Gamma(t)$.

Integralele lui Euler de speța întîi și de speța a doua sînt legate prin relația $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Proprietățile fundamentale ale funcției $\Gamma(x)$: $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1) = n!$, dacă $n > 0$ și întreg;

$$\Gamma(-n) = \pm\infty \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Funcția gamma

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581

Integrala probabilității :

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,3108	0,80	0,5763
01	0,0080	41	0,3182	81	0,5821
02	0,0160	42	0,3255	82	0,5878
03	0,0239	43	0,3328	83	0,5935
04	0,0319	44	0,3401	84	0,5991
05	0,0399	45	0,3473	85	0,6047
06	0,0478	46	0,3545	86	0,6102
07	0,0558	47	0,3616	87	0,6157
08	0,0638	48	0,3688	88	0,6211
09	0,0717	49	0,3759	89	0,6265
0,10	0,0797	0,50	0,3829	0,90	0,6319
11	0,0876	51	0,3899	91	0,6372
12	0,0955	52	0,3969	92	0,6424
13	0,1034	53	0,4039	93	0,6476
14	0,1113	54	0,4108	94	0,6528
15	0,1192	55	0,4177	95	0,6579
16	0,1271	56	0,4245	96	0,6629
17	0,1350	57	0,4313	97	0,6680
18	0,1428	58	0,4381	98	0,6729
19	0,1507	59	0,4448	99	0,6778
0,20	0,1585	0,60	0,4515	1,00	0,6827
21	0,1663	61	0,4581	01	0,6875
22	0,1741	62	0,4647	02	0,6923
23	0,1819	63	0,4713	03	0,6970
24	0,1897	64	0,4778	04	0,7017
25	0,1974	65	0,4843	05	0,7063
26	0,2051	66	0,4907	06	0,7109
27	0,2128	67	0,4971	07	0,7154
28	0,2205	68	0,5035	08	0,7199
29	0,2282	69	0,5098	09	0,7243
0,30	0,2358	0,70	0,5161	1,10	0,7287
31	0,2434	71	0,5223	11	0,7330
32	0,2510	72	0,5285	12	0,7373
33	0,2586	73	0,5346	13	0,7415
34	0,2661	74	0,5407	14	0,7457
35	0,2737	75	0,5467	15	0,7499
36	0,2812	76	0,5527	16	0,7540
37	0,2886	77	0,5587	17	0,7580
38	0,2961	78	0,5646	18	0,7620
39	0,3035	79	0,5705	19	0,7660

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t}{2}}\, dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,20	0,7699	1,60	0,8904	2,00	0,9545
21	0,7737	61	0,8926	05	0,9596
22	0,7775	62	0,8948	10	0,9643
23	0,7813	63	0,8969	15	0,9684
24	0,7850	64	0,8990	20	0,9722
25	0,7887	65	0,9011	25	0,9756
26	0,7923	66	0,9031	30	0,9786
27	0,7959	67	0,9051	35	0,9812
28	0,7995	68	0,9070	40	0,9836
29	0,8029	69	0,9090	45	0,9857
1,30	0,8064	1,70	0,9109	2,50	0,9876
31	0,8098	72	0,9146	60	0,9907
32	0,8132	74	0,9181	70	0,9931
33	0,8165	76	0,9216	80	0,9949
34	0,8198	78	0,9249	90	0,9963
35	0,8230				
36	0,8262				
37	0,8293	1,80	0,9281	3,00	0,99730
38	0,8324	82	0,9312	10	0,99806
39	0,8355	84	0,9342	20	0,99863
		86	0,9371	30	0,99903
1,40	0,8385	88	0,9399	40	0,99933
41	0,8415			50	0,99953
42	0,8444	1,90	0,9426	60	0,99968
43	0,8473	92	0,9451	70	0,99978
44	0,8501	94	0,9476	80	0,99986
45	0,8529	96	0,9500	90	0,99990
46	0,8557	98	0,9523		
47	0,8584			4,00	0,99994
48	0,8611				
49	0,8638				
1,50	0,8664				
51	0,8690				
52	0,8715				
53	0,8740				
54	0,8764				
55	0,8789				
56	0,8812				
57	0,8836				
58	0,8859				
59	0,8882				

Integrale eliptice de speța întîi: $F(k, \varphi)$, $k = \sin \alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	1,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3015	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

Integrale eliptice de speța a doua: $E(k,\varphi)$, $k = \sin \alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

§ 1.12. Integrale multiple

Definiţii. Domeniul S din planul xOy se împarte în mod arbitrar în domenii elementare, ale căror arii se notează cu $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ (fig. 1.97); în interiorul sau la limita fiecărui domeniu elementar cu suprafaţa ΔS_i se alege un punct arbitrar $M_i(x_i, y_i)$ şi se formează suma (suma integrală) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$.

Limita către care tinde această sumă atunci cînd cel mai mare dintre diametrii* domeniilor elementare tinde spre zero [dacă funcţia $f(x,y)$ este continuă în domeniul (S), această limită există] se numeşte *integrală dublă* a funcţiei $f(x,y)$, extinsă la domeniul S:

$$\iint_S f(x, y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i.$$

Dacă funcţia $f(x,y)$ este pozitivă în toate punctele domeniului S, atunci $\iint_S f(x, y)\,\mathrm{d}S$ dă mărimea volumului corpului mărginit de suprafaţa $z = f(x, y)$, de planul xOy şi de suprafaţa cilindrică cu generatoarea paralelă cu axa Oz, care intersectează planul xOz de-a lungul conturului domeniului S (fig. 1.98).

Integrala triplă a funcţiei $f(x,y,z)$, extinsă la domeniul tridimensional V, se numeşte numărul definit în modul următor.

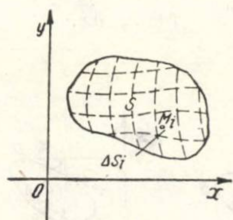


Fig. 1.97.

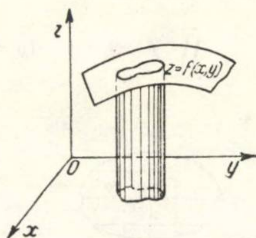


Fig. 1.98.

Domeniul V se împarte arbitrar în domenii elementare cu volumele $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$; în interior sau la limita fiecărui domeniu elementar cu volumul ΔV_i, se alege un punct arbitrar $M_i(x_i, y_i, z_i)$ şi se calculează limita sumei $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$ cu condiţia ca cel mai

---

* *Diametrul* figurii se numeşte distanţa maximă dintre două puncte care se află pe conturul ei.

mare dintre diametrii domeniilor elementare să tindă spre zero:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dV = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i.$$

Calculul integralei duble. Calculul integralei duble se reduce la calculul succesiv a două integrale definite.

Calculul integralei duble în coordonate carteziene. *Aria elementară în coordonate carteziene* se exprimă prin formula $dS = dx dy$ (fig. 1.99).

În locul simbolului $\iint_S f(x, y)\,dS$ se folosește, de obicei, simbolul $\iint_S f(x, y)\,dx dy$.

Dacă A și B sînt punctele de pe conturul domeniului S cu abscisele minimă și maximă ($x = a$ și $x = b$), iar $y = y_1(x)$ și $y = y_2(x)$ sînt ecuațiile porțiunilor din acest contur—AmB și AnB— (fig. 1.100), atunci

$$\iint_S f(x, y)\,dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Prima integrare (internă) se efectuează pentru x constant.

Dacă C și D sînt puncte pe conturul domeniului S corespunzînd valorilor minimă și maximă ale lui y ($y = \alpha$ și $y = \beta$), iar $x = x_1(y)$ și $x = x_2(y)$ sînt ecuațiile porțiunilor CpD și CqD ale acestui contur (fig. 1.101), atunci

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

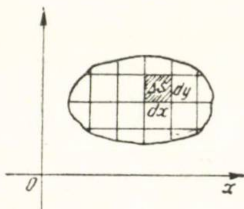


Fig. 1.99.

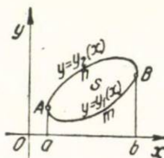


Fig. 1.100.

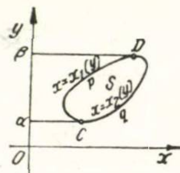


Fig. 1.101.

Prima dintre aceste formule se aplică în cazul cînd orice dreaptă paralelă cu axa Oy (cu excepția, poate, a unui număr finit de astfel de drepte) intersectează conturul domeniului S în nu mai mult decît două puncte; a doua formulă se aplică atunci cînd orice dreaptă paralelă cu axa Ox intersectează conturul domeniului S în nu mai mult decît două puncte.

Dacă nici una din condiţiile amintite nu este îndeplinită, trebuie să împărţim domeniul S în două sau mai multe părţi (fig. 1.102) şi să folosim egalitatea

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{S_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{S_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Calculul integralei duble în coordonate polare. *Aria elementară în coordonate polare*: $dS = \rho d\rho d\varphi$ (v. fig. 1.103).

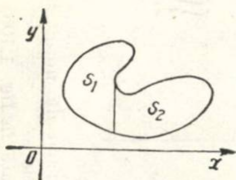


Fig. 1.102.

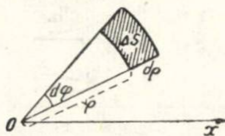


Fig. 1.103.

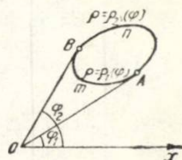


Fig. 1.104.

Folosind formulele $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$, obţinem:

$$f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin\varphi) = F(\rho, \varphi) \text{ şi } \iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{(S)} F(\rho, \varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Dacă A şi B sînt punctele de pe conturul domeniului S cu valorile minimă, respectiv maximă, ale lui $\varphi(\varphi = \varphi_1$ şi $\varphi = \varphi_2)$, iar $\rho = \rho_1(\varphi)$ şi $\rho = \rho_2(\varphi)$ sînt ecuaţiile porţiunilor AmB şi AnB ale conturului (fig. 1.104), atunci

$$\iint_S F(\rho, \varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \iint_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho\, d\rho.$$

Calculul integralei triple. a) În coordonate carteziene

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_S dx\, dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

unde S este proiecţia domeniului V pe planul xOy; $z = z_1(x, y)$ şi $z = z_2(x, y)$ sînt ecuaţiile porţiunilor inferioară, respectiv superioară, ale suprafeţei care mărgineşte domeniul V (fig. 1.105).

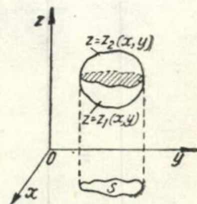


Fig. 1.105.

Aplicațiile integralelor multiple

1) *Aplicațiile integralelor duble*

Mărimea	Formula generală	În coordonate carteziene	În coordonate polare
Aria unei figuri plane	$\sigma = \iint_S \mathrm{d}S$	$\iint_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$\iint_S \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$
Aria unei suprafețe*)	$\sigma = \iint_S \frac{\mathrm{d}S}{\cos\gamma}$	$\iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$\iint_S \sqrt{\rho^2 + \rho\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$
Volumul unui corp**)	$V = \iint_S z\,\mathrm{d}S$	$\iint_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$\iint_S z\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$

*) Aici S este proiecția suprafeței pe planul xOy, γ este unghiul format de normala la elementul de suprafață cu axa Oz (unghiul dintre elementul de suprafață și planul xOy).

**) Se are în vedere volumul unui corp a cărui formă este reprezentată în fig. 1.105.

Momentul de inerţie al unei figuri plane în raport cu cu axa Ox	$I_x = \iint_S y^2 \, dS$	$\iint_S y^2 \, dx \, dy$	$\iint_S \rho^3 \sin^2 \varphi \, d\varphi \, d\rho$
Momentul de inerţie al unei figuri plane în raport cu polul O	$I_o = \iint_S \rho^2 \, dS$	$\iint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy$	$\iint_S \rho^3 \varphi \, d\rho$
Masa unei figuri plane de densitate δ variabilă	$M = \iint_S \delta \, dS$	$\iint_S \delta \, dx \, dy$	$\iint_S \delta\rho \, d\varphi \, d\rho$
Coordonatele centrului de greutate al unei figuri plane omogene (σ este aria figurii)	$x_c = \dfrac{\iint_S x \, dS}{\sigma}$ $y_c = \dfrac{\iint_S y \, dS}{\sigma}$	$\dfrac{\iint_S x \, dx \, dy}{\iint_S dx \, dy}$ $\dfrac{\iint_S y \, dx \, dy}{\iint_S dx \, dy}$	$\dfrac{\iint_S \rho^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\rho}{\iint_S \rho \, d\varphi \, d\rho}$ $\dfrac{\iint_S \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\rho}{\iint_S \rho \, d\varphi \, d\rho}$

2) *Aplicațiile integralelor triple*:

Mărimea	Formula generală	În coordonate carteziene	În coordonate cilindrice	În coordonate sferice
Volumul corpului	$V = \iiint_V \mathrm{d}V$	$\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$\iiint_V \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$	$\iiint_V r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$
Momentul de inerție al corpului în raport cu axa Oz	$I_z = \iiint_V \rho^2\,\mathrm{d}V$	$\iiint_V (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$\iiint_V \rho^3\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$	$\iiint_V r^4 \sin^3\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$
Momentul de inerție al corpului în raport cu polul O	$I_o = \iiint_V r^2\,\mathrm{d}V$	$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$\iiint_V (\rho^2 + z^2)\,\rho\,d\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$	$\iiint_V r^4 \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$

Masa unui corp cu densitatea variabilă δ	$M = \iiint_V \delta \, dV$	$\iiint_V \delta \, dx \, dy \, dz$	$\iiint_V \delta\rho \, d\varphi \, d\rho \, dz$	$\iiint_V \delta \, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$
Coordonatele centrului de greutate al unui corp omogen (v — volumul corpului)	$x_c = \dfrac{\iiint_V x \, dV}{v}$ $y_c = \dfrac{\iiint_V y \, dV}{v}$ $z_c = \dfrac{\iiint_V z \, dV}{v}$	$\dfrac{\iiint_V x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}$ $\dfrac{\iiint_V y \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}$ $\dfrac{\iiint_V z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}$		

b) În coordonate cilindrice (p. 84)

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dV = \iiint_V F(\rho, \varphi, z)\,\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz =$$

$$= \iint_S \rho\,d\rho\,d\varphi \int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} F(\rho, \varphi, z)\,dz =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\,d\rho \int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} F(\rho, \varphi, z)\,dz,$$

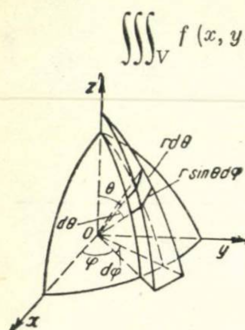


Fig. 1.106.

unde S este proiecţia domeniului V pe planul xOy, $z = z_1(\rho,\varphi)$ şi $z = z_2(\rho,\varphi)$ sînt ecuaţiile părţilor inferioară, respectiv superioară, ale suprafeţei care mărgineşte domeniul V, iar $F(\rho, \varphi, z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$.

c) În coordonate sferice (p. 84) *volumul elementar* $dV = r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr$ (fig. 1.106) şi

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dV = \iiint_V F(r, \varphi, \theta)\,r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta\,d\theta \int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} F(r, \varphi, \theta)\,r^2\,dr,$$

unde

$$F(r, \varphi, \theta) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

§ 1.13. Integrala curbilinie

Definiţii. Se dau funcţiile $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ de-a lungul arcului l (fig. 1.107), $A(a, \alpha)$ punctul iniţial şi $B(b, \beta)$ punctul final al arcului l; se notează $a = x_0$, $b = x_n$; $\alpha = y_0$; $\beta = y_n$ şi se împarte arcul l în n părţi elementare prin punctele $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ (numerotarea se face astfel, încît punctul M_i să urmeze după punctul M_{i-1} dacă ne mişcăm pe arc de la A spre B). În interiorul sau la capătul fiecărui arc elementar $M_{i-1}M_i$ se alege un punct arbitrar $N_i(\xi_i, \eta_i)$ şi se formează suma

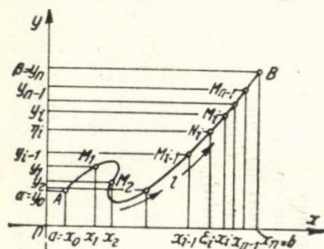


Fig. 1.107.

$$\sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i],$$

unde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1};$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}.$$

Limita către care tinde această sumă atunci cînd lungimea celui mai mare dintre arcele elementare tinde spre zero (şi, prin urmare, $n \to \infty$) se numeşte *integrala curbilinie* a expresiei $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ de-a lungul arcului l:

$$\int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i].$$

Pentru existenţa integralei curbilinii este suficient ca funcţiile $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ să fie continue de-a lungul arcului l, iar arcul l să fie neted pe porţiuni *).

Dacă $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ sînt proiecţiile pe axele de coordonate ale vectorului forţă $\vec{F}(x, y)$, care acţionează asupra punctului material $M(x, y)$ într-un anumit domeniu (fig. 1.108), atunci

$$\int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

exprimă lucrul mecanic al forţei $\vec{F}$ la deplasarea punctului material M din poziţia A în poziţia B pe arcul l, conţinut în acest domeniu.

Definiţia integralei curbilinii

$$\int_l P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

de-a lungul arcului l al unei curbe în spaţiu este analogă cu aceea pentru arcul unei curbe plane.

Integrala curbilinie de-a lungul unui drum închis, C, de integrare (circulaţia) se notează cu simbolul $\oint_C P dx + Q dy$ sau

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

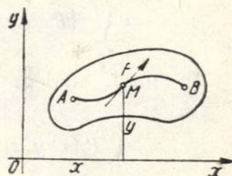


Fig. 1.108.

Proprietăţile integralei curbilinii. 1. La variaţia sensului de mişcare pe arc, integrala îşi schimbă semnul (fig. 1.109)

$$\int_{l'} P\,dx + Q\,dy = -\int_l P\,dx + Q\,dy$$

(arcul l' coincide geometric cu arcul l, însă punctul iniţial al unuia dintre ele este punct final pentru celălalt şi invers).

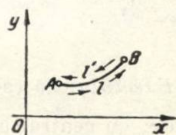


Fig. 1.109.

*) Arcul se numeşte neted pe porţiuni dacă constă dintr-un număr finit de arce continue, cu tangente care se rotesc continuu.

2. Dacă arcul l se compune din arcele $l_1, l_2, \ldots, l_p$, atunci

$$\int_l = \int_{l_1} + \int_{l_1} + \ldots + \int_{l_p}$$

(integrandul este acelaşi pentru toate integralele) (fig. 1.110),

Calculul integralei curbilinii. Dacă un arc plan l este intersectat de o dreaptă arbitrară paralelă cu una dintre axele de coordonate în nu mai mult decît într-un punct, atunci ecuaţia sa poate fi rezolvată atît în raport cu x $[x = x(y)]$, cît şi în raport cu $y([y = y(x)]$.

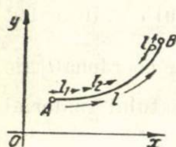


Fig. 1.110.

Dacă $A(a, \alpha)$ este punctul iniţial şi $B(b, \beta)$ este punctul final al arcului, este valabilă, de exemplu, formula

$$\int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_a^b P[x, y(x)]dx + \int_\alpha^\beta Q[x(y), y]\,dy.$$

Dacă arcul l nu satisface condiţia amintită, însă el poate fi împărţit în mai multe porţiuni astfel încît fiecare să satisfacă această condiţie, formula menţionată poate fi aplicată fiecărei părţi separat şi poate fi folosită proprietatea 2 (v. mai sus).

Dacă ecuaţiile arcului sînt date sub forma parametrică $x = x(t)$; $y = y(t)$, iar τ şi T sînt valorile parametrului t, corespunzătoare punctelor A şi B, atunci

$$\int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_\tau^T \{P[x(t), y(t)]\,x'(t) + Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt.$$

În mod analog, pentru curba în spaţiu $x = y(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$\int_l P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int_\tau^T \{P[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t) + Q[(x(t), y(t), z(t)]\,y'(t) +$$

$$+ R[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t)\}\,dt.$$

Exemplu. Să calculăm $\oint_C y\,dx - x\,dy$, unde C este un cerc cu raza r, cu centrul în originea axelor de coordonate (sensul de parcurgere este opus sensului mişcării acelor de ceasornic).

Ecuaţiile cercului sînt $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ şi prin urmare,

$$\int_C y\,dx - x\,dy = \int_0^{2\pi} [r\sin t\,(-r\sin t) - r\cos t\; r\cos t]\,dt = -2\pi r^2.$$

Legătura dintre integralele curbilinii şi integralele duble. Dacă C este un contur închis, parcurs în sens pozitiv (ca sens pozitiv de parcurgere al unui contur închis se consideră sensul în care domeniul mărginit de contur rămîne la stînga), S este suprafaţa delimitată de conturul C (fig. 1.111), iar funcţiile $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sînt continue împreună cu derivatele parţiale $\frac{\partial Q}{\partial x}$ şi $\frac{\partial P}{\partial y}$ în domeniul S

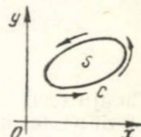


Fig. 1.111.

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(formula lui Green).

Dacă domeniul S nu este simplu conex*) şi frontiera sa constă din cîteva contururi, prin C în formula lui Green trebuie înţeles ansamblul tuturor acestor contururi, iar sensul de parcurgere pe fiecare contur se alege astfel, încît domeniul S să se afle în stînga (fig. 1.112).

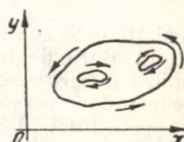


Fig. 1.112

Pentru ca integrala curbilinie $\int_{AB} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$, unde funcţiile $P(x,y)$ şi $Q(x, y)$ şi derivatele lor parţiale sînt continue în domeniul S, să aibă aceeaşi valoare pentru toate drumurile care se află în domeniul simplu conex S şi care pornesc de la punctul $A(x_0,y_0)$ spre punctul $B(x_1, y_1)$, este necesar şi suficient ca expresia de sub integrală $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ să fie o diferenţială totală, adică să fie îndeplinită condiţia

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

În acest caz,

$$\int_l P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0),$$

unde $\mathrm{d}U(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.

Independenţa integralei de drumul de integrare în domeniul S este echivalentă cu anularea integralei pe orice contur închis, care se află în acest domeniu.

Dacă expresia de sub integrală este o diferenţială totală, însă în interiorul conturului există un punct singular în care funcţiile $P(x,y)$ sau $Q(x,y)$ sau derivatele lor parţiale nu sînt continue, integrala pe un astfel de contur poate fi diferită de zero, dar în acest caz integrala pe orice contur închis, care înconjură de acelaşi număr de ori acest punct singular, are o valoare constantă.

---

*) Domeniul finit S se numeşte simplu conex dacă toate punctele care se află în interiorul oricărui contur închis din acest domeniu aparţin domeniului S.

Exemplu. Să calculăm $\oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ de-a lungul conturului C care înconjură o dată originea axelor de coordonate (originea axelor de coordonate este un punct singular). Folosind ecuaţiile parametrice ale cercului $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, rezultă:

$$\oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Cu ajutorul integralei curbilinii se poate calcula aria σ a domeniului S după formula

$$\sigma = \frac{1}{2} \oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x,$$

unde C este conturul domeniului S.

În afară de integralele curbilinii studiate mai sus, denumite de obicei *integrale curbilinii de proiecţie* (sau integrale de speţa a doua), se introduce şi *integrala curbilinie în raport cu arcul de curbă* (integrale de speţa întîi). Păstrînd notaţiile de mai înainte se defineşte integrala curbilinie a unei funcţii de două variabile $f(x,y)$ în raport cu arcul l, ca limita sumei integrale:

$$\int_l f(x, y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i,$$

unde Δs_i este lungimea arcului elementar al curbei $M_{i-1} M_i$. Pentru existenţa acestei limite este suficient ca funcţia $f(x,y)$ să fie continuă de-a lungul arcului l, iar arcul l să fie neted pe porţiuni (v. p. 147).

Analog se defineşte integrala curbilinie a unei funcţii de trei variabile $f(x, y, z)$ în raport cu arcul l al unei curbe în spaţiu

$$\int_l f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

Proprietatea 2 a integralei curbilinii de proiecţie (v. p. 148), se păstrează şi pentru integrala curbilinie în raport cu arcul de curbă, iar proprietatea 1 se înlocuieşte prin următoarea: la variaţia sensului de mişcare pe drumul de integrare, integrala curbilinie în raport cu arcul nu se modifică:

$$\int_{l'} f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_l f(x, y)\,\mathrm{d}s.$$

Calculul integralei curbilinii în raport cu arcul, ca şi al integralei de proiecţie (respectînd condiţiile de mai sus), se reduce la calculul unei integrale definite. În acest caz:

1) dacă ecuaţia curbei este $y = y(x)$, atunci

$$\int_l f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x;$$

2) dacă ecuaţia curbei este $x = x(y)$, atunci

$$\int_l f(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta f[x(y), y] \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy;$$

3) dacă ecuaţiile curbei sînt date sub forma parametrică $x = x(t)$ $y = y(t)$, atunci

$$\int_l f(x, y)\, ds = \int_\tau^T f[(x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt^*.$$

Exemplu. Să calculăm $\int_l y ds$, unde l este jumătatea superioară a elipsei $x = \sqrt{5} \cos t$; $y = 3 \sin t$.

$$\int_l y ds = 3 \int_0^\pi \sin t \sqrt{5 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3 \int_0^\pi \sin t \sqrt{5 + 4 \cos^2 t}\, dt = 9 + \frac{15}{4} \ln 5.$$

§ 1.14. Integrala de suprafaţă

Definiţie. Integrala funcţiei $f(x,y,z)$ pe domeniul σ situat pe o anumită suprafaţă se numeşte numărul care se determină în modul următor.

Domeniul σ se împarte arbitrar în domenii elementare cu ariile $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ (fig. 1.113); în interiorul sau pe frontiera fiecărui domeniu elementar se alege un punct $M_i(x_i, y_i, z_i)$, se formează suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta\sigma_i$ şi se află limita către care tinde această sumă atunci cînd cel mai mare dintre diametrii δ_i ai domeniilor elementare tinde spre zero:

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{\max \delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta\sigma_i.$$

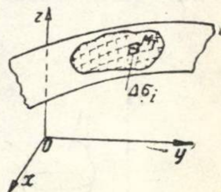


Fig. 1.113.

Pentru existenţa acestei limite este suficient ca funcţia $f(x,y,z)$ să fie continuă în domeniul σ şi în fiecare punct al domeniului σ să se poată duce un plan tangent care să se rotească continuu o dată cu deplasarea continuă a punctului.

---

* Aici n-are importanţă care dintre punctele extreme ale arcului l este punct iniţial sau punct final. În părţile din dreapta ale formulelor, limita superioară a integralei trebuie luată mai mare decît cea inferioară.

Dacă domeniul σ constă din cîteva porţiuni $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, atunci

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\, d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma_1} f(x, y, z)\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y, z)\, d\sigma + \ldots + \iint_{\sigma_p} f(x, y, z)\, d\sigma.$$

Calculul integralei de suprafaţă. Calculul integralei de suprafaţă se reduce la calculul integralei duble cu ajutorul formulei.

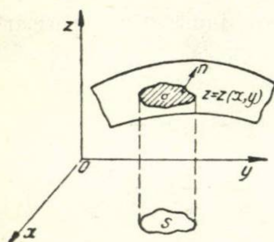


Fig. 1.114.

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\, d\sigma =$$

$$= \iint_S \frac{f[x, y, z(x, y)]}{|\cos \widehat{(n, z)}|}\, dS,$$

unde S este proiecţia domeniului σ pe planul xOy (fig. 1.114), $z = z(x, y)$ este ecuaţia suprafeţei pe care se află domeniul σ, iar $\widehat{(n, z)}$ este unghiul dintre normala la suprafaţă şi axa Oz, şi, prin urmare

$$\left|\cos \widehat{(n, z)}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Legătura dintre integrala de suprafaţă şi integralele curbilinii şi triple. Dacă σ este o suprafaţă închisă care mărgineşte un domeniu tridimensional V, n este normala la suprafaţa σ, îndreptată înspre exteriorul lui V (normala exterioară) (fig. 1.115), iar funcţiile $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ şi derivatele lor parţiale de primul ordin sînt continue în domeniul V, inclusiv pe frontiera sa, atunci

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV =$$

$$= \iint_\sigma [P \cos \widehat{(n, x)} + Q \cos \widehat{(n, y)} +$$

$$+ R \cos \widehat{(n, z)}]\, d\sigma$$

(formula lui Gauss-Ostrogradski).

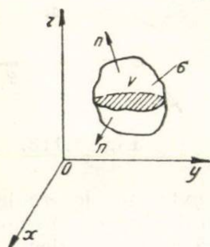


Fig. 1.115.

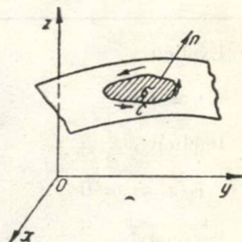
Dacă σ este un domeniu situat pe o anumită suprafaţă delimitat de conturul C, n este normala la suprafaţă, orientată astfel

încît ea să formeze un unghi ascuţit cu axa Oz (fig. 1.116), iar funcţiile $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ şi derivatele lor de primul ordin sînt continue în domeniul σ, inclusiv pe frontiera sa, atunci

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_\sigma \left\{ \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right] \cos(\widehat{n, x}) + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right] \cos(\widehat{n, y}) + \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \cos(\widehat{n, z}) \right\} \mathrm{d}\sigma$$

(formula lui Stokes).

În cazul cînd domeniul σ este multiplu conex, prin C trebuie să se înţeleagă ansamblul de contururi care formează frontiera sa.



Condiţiile de independenţă ale integralei curbilinii, pe o curbă în spaţiu, faţă de drumul de integrare sînt următoarele:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

Fig. 1.116.

în aceste condiţii, expresia de sub integrală este diferenţiala totală a unei funcţii oarecare $U(x, y, z)$: $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \mathrm{d}U$.

1.6
Geometria diferenţială

§ 1.15. Curbe plane

Diferenţiala arcului. Diferenţiala arcului unei curbe plane se exprimă cu ajutorul uneia dintre formulele următoare:

a) în coordonate carteziene

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x;$$

$\mathrm{d}s = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,\mathrm{d}t$ (dacă curba este dată sub formă parametrică);

b) în coordonate polare

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Sensul pozitiv pentru arc se consideră sensul în care diferenţiala arcului este pozitivă.

Tangenta şi normala (X, Y sînt coordonatele curente ale punctului tangentei sau normalei; x, y coordonatele punctului pe curbă prin care se duce tangenta sau normala):

Forma ecuaţiilor curbei	Ecuaţia tangentei	Ecuaţia normalei
Explicit $y = f(x)$	$Y - y = y'(X - x)$	$Y - y = -\dfrac{X - x}{y'}$
Implicit $F(x, y) = 0$	$F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) = 0$	$\dfrac{X - x}{F'_x} = \dfrac{Y - y}{F'_y}$
Parametric $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$	$\dfrac{Y - y}{y'_t} = \dfrac{X - x}{x'_t}$	$x'_t(X - x) + y'_t(Y - y) = 0$

Direcţia tangentei se determină în coordonate carteziene prin unghiul α dintre direcţia pozitivă a axei Ox şi tangentă; în coordonate polare — prin unghiul μ dintre raza vectoare $OM = \rho$ şi tangentă (fig. 1.117).

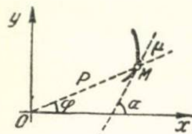


Fig. 1.117.

Unghiurile α şi μ se definesc prin formulele:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}\,;\ \cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,;\ \sin\alpha = \frac{dy}{ds}\,;$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\rho'}\,;\ \cos\mu = \frac{d\rho}{ds}\,;\ \sin\mu = \rho\frac{d\varphi}{ds}.$$

Unghiul dintre două curbe se numeşte unghiul dintre tangentele la aceste curbe în punctul lor comun.

Dacă curbele sînt date prin ecuaţiile

$$y = f_1(x),\ y = f_2(x),$$

unghiul φ dintre ele, în punctul de intersecţie $N(x_0, y_0)$, se determină prin formula

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_2(x_0)f'_1(x_0)}.$$

Formulele pentru calculul lungimilor unor segmente (fig. 1.118) legate de tangentă şi de normală:

$$MT = \left| \frac{y\sqrt{1+(y')^2}}{y'} \right| \quad \textit{(segment de tangentă)};$$

$$MN = \left| y\sqrt{1+(y')^2} \right| \quad \textit{(segment de normală)};$$

$$PT = \left| \frac{y}{y'} \right| \quad \textit{(subtangentă)};$$

$$PN = \left| yy' \right| \quad \textit{(subnormală)}.$$

Convexitate şi concavitate; punctele de inflexiune. În punctul M(fig. 1.119) curba $y = f(x)$ este îndreptată cu *convexitatea în jos*

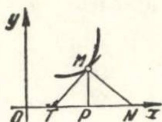


Fig. 1.118.

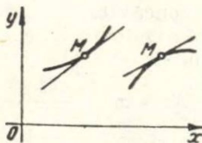


Fig. 1.119.

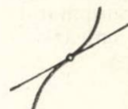


Fig. 1.120.

(concavitatea în sus), dacă într-o anumită vecinătate a acestui punct tangenta trece sub curbă; dacă, însă, tangenta trece deasupra curbei, curba are *convexitatea în sus*. Punctul în care tangenta trece dintr-o parte a curbei în cealaltă se numeşte *punct de inflexiune* (fig. 1.120).

Curba este concavă în sus în orice punct în care $f''(x)<0$ şi concavă în jos în orice punct, în care $f''(x)>0$. În punctul de inflexiune, $f''(x) = 0$ [sau $f''(x)$ nu există]. Pentru aflarea punctelor de inflexiune trebuie să găsim toate rădăcinile ecuaţiei $f''(x) = 0$. Dacă la trecerea lui x printr-una dintre aceste valori derivata a doua îşi schimbă semnul, curba are în acest punct, un punct de inflexiune.

Dacă curba este dată printr-o ecuaţie în coordonate polare $\rho = f(\varphi)$, valorile argumentului φ, corespunzătoare punctelor de inflexiune, satisfac ecuaţia

$$\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho'' = 0.$$

Curbura curbei. *Curbura* K a curbei în punctul M se numeşte limita raportului dintre unghiul format de direcţiile pozitive ale tangentelor în punctele M şi N *(unghiul de contingenţă)* şi lungimea arcului MN, cînd $N \to M$ (fig. 1.121):

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

unde α este unghiul dintre direcţiile pozitive ale tangentei în punctul M şi axa Ox.

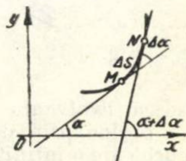


Fig. 1.121.

Raza de curbură R se numeşte inversul curburii: $R = 1/K$. Curbele plane care au curbura constantă sînt cercul ($K = 1/a$, unde a este raza de curbură) şi dreapta ($K = 0$).

Formulele pentru calcularea curburii K şi a razei de curbură R:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}; \quad K = \frac{1}{R} = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}.$$

(pentru ecuaţii în coordonate polare).

Punctele curbei în care curbura are un maxim sau un minim se numesc *vîrfurile* curbei.

Cercul de curbură (cercul osculator) al curbei în punctul M se numeşte poziţia limită a cercului dus prin punctul M şi prin alte două puncte de pe curbă, N şi P (fig. 1.122), cînd $N \to M$ şi $P \to M$. Raza cercului de curbură este egală cu raza de curbură, iar *centrul cercului de curbură (centrul de curbură)* se află pe normala la curbă dusă în punctul M spre concavitatea curbei.

Coordonatele X, Y ale centrului de curbură al curbei $y = f(x)$ se calculează după formulele

$$X = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''};$$

$$Y = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

Evoluta (desfăşurata) curbei este locul geometric al centrelor de curbură. Dacă în formulele pentru determinarea coordonatelor centrului de curbură se consideră X şi Y drept coordonate curente ale punctului pe evolută, aceste formule dau ecuaţiile parametrice ale evolutei.

Evolventa (desfăşuranta sau desfăşurătoarea) curbei este curba pentru care curba dată este evolută.

Normala MC a evolventei Γ_2 este tangentă la evoluta Γ_1 (fig. 1.123); lungimea arcului CC_1 al evolutei este egală cu creşterea respectivă a razei de curbură a evolventei $\widehat{CC_1} = M_1C_1 - MC$; de



Fig. 1.122.

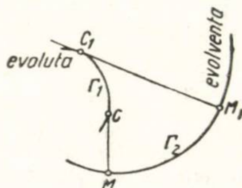


Fig. 1.123.

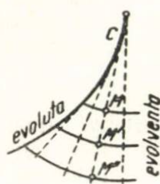


Fig. 1.124.

aceea, evolventa Γ_2 se mai numeşte desfăşuranta curbei Γ_1, întrucît se obţine prin desfăşurarea unui fir întins, înfăşurat pe Γ_1. Orice curbă are o infinitate de evolvente, corespunzătoare diferitelor lungimi iniţiale ale firului (fig. 1.124).

Asimptote. Dacă distanţa pînă la o anumită dreaptă de la un punct care se îndepărtează spre infinit pe o curbă dată tinde spre zero, această dreaptă se numeşte *asimptotă* la curba dată. Asimptota poate sau să nu intersecteze curba (fig. 1.125 *a*), sau s-o intersecteze, (fig. 1.125 *b*) de un număr finit sau infinit de ori.

Curba $y = f(x)$ are o asimptotă paralelă cu axa Ox, dacă există limita $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ sau $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \beta$.

În acest caz $y = b$ (respectiv $y = \beta$) este ecuaţia acestei asimptote.

Dacă $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, dreapta $x = a$ este asimptota paralelă cu axa Oy.

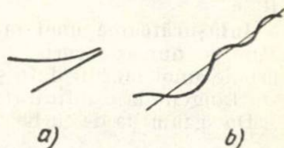


Fig. 1.125.

Pentru a găsi asimptotele oblice, trebuie să calculăm limitele $k = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x$ şi $(\lim_{x\to-\infty} f(x)/x)$ şi $b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]$, respectiv $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx)]$.

Dacă limitele care determină mărimile k şi b există, dreapta $y = kx + b$ este asimptotă la curba dată.

Exemplu. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 6}{x^2 + 3}$; $k = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 6}{(x^2 + 3)x} = 1$;

$b = \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3 + 2x^2 + 6}{x^2 + 3} - x\right) = 2$; ecuaţia asimptotei: $y = x + 2$.

Puncte singulare. Un punct al curbei $F(x, y) = 0$ se numeşte *multiplu (dublu, triplu* etc.), dacă coordonatele sale x_0, y_0, satisfac sistemul de ecuaţii: $F(x_0, y_0) = 0$; $F'_x(x_0, y_0) = 0$; $F'_y(x_0, y_0) = 0$. Dacă, totodată, nu se anulează nici una dintre derivatele de ordinul al doilea $A = F''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = F''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = F''_{yy}(x_0, y_0)$, punctul se numeşte *dublu*.

Un punct dublu este:

a) *izolat* (adică într-o anumită vecinătate a sa nu există alte puncte ale curbei date), dacă $\Delta = AC - B^2 > 0$ (fig. 1.126 *a*);

b) *nodal*, dacă $\Delta < 0$ (fig. 1.126, *b*);

c) *punct de întoarcere de speţa întîi* (fig. 1.126 *c*) sau de *speţa a doua* (fig. 1.126 *d*), sau *punct autoosculator* (fig. 1.126 *e*) dacă $\Delta = 0$.

La curbele nealgebrice, în afară de puncte multiple, pot exista singularităţi de altă natură, de exemplu, *puncte de*

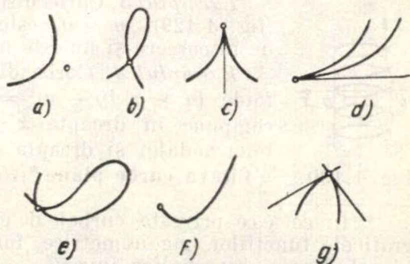


Fig. 1.126.

oprire (fig. 1.126 *e*) — care se află pe frontiera domeniului de existenţă a funcţiei $y = f(x)$ în care este definită curba — sau, în punctele de discontinuitate de speţa întîi (v. p. 98) ale acestei funcţii, *puncte unghiulare* (fig. 1.126 *g*) în care limitele la dreapta şi la stînga (v. p.) ale derivatei $f'(x)$ există şi sînt diferite şi altele.

Înfăşurătoarea unei familii de curbe. *Înfăşurătoarea* unor curbe plane se numeşte curba (sau ansamblul de curbe) care atinge toate curbele unei familii date şi orice arc, oricît de mic, al acestei curbe este tangent la o infinitate de curbe ale familiei.

Dacă familia de curbe, care depinde de un parametru α,

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

are o înfăşurătoare, atunci ecuaţiile parametrice ale acesteia din urmă se determină din sistemul

$$F(x, y, \alpha) = 0; \ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Dacă din acest sistem se elimină parametrul α, se obţine ecuaţia implicită $D(x, y) = 0$.

Curba $D(x, y) = 0$ *(curba discriminantă)* poate conţine pe lîngă înfăşurătoare, dacă există, şi locul geometric al punctelor singulare, care nu este o înfăşurătoare.

Exemplul 1. Curba discriminantă a familiei $y = (x - \alpha)^3$ (fig. 1.127), $y = 0$, este locul geometric al punctelor de inflexiune şi înfăşurătoare.

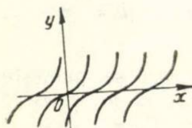


Fig. 1.127.

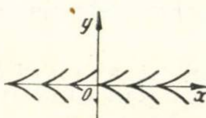


Fig. 1.128.

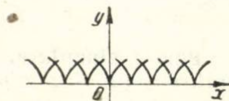


Fig. 1.129.

Exemplul 2. Curba discriminantă a familiei $y^2 = (x - \alpha^3)$ (fig. 1. 128), $y = 0$, este locul geometric al punctelor de întoarcere şi înfăşurătoare.

Exemplul 3. Curba discriminantă a familiei $y^3 = (x - \alpha)^2$ (fig. 1.129), $y = 0$, este locul geometric al punctelor de întoarcere şi nu este înfăşurătoare.

Exemplul 4. Curba discriminantă a familiei de strofoide $(a + x)(y - a)^2 = x^2(a - x)$ (fig. 1.130) se descompune în dreapta $x = 0$ (locul geometric al punctelor nodale) şi dreapta $x = a$ (înfăşurătoare).

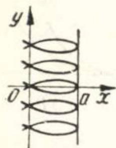


Fig. 1.130.

Cîteva curbe plane *). *Graficul funcţiei putere.*

* În ceea ce priveşte curbele de gradul al doilea fig. 1.42—1.52; graficele funcţiilor trigonometrice, funcţiilor trigonometrice inverse, hiperbolice şi hiperbolice inverse se găsesc la p. 50. În ecuaţiile considerate mai departe, parametrul este pozitiv.

a) $y = ax^n$ ($n>1$ şi întreg); curba este *o parabolă de ordinul n* (fig. 1.131).

În cazul cînd n este par, curba este simetrică în raport cu axa Oy şi are în originea axelor de coordonate un extrem (fig. 1.131 *a*); cînd n este impar curba este simetrică în raport cu originea axelor de coordonate, care este un punct de inflexiune (fig. 1.131 *b*). Nu are asimptote.

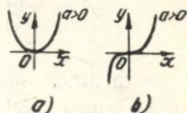


Fig. 1.131.

b) $y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$ (n este întreg pozitiv) (fig. 1.132), *curba este de tip hiperbolic*.

Asimptotele sînt axele de coordonate. Nu există puncte extreme. Dacă n este impar, curba este simetrică în raport cu originea axelor de coordonate, iar dacă n este par, în raport cu axa Oy.

Parabola semicubică (fig. 1.133) $y = ax^{3/2}$ (sub formă parametrică: $x = t^2$, $y = at^3$). Nu are asimptote.

Originea coordonatelor este punct de întoarcere de prima speţă.

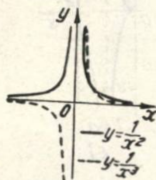


Fig. 1.132.



Fig. 1.133.

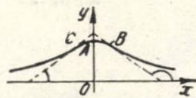


Fig. 1.134.

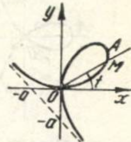


Fig. 1.135.

Curba lui Agnesi (fig. 1.134) $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$. Asimptota este axa Ox. Maxim în $A(0, a)$. Punctele de inflexiune B, $C(\pm a/\sqrt{3}, 3a/4)$. Aria dintre curbă şi asimptotă este πa^2.

Curba (cubica) *lui Descartes* (fig. 1.135) $x^3 + y^3 = 3axy$ sau

$x = 3at/(1 + t^3)$, $y = 3at^2/(1 + t^3)$ ($t = \text{tg}\,\widehat{MOx}$).

Originea axelor de coordonate este un punct nodal în care tangentele sînt axele de coordonate. Asimptota: $x + y + a = 0$. Vîrful: $A(3a/2, 3a/2)$. Aria buclei: $\frac{3}{2}a^2$; aria dintre curbă şi asimptotă $\frac{3}{2}a^2$.

Cisoida (fig. 1.136) este locul geometric al punctelor M, pentru care $OM = PQ$ (P este punctul *cercului generator* cu diametrul a).

Ecuaţia: $y^2 = x^3/(a - x)$ sau $x = at^2/(1 + t^2)$, $y = at^3/(1 + t^2)$ ($t = \text{tg}\,\widehat{OMx}$) sau $\rho = a \sin^2\varphi/\cos\varphi$.

Originea axelor de coordonate este punct de întoarcere de speţa întîi. Asimptota este $x = a$. Aria dintre curbă şi asimptotă este $\frac{3\pi a^2}{4}$.

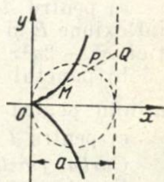


Fig. 1.136.

Strofoida (fig. 1.137) este locul geometric al punctelor M_1 şi M_2 pentru care $PM_1 = PM_2 = OP$.

Ecuaţia:

$$y^2 = x^2 \left(\frac{a + x}{a - x}\right) \text{ sau } x = a\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},\ y = at\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

$(t = \operatorname{tg} \widehat{MOx})$ sau $\rho = -a \cos 2\varphi/\cos \varphi$.

Originea axelor de coordonate este un punct nodal (tangentele: $y = \pm x$). Asimptota este $x = a$. Vîrful $A(-a, 0)$. Aria buclei $a^2(2 - \pi/2)$, aria dintre curbă şi asimptotă, $a^2(2 + \pi/2)$.

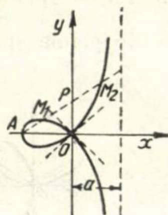


Fig. 1.137.

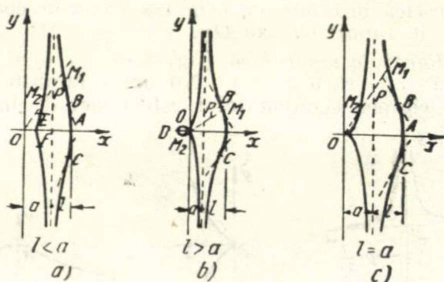


Fig. 1.138.

Concoida (fig. 1.138) este locul geometric al punctelor M pentru care $OM = OP \pm l$, semnul $+$ pentru ramura exterioară, iar semnul $-$ pentru ramura interioară.

Ecuaţia: $(x - a)^2 (x^2 + y^2) - l^2x^2 = 0$ sau $x = a + l \cos \varphi$, $y = a \operatorname{tg} \varphi + l \sin \varphi$, sau $\rho = \dfrac{a}{\cos \varphi} \pm l$.

Ramura exterioară: asimptota $x = l$; vîrful $A\ (a + l,\ 0)$; punctele de inflexiune B şi C [x este cea mai mare dintre rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 3a^2x + 2a\ (a^2 - l^2) = 0$]. Aria dintre ramură şi asimptotă este infinită.

Ramura interioară: asimptota $x = l$; vîrful $D(a - l,\ 0)$; originea axelor de coordonate este punct dublu:

a) pentru $l<a$ punctul este izolat (fig. 1.138 *a*). Punctele de inflexiune E şi F [x este rădăcina pozitivă a doua ca mărime, a ecuaţiei $x^3 - 3a^2x + 2a\ (a^2 - l^2) = 0$];

b) punctul $l>a$, punctul este nodal (fig. 1.138 *b*); maxim şi minim pentru $x = a - \sqrt[3]{al^2}$;

c) pentru $l = a$ este punct de întoarcere (fig. 1.138 *c*).

Curba (melcul) lui Pascal (fig. 1.139): $OM = OP \pm l$.

Ecuaţia $(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2\ (x^2 + y^2)$ sau $x = a \cos^2 \varphi + l \cos \varphi$, $y = a \cos \varphi \sin \varphi + l \sin \varphi$ sau $\rho = a \cos \varphi + l$.

Vîrfurile A, B $(a \pm l,\ 0)$. Patru extreme, dacă $a > l$ şi două extreme, dacă $a \leqslant l$: C, D, E, $F\left(\cos\varphi = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 8a^2}}{4a}\right)$. Punctele de inflexiune: G şi $H\left(\cos\varphi = -\frac{2a^2 + l^2}{3al}\right)$ dacă $a < l < 2a$ (fig. 1.139, b).

Originea axelor de coordonate este un punct dublu: izolat dacă $a < l$, nodal dacă $a > l$ şi punct de întoarcere dacă $a = l$ (în acest din urmă caz curba este o cardioidă).

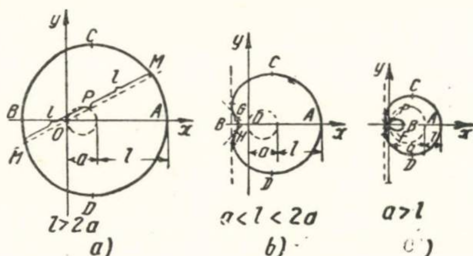


Fig. 1.139.

Aria melcului este $\frac{\pi a^2}{2} + \pi l^2$ [în cazul $a > l$ (fig. 1.139, c) aria buclei interioare, la calculul prin această formulă, se socoteşte de două ori].

Cardioida (fig. 1.140) este un caz particular al melcului lui Pascal: $OM = OP \pm a$. Ecuaţia $(x^2 + y^2)^2 - 2ax\,(x^2 + y^2) = a^2y^2$ sau $x = a\cos\varphi\,(1 + \cos\varphi)$, $y = a\sin\varphi\,(1 + \cos\varphi)$ sau $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)$. Originea axelor de coordonate este punct de întoarcere. Vîrful $A(2a,\ 0)$. Maxim şi minim pentru $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$: C, $D\left(\frac{3a}{4},\ \pm\frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Aria: $\frac{3\pi a^2}{2}$; lungimea $8a$.

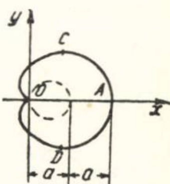


Fig. 1.140.

Ovalul lui Cassini (fig. 1.141) este locul geometric al punctelor M pentru care produsul distanţelor lor la punctele date $F_1\,(c,\ 0)$ şi $F_2\,(-c,\ 0)$ (focare) este constant şi egal cu a^2.

Ecuaţia: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2\,(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$ sau $\rho^2 = c^2\cos 2\varphi \pm \pm\sqrt{c^4\cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}$.

a) $a \geqslant c\sqrt{2}$, oval convex (fig. 1.141, a). Punctele de intersecţie cu axa Ox: A, $C(\pm\sqrt{a^2 + c^2},\ 0)$; punctele de intersecţie cu axa Oy: B, $D(0,\ \pm\sqrt{a^2 - c^2})$.

b) $c < a < c\sqrt{2}$ (fig. 1.141 *b*). Punctele de intersecţie cu axele sînt aceleaşi ca şi în cazul (a).

Maxime şi minime:

$$B, D(0, \pm\sqrt{a^2 - c^2});\ E, G, K, I\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right).$$

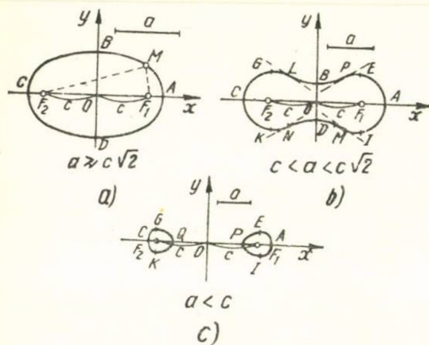


Fig. 1.141.

Puncte de inflexiune:

$$P, L, M, N\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(m - n)}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}(m + n)}\right),$$

unde $n = \frac{a^4 - c^4}{3c^2}$, $m = \sqrt{\frac{a^4 - c^4}{3}}$.

c) $a < c$, două ovale (fig. 1.141 *c*). Punctele de intersecţie cu axa Ox:

$A, C(\pm\sqrt{a^2 + c^2}, 0)$ şi $P, Q(\sqrt{c^2 - a^2}, 0)$.

Maxime şi minime: $E, G, K, I\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right)$.

Lemniscata lui Bernoulli (fig. 1.142) este un caz particular al ovalului lui Cassini pentru $a = c$.

Ecuaţia: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ sau $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

Originea axelor de coordonate este punct de inflexiune şi punct nodal cu tangentele $y = \pm x$.

Punctele de intersecţie ale curbei cu axa Ox: $A, C(\pm a\sqrt{2}, 0)$.

Maxime şi minime: $E, G, K, I\left(\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{a}{2}\right)$.

Aria fiecărei bucle: a^2.

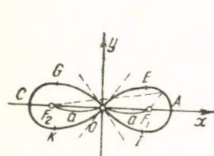


Fig. 1.142.

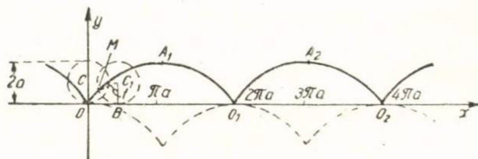


Fig. 1.143.

Cicloida (fig. 1.143) este traiectoria unui punct de pe un cerc care se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă.

Ecuaţia: $x + \sqrt{y(2a - y)} = a$ Arccos $\frac{a - y}{a}$ (a este raza cercului) sau $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($t = \sphericalangle MC_1B$).

Punctele de întoarcere: O, O_1, O_2, ... $(OO_1 = O_1O_2 = ... = 2\pi a)$.
Vîrfurile: $A_1, A_2, ... [(2k+1)\pi a, 2a]$.
Lungimea unei ramuri este $8a$; aria dintre ea şi axa Ox: $3\pi a^2$.
Evoluta cicloidei este şi ea o cicloidă (marcată cu linie punctată).
Trohoidele sînt cicloide alungite (fig. 1.144 *a*) sau scurtate (fig. 1.144 *b*), adică sînt traiectoriile punctelor care se află în afara,

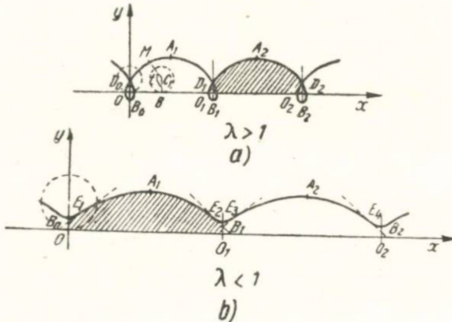


Fig. 1.144.

respectiv în interiorul, cercului care se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă.
Ecuaţiile parametrice: $x = a(t - \lambda \sin t)$, $y = a(1 - \lambda \cos t)$, unde a este raza cercului, $t = \sphericalangle MC_1B$, $\lambda a = C_1M$ (pentru cicloida alungită $\lambda > 1$, pentru cea scurtată $\lambda < 1$); $OO_1 = 2\pi a$; maxime: $A_1, A_2, ... [(2k+1)\pi a, (1+\lambda)a]$, minime: $B_0, B_1, B_2, ... [2k\pi a, (1-\lambda)a]$.
Pentru cicloida alungită punctele nodale sînt

$$D_0, D_1, D_2, ... \left[2k\pi a, a\left(1 - \sqrt{\lambda^2 - t_0^2}\right)\right],$$

unde t_0 este rădăcina pozitivă cea mai mică a ecuaţiei $t = \lambda \sin t$.
Pentru cicloida scurtată punctele de întoarcere sînt

$$E_1, E_2, ... \left[a\left(\arccos \lambda - \lambda\sqrt{1 - \lambda^2}\right), a(1 - \lambda^2)\right].$$

Aria haşurată pe desen este egală cu $\pi a^2(2 + \lambda^2)$.

Epicicloida (fig. 1.145) este traiectoria punctului M al unui cerc care se rostogoleşte fără alunecare pe un alt cerc, în afara acestuia.
Ecuaţiile parametrice: $x = (A + a)\cos\varphi - a\cos\dfrac{A+a}{a}\varphi$; $y = (A+a)\sin\varphi - a\sin\dfrac{A+a}{a}\varphi$ (A este raza cercului imobil, a este raza cercului mobil; $\varphi = \sphericalangle COx$). Pentru $m = A/a = 1$ curba devine o cardioidă.

a) Pentru m întreg curba este închisă şi constă din m părţi identice (fig. 1.145 a). Punctele de întoarcere $A_1, A_2, \ldots, A_m$; $\rho = A$; $\varphi = \frac{2k\pi}{m}$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$.

Vîrfurile $B_1, B_2, \ldots, B_m$: $\rho = A + a$; $\varphi = \frac{2\pi}{m}\left(k + \frac{1}{2}\right)$.

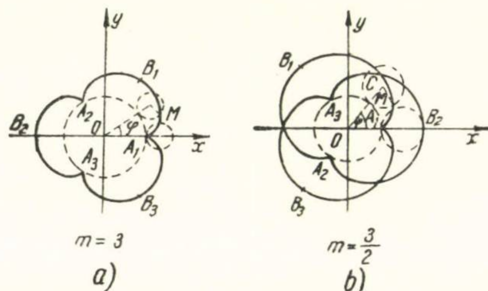


Fig. 1.145.

b) Pentru m fracţionar (raţional) (fig. 1.145 b) curba este de asemenea închisă, însă se autointersectează.

Lungimea unei ramuri: $A_1B_1A_2 = \frac{8(A + a)}{m}$.

Pentru m întreg, lungimea întregei curbe este $8(A + a)$. Aria sectorului $A_1B_1A_2A_1$ (fără sectorul cercului imobil): $\pi a^2 \frac{3A+2a}{A}$.

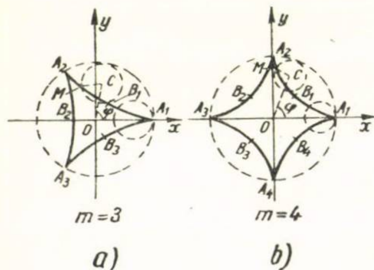


Fig. 1.146.

Hipocicloida (fig. 1.146) este traiectoria unui punct de pe un cerc care se rostogoleşte fără alunecare pe un alt cerc din interiorul acestuia. Pentru orice m $(m > 1)$ ecuaţia hipocicloidei se obţine din ecuaţia respectivă a epicicloidei prin înlocuirea lui a cu $-a$.

Pentru $m = A/a = 2$ curba degenerează în diametrul unui cerc imobil.

Pentru $m = A/a = 3$ (fig. 1.146 a) ecuaţia este: $x = a\,(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)$, $y = a\,(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)$.

Lungimea: $16a$; aria: $2\pi a^2$.

Pentru $m = A/a = 4$ (fig. 1.146 b) curba devine o *astroidă*: $x = A\cos^3\varphi$, $y = A\sin^3\varphi$ sau $x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}$. Lungimea: $24a$ (sau $6A$); aria: $6\pi a^2$ $\left(\text{sau } \frac{3}{8}\pi A^2\right)$.

Desfăşuranta (evolventa) cercului (fig. 1.147) este traiectoria capătului unui fir întins care se desfăşoară de pe cerc ($\overset{\frown}{AB} = BM$).

Ecuaţiile parametrice

$$x = a\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi$$

$$y = a\sin\varphi - a\varphi\cos\varphi \ (a - \text{raza},\ \varphi = \sphericalangle BOx).$$

Punctul de întoarcere: $A\ (a, 0)$. Lungimea arcului AM: $a\varphi^2/2$.

Spirala lui Arhimede (fig. 1.148) este traiectoria unui punct mobil, cu viteza constantă v, pe o rază care se roteşte în jurul polului O cu viteza unghiulară ω constantă.

Ecuaţia: $\rho = a\varphi$, unde $a = v/\omega$.

Raza OR intersectează curba în punctele $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, care se află unul faţă de altul la distanţa constantă $A_iA_{i+1} = 2\pi a$.

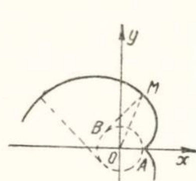


Fig. 1.147.

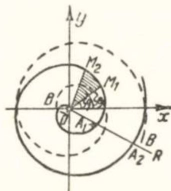


Fig. 1.148.

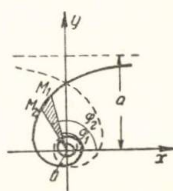


Fig. 1.149.

Lungimea arcului OM (M este un punct oarecare al spiralei) este $\frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + \operatorname{arg\,sh}\varphi\right)$. Aria sectorului M_1OM_2: $\frac{a^2}{6}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$.

Spirala hiperbolică (fig. 1.149). Ecuaţia în coordonate polare: $\rho = a/\varphi$. Asimptota: $y = a$. Polul este un punct asimptotic. Aria sectorului M_1OM_2: $\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2}\right)$.

Spirala logaritmică (fig. 1.150). Curba intersectează toate razele care ies din polul O sub acelaşi unghi α.

Ecuaţia: $\rho = ae^{k\varphi}$ ($k = \operatorname{cotg}\alpha$; dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, atunci $k = 0$ şi curba este un cerc). Polul este un punct asimptotic. Lungimea arcului M_1M_2

$$\frac{\sqrt{1 + k^2}}{k}(\rho_2 - \rho_1).$$

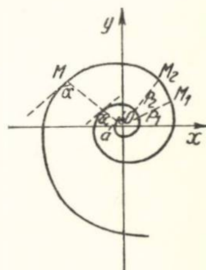


Fig. 1.150.

Spirala parabolică (fig. 1.151): $\rho^2 = a\varphi$. Polul este punct de oprire.

Curba-sceptru (fig. 1.152): $\rho^2 = a/\varphi$. Polul este un punct asimptotic. Axa polară este asimptotă.

Curba exponențială (fig. 1.153) $y = a^x$ $(a > 0)$.

Pentru $a = e$ devine curba exponențială *naturală* $y = e^x$. Funcția y ia numai valori pozitive. Asimptota este axa Ox.

Curba logaritmică (fig. 1.154) $y = \log_a x$ $(a > 0)$.

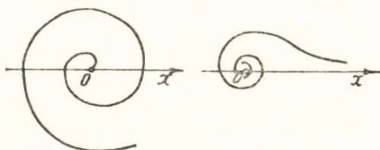
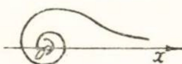
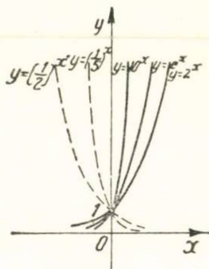




Fig. 1.151. Fig. 1.152. Fig. 1.153.

Pentru $a = e$ devine curba logaritmică *naturală* $y = \ln x$. Funcția y există numai pentru $x > 0$. Asimptota este axa Oy.

Graficul funcției $y = e^{-(ax)^2}$ (fig. 1.155). Curba este simetrică în raport cu axa Oy. Asimptota este axa Ox. Maxim în punctul A $(0, 1)$;

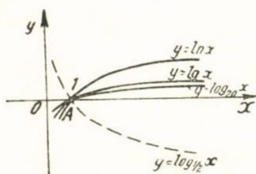


Fig. 1.154.

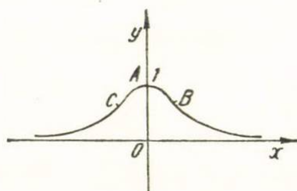


Fig. 1.155.

puncte de inflexiune: B și $C\left(\pm\ 1/a\sqrt{2},\ 1/\sqrt{e}\right)$. Din această categorie face parte *curba de distribuție normală a erorilor (curba lui Gauss)*

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

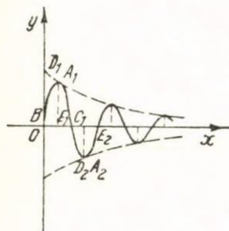


Fig. 1.156.

Curba oscilației amortizate (fig. 1.156) $y = A e^{-ax} \sin(\omega x + \varphi_0)$.

Ea este cuprinsă între curbele $y = \pm A\, e^{-ax}$, pe care le atinge în punctele

$$A_1, A_2, \ldots \left[\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0}{\omega},\ (-1)^k A e^{-ax}\right].$$

Asimptota este axa Ox. Punctele de intersecţie cu axele de coordonate: $B(0, A \sin \varphi_0)$ şi $C_1, C_2, \ldots \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$.

Extreme: $D_1, D_2, \ldots \left(x = \frac{k\pi - \varphi_0 + \alpha}{\omega}\right)$, unde $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega}{a}$.

Punctele de inflexiune: $E_1, E_2, \ldots \left(x = \frac{k\pi - \varphi_0 + 2\alpha}{\omega}\right)$.

Lănţişorul (fig. 1.157) este curba de echilibru a unui fir greu, inextensibil, atîrnat în două puncte. Ecuaţia:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \left(a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right).$$

Curba este simetrică în raport cu axa Oy. Vîrful: A $(0, a)$. Lungimea arcului AM: $a \operatorname{sh} (x/a)$; aria $OAMP$: $a^2 \operatorname{sh} (x/a)$.

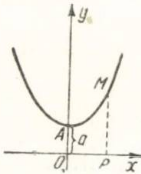


Fig. 1.157.

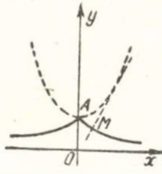


Fig. 1.158.

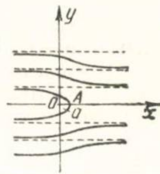


Fig. 1.159.

Tractricea (fig. 1.158). Evolventa lănţişorului (desfăşurarea începe în vîrful A). Ecuaţia

$$x = a \operatorname{arg ch} \frac{a}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \left(= a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}\right).$$

Asimptota este axa Ox. Punctul de întoarcere (avînd tangentă axa Oy) este A $(0, a)$. Curba este simetrică în raport cu axa Oy. Lungimea arcului AM: $a \ln \frac{a}{y}$.

Cvadratricea lui Dinostrat (fig. 1.159):

$$x = y \operatorname{cotg} \frac{y}{a} \text{ sau } \rho \sin \varphi = a\varphi.$$

Asimptotele: $y = na\pi$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Vîrful $A(a, 0)$. Toate celelalte puncte, pentru care $x = a$, sînt puncte de inflexiune.

§ 1.16. Curbe în spaţiu

Generalităţi. O *curbă în spaţiu* (o curbă de curbură dublă) poate fi dată ca linie de intersecţie a două suprafeţe avînd ecuaţiile $F(x,y,z) = 0$; $\Phi(x,y,z) = 0$, precum şi sub *forma parametrică* $x = x(t)$, $y = y(t)$,

$z = z(t)$. În particular, dacă parametrul t coincide cu una dintre coordonatele punctului $M(x, y, z)$ de pe curbă (de exemplu, $t = x$), atunci ecuaţiile curbei sînt de forma: $y = y(x)$, $z = z(x)$.

Ecuaţia vectorială a curbei: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, unde raza vectoare a oricărui punct al curbei este $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ (v. p. 195). Pe curbă se alege un sens pozitiv corespunzător creşterii parametrului t.

Uneori este indicat să se aleagă ca parametru lungimea arcului s al curbei, de la un anumit punct iniţial A (corespunzător valorii $t = t_0$) pînă la punctul M:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt;$$

în acest caz ecuaţiile curbei sînt de forma: $x = x(s)$; $y = y(s)$; $z = z(s)$.

Diferenţiala arcului curbei se exprimă prin formula:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Triedrul asociat. În orice punct M al unei curbe în spaţiu, în care cel puţin una dintre derivatele dx/dt, dy/dt, dz/dt nu este nulă, se determină trei drepte reciproc perpendiculare şi trei plane reciproc perpendiculare, astfel încît fiecare să treacă prin două din cele trei drepte amintite. Aceste drepte şi plane, care formează aşa-numitul *triedru asociat* (fig. 1.160), sînt următoarele:

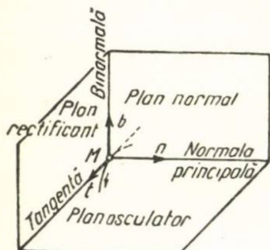


Fig. 1.160.

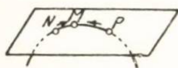


Fig. 1.161.

1) *tangenta*, care se determină ca şi pentru curba plană;

2) *planul normal*, care este planul perpendicular pe tangentă; dreptele situate în acest plan şi care trec prin punctul M se numesc *normale* la curbă;

3) *planul osculator*; acesta este poziţia limită a planului care trece prin punctul M şi prin alte două puncte ale curbei, N şi P, atunci cînd $N \to M$ şi $P \to M$ (fig. 1.161);

4) *normala principală* este normala care se află în planul osculator (linia de intersecţie a planului normal şi a planului osculator);

5) *binormala* este normala perpendiculară pe planul osculator;

6) *planul rectificant* este planul care trece prin tangentă şi prin binormală.

Sensul pozitiv pe tangentă se alege arbitrar şi se determină prin vectorul unitar $\vec{t}$ (p. 194); pe normala principală sensul pozitiv este sensul concavităţii curbei şi se defineşte cu vectorul unitar $\vec{n}$; pe binormală se defineşte cu ajutorul vectorului unitar $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ (p. 197).

Dacă curba este dată sub forma $F(x,y,z) = 0$, $\Phi(x,y,z) = 0$, tangenta are ecuaţia

$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ \Phi'_z & \Phi'_x \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ \Phi'_x & \Phi'_y \end{vmatrix}},$$

iar planul normal are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix} = 0,$$

unde x, y, z sînt coordonatele punctului M, iar X, Y, Z sînt coordonatele curente.

În formulele următoare se păstrează aceste notaţii, precum şi aceea pentru $\vec{r}$ — raza vectoare a punctului M. $\vec{R}$ este raza vectoare curentă.

Ecuaţiile elementelor triedrului asociat, atunci cînd curba este dată prin ecuaţii parametrice, sînt următoarele (toate derivatele se iau în raport cu t):

planul tangent

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad (\vec{R} - \vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0;$$

tangenta

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'} \quad \text{sau} \quad \vec{R} = \vec{r} + \lambda \frac{d\vec{r}}{dt};$$

planul normal

$$x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0 \quad \text{sau} \quad (\vec{R} - \vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dt} = 0;$$

binormala

$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} \quad \text{sau} \quad \vec{R} = \vec{r} + \lambda \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right);$$

normala principală

$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}} \quad \text{sau} \quad \vec{R} = \vec{r} + \lambda \frac{d\vec{r}}{dt} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right);$$

planul rectificant

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (\vec{R}-\vec{r})\,\frac{d\vec{r}}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)=0;$$

$l = y'z'' - y''z'$; $m = z'x'' - z''x'$; $n = x'y'' - x''y'$.

În cazul cînd se ia ca parametru lungimea arcului s, ecuaţiile normalei principale şi ale planului rectificant se simplifică:

$$\frac{X-x}{x''}=\frac{Y-y}{y''}=\frac{Z-z}{z''} \text{ sau } \vec{R}=\vec{r}+\lambda\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \text{ (normala principală)};$$

$$x''(X-x)+y''(Y-y)+z''(Z-z)=0 \text{ sau } (\vec{R}-\vec{r})\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=0 \text{ (pla-}$$

nul rectificant).

Curbura şi torsiunea. Curbura K a unei curbe în punctul M (fig. 1.162) se numeşte limita către care tinde raportul dintre unghiul δ format de tangentele în punctele curbei M şi N *(unghiul de contingenţă)*, şi lungimea Δs a arcului MN, cînd $N \to M$:

$$K = \lim_{N\to M}\frac{\delta}{\Delta s}.$$

Raza de curbură ρ se numeşte mărimea inversă curburii: $\rho = \frac{1}{k}$;

K şi ρ sînt totdeauna pozitive pentru curbele în spaţiu.

Dacă curba este dată prin ecuaţii parametrice, atunci

$$K=\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}$$

În forma vectorială:

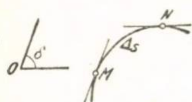


Fig. 1.162.

$$K^2=\frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}{\left|\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right|^3}.$$

În particular, dacă avem ca parametru lungimea arcului s, atunci

$$K=\frac{1}{\rho}=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}=\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|.$$

Exemplu. Pentru elicea $x = a\cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, luînd ca punct iniţial $t = 0$, se obţine: $s=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,dt = t\sqrt{a^2+b^2}$,

de unde $x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$K = \frac{1}{\rho} = \frac{a}{a^2+b^2}$ (curbura este constantă).

Torsiunea T (curbura a doua) a unei curbe în punctul M (fig. 1.163) se numeşte limita către care tinde raportul dintre unghiul θ format de binormale (sau, ceea ce este acelaşi lucru, dintre planele tangente) în punctele M şi N, şi lungimea Δs a arcului MN, atunci cînd $N \to M$:

$$T = \lim_{N\to M} \frac{\theta}{\Delta s}.$$

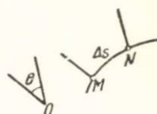


Fig. 1.163.

Rază de torsiune se numeşte mărimea inversă torsiunii: $\tau = \frac{1}{T}$. Dacă curba este dată prin ecuaţii parametrice, atunci

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2 \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3} = \rho^2 \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left|\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right|^3}.$$

Dacă se dă ca parametru lungimea arcului s:

$$T = \frac{1}{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2+y''^2+z''^2} = \rho^2\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right).$$

Torsiunea calculată prin aceste formule (şi raza de torsiune) are semnul + sau —. Dacă $T>0$, pentru un observator care se află pe normala principală paralel cu binormala (v. fig. 1.160), curba pare să se răsucească în sus, *de la dreapta la stînga*. Dacă $T<0$, curba se răsuceşte în sus, *de la stînga la dreapta*.

Exemplu. Pentru o elice $T = \frac{1}{\tau} = \frac{b}{a^2+b^2}$ (torsiunea este constantă).

Formulele lui Serret-Frenet. Derivatele vectorilor unitari $\vec{t}$, $\vec{n}$ şi $\vec{b}$ în raport cu arcul s se exprimă cu ajutorul acestor vectori unitari, al razei de curbură ρ şi al razei de torsiune τ prin formulele

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho};\quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{t}}{\rho} - \frac{\vec{b}}{\tau};\quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\tau}.$$

§ 1.17. Suprafețe

Generalități. *Forma implicită* a ecuației unei suprafețe:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Forma parametrică a ecuațiilor: $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$; $z = z(u, v)$. În particular, dacă se aleg ca parametri două coordonate oarecare (de exemplu, x și y), ecuația suprafeței este de forma $z = z(x, y)$ *(forma explicită)*.

Forma vectorială:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \text{ unde } \vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}.$$

Orice relație între parametri $f(u, v) = 0$ sau $u = u(t)$, $v = v(t)$ împreună cu ecuațiile suprafeței determină o curbă pe suprafață; în particular, ecuațiile u = const și v = const determină pe suprafață două familii de așa-zise *curbe coordonate*, corespunzătoare alegerii date a parametrilor.

Orice pereche de valori $u = u_0$ și $v = v_0$ determină pe suprafață un punct oarecare M (u_0, v_0 — *coordonate gaussiene* sau *curbilinii*); prin punctul M trec două curbe coordonate: $u = u_0$ și $v = v_0$ (fig. 1.164).

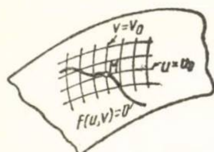


Fig. 1.164.

Planul tangent și normala. Dacă în punctul $M(x, y, z)$ al suprafeței $F(x, y, z) = 0$ cel puțin una dintre derivatele $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ nu se anulează, tangentele la toate curbele care se află pe suprafață și care trec prin punctul M sînt situate în același plan, denumit *plan tangent* (fig. 1.165). Perpendiculara dusă prin punctul M la planul tangent se numește *normala* la suprafață.

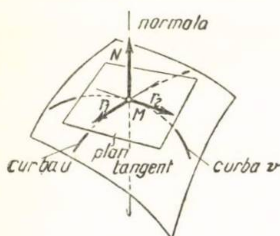


Fig. 1.165.

Planul tangent trece prin vectorii $\vec{r}_1 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ și $\vec{r}_2 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ tangenți la curbele u și v în punctul M. Vectorul $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ este paralel cu normala. Versorul normalei $\vec{N}_0 = \dfrac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}$ determină sensul pozitiv pe normală.

Orice plan care trece prin normala la suprafață se numește *plan normal*.

Dacă într-un anumit punct al suprafeței avem $F'_x = F'_y = F'_z = 0$, tangentele la diferitele curbe situate pe suprafață și care trec prin punctul M nu se află în același plan și formează o suprafață conică.

Ecuațiile planului tangent și ale normalei se găsesc în tabela care urmează. Notații: x, y, z sînt coordonatele punctului M al suprafeței

Ecuațiile planului tangent și ale normalei la suprafață

Forma ecuației suprafeței	Planul tangent	Normala
Explicită	$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y)$	$\frac{X - x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z - z}{-1}$
Implicită	$F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) = 0$	$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z}$
Parametrică	$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$	$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$
Vectorială	$(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{r}_1\vec{r}_2 = 0$ sau $(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{N} = 0$	$\vec{R} = \vec{r} + \lambda(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)$ sau $\vec{R} = \vec{r} + \lambda\vec{N}$

în care sînt duse planul tangent şi normala; X, Y, Z sînt coordonatele curente; $\vec{r}$ este raza vectoare a punctului M; $\vec{R}$ este raza vectoare curentă.

Prima formă pătratică (fundamentală). Diferenţiala arcului ds al curbei situate pe suprafaţă şi care trece prin punctul $M(u,v)$* (elementul liniar al suprafeţei) se află prin formula

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2 \qquad (*)$$

unde

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \vec{r}_1^{\,2};$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \vec{r}_1\vec{r}_2;$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \vec{r}_2^{\,2}.$$

Partea dreaptă a formulei (*) se numeşte prima formă pătratică (fundamentală) a suprafeţei; coeficienţii ei depind numai de poziţia punctului M pe suprafaţă.

Lungimea arcului curbei $u = u(t)$, $v = v(t)$, care se află pe suprafaţă, este

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt,$$

unde t_0 şi t_1 sînt valorile parametrului t corespunzătoare capetelor arcului.

Două suprafeţe diferite, care au aceeaşi primă formă pătratică, pot fi aplicate una pe alta prin *deformare*, îndoire, (adică fără a modifica lungimile arcelor pe suprafaţă).

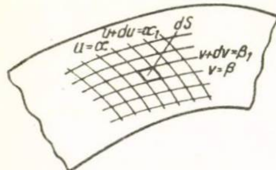


Fig. 1.166.

Aria elementară mărginită de curbele $u = \alpha$, $u + du = \alpha_1$, $v = \beta$, $v + dv = \beta_1$ (fig. 1.166) se află prin formula

$$ds = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Curbura. Două curbe, care trec prin punctul M al suprafeţei şi care au în el un plan tangent comun, au în acest punct aceeaşi curbură (în particular, una dintre aceste curbe poate fi plană, adică poate să se afle în întregime în planul tangent).

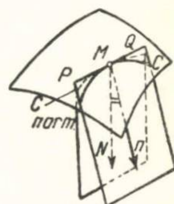
Dacă ρ este raza de curbură a unei curbe C pe suprafaţă, în punctul M, iar R este raza de curbură în punctul M al curbei C_{norm}, obţinute din intersecţia suprafeţei cu planul normal dus prin acest punct şi prin tangenta la curba dată *(secţiune normală)*, atunci $\rho = R\cos\alpha$,

* u şi v sînt coordonatele curbilinii ale punctului M.

unde $\alpha = (\widehat{\vec{n}, \vec{N}})$ este unghiul dintre versorul $\vec{n}$ al normalei principale la curba dată şi versorul $\vec{N}$ al normalei la suprafaţă (fig. 1.167); R trebuie luat pozitiv, dacă versorul $\vec{N}$ al normalei la suprafaţă este îndreptat spre concavitatea secţiunii normale, şi negativ în caz contrar *(teorema lui Meusnier)*.

Secţiunile normale, care trec prin punctul M, cu razele de curbură minimă şi maximă se numesc *secţiuni principale*, iar razele de curbură respective R_1 şi R_2 sînt *raze de curbură principale*.

Planele secţiunilor principale sînt reciproc perpendiculare. Raza de curbură a oricărei secţiuni normale se exprimă prin razele de curbură principale cu ajutorul *formulelor lui Euler*:



$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2},$$

Fig. 1.167.

unde ω este unghiul dintre planul secţiunii considerate şi planul uneia dintre secţiunile principale.

Dacă R_1 şi R_2 corespunzătoare punctului M, au acelaşi semn, suprafaţa (într-o anumită vecinătate a punctului M) este situată de aceeaşi parte a planului tangent şi punctul M se numeşte eliptic (astfel sînt, între altele, toate punctele unui elipsoid). În particular, dacă $R_1 = R_2$, punctul M este *ombilical*.

Dacă R_1 şi R_2 sînt cu semne opuse, suprafaţa se intersectează în punctul M cu planul tangent, iar punctul M este *hiperbolic* (astfel sînt, în particular, toate punctele hiperboloidului cu o singură pînză).

Dacă $R_1 = \infty$ sau $R_2 = \infty$, atunci sau pentru una dintre secţiunile principale punctul M este punct de inflexiune, sau una dintre secţiunile principale este o dreaptă. În acest caz, punctul M este *parabolic* (astfel sînt toate punctele cilindrului).

Expresia $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ se numeşte *curbura medie* a suprafeţei în punctul dat; expresia $K = 1/R_1R_2$ se numeşte *curbura totală* sau *gaussiană*.

Liniile de curbură şi liniile geodezice. Curbele de pe suprafaţă care au în fiecare punct orientarea secţiunilor principale se numesc *linii de curbură**).

Curbele de pe suprafaţă pentru care în fiecare punct normala principală coincide cu normala la suprafaţă, se numesc *linii geodezice.*

Dintre toate arcele care se află pe suprafaţă, şi care unesc două puncte date, lungimea minimă o are arcul liniei geodezice.

Liniile geodezice ale unei suprafeţe cilindrice circulare sînt spirale, ale unui plan sînt drepte, ale unei suprafeţe sferice sînt cercuri mari.

---

*) A se vedea şi Manualul de Geometrie analitică şi diferenţială, p. 690, de E. Murgulescu ş.a., Editura de Stat Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962 (notă Red. E.T.).

1.7
Serii infinite

§ 1.18. Serii de numere

Noțiuni de bază. *Suma parțială* S_n *a seriei de numere* $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ se numește suma primilor săi n termeni:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ există și este finită, seria se numește convergentă și limita menționată se numește suma seriei: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nu există sau este infinită, seria se numește divergentă. De exemplu, o progresie geometrică infinită cu rația q: $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ este convergentă, dacă $-1 < q < 1$, și divergentă dacă $|q| \geqslant 1$.

Suma progresiei geometrice infinite convergente se calculează după formula

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Neglijarea unui număr finit de termeni ai unei serii (sau modificarea mărimilor acestor termeni) nu distruge convergența sau divergența seriei.

Restul unei serii convergente se numește diferența dintre suma sa și suma parțială: $R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$

Criteriile de convergență ale seriilor. Dacă o serie este convergentă limita termenului său general este nulă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (criteriul necesar de convergență). Acest criteriu este insuficient. Astfel, de exemplu seria armonică $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ este divergentă deși criteriul necesar este satisfăcut, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Compararea seriilor. Fie date două serii pozitive (adică două serii cu termeni pozitivi): $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ și $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$ Dacă prima serie este convergentă și $b_n \leqslant a_n$, seria a doua este și ea convergentă. Dacă prima serie este divergentă și $b_n \geqslant a_n$, seria a doua este divergentă și ea.

Criteriul lui D'Alembert. Dacă seria este cu termeni pozitivi și dacă există o constantă $q < 1$ astfel încît începînd de la un anumit n să fie satisfăcută inegalitatea $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, seria este convergentă.

Dacă începînd cu un anumit n este satisfăcută inegalitatea $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, seria este divergentă.

În particular, dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$, seria este convergentă cînd $k<1$, şi divergentă cînd $k>1$; dacă, însă, $k = 1$, seria poate fi convergentă sau divergentă.

Criteriul lui Cauchy. O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă, începînd cu un anumit n, $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, şi divergentă, dacă $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$.

În particular, dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, seria este convergentă pentru $k<1$ şi divergentă pentru $k>1$; în cazul cînd $k=1$, seria poate fi divergentă sau convergentă.

Criteriul integral de convergenţă. Termenul general a_n al unei serii $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ este o funcţie de numărul n: $a_n = f(n)$. Dacă funcţia $f(x)$, care coincide cu $f(n)$ pentru $x = n$ (n este un număr întreg pozitiv), este continuă şi monotonă pentru orice valoare $x \geqslant \alpha$ (α este un număr arbitrar), seria dată este convergentă, dacă integrala $\int_\alpha^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă şi divergentă, dacă această integrală este divergentă (p. 128).

Exemplu. Seria $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ este convergentă pentru $p > 1$ şi divergentă pentru $p < 1$, deoarece funcţia $f(x) = \frac{1}{x^p}$ este monotonă şi continuă pentru $x \geqslant 1$, iar integrala

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)A^{p-1}}\right]$$

este convergentă $\left(\text{şi este egală cu } \frac{1}{p-1}\right)$ pentru $p > 1$ şi divergentă (este infinită) pentru $p<1$.

Pentru $p = 1$ seria este de asemenea divergentă (în acest caz avem seria armonică), deoarece

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty$$

Criteriul lui Lobacevski. Dacă termenii seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ scad monoton, seria este convergentă sau divergentă simultan cu seria $\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$, unde p_m se determină din inegalităţile

$$f(p_m) \geqslant 2^{-m}, \quad f(p_m + 1) \leqslant 2^{-m}.$$

Se poate, de asemenea, determina p_m din relaţia $f(p_m) = 2^{-m}$, dacă funcţia $f(x)$ este monotonă şi definită pentru orice valori ale lui x.

Exemplu. Să se studieze convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Din ecuaţia $\frac{1}{p_m^2} = 2^{-m}$ se determină $p_m = 2^{\frac{m}{2}}$ şi se formează seria $\sum_{n=1}^{\infty} p_m 2^{-m} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}}$. Această serie este o progresie geometrică convergentă şi, prin urmare, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă şi ea.

Criteriul lui V.P. Ermakov. Fie pentru $x \geqslant \alpha$ (α este un număr arbitrar) o funcţie $f(x)$ monotonă şi continuă; în acest caz, seria cu termenul general $a_n = f(n)$ este convergentă dacă există o constantă $q < 1$, astfel încît pentru orice $x > \alpha$ să avem

$$\frac{\varphi'(x)\, f[\varphi(x)]}{f(x)} \leqslant q < 1,$$

şi divergentă, dacă pentru orice $x > \alpha$ avem

$$\frac{\varphi'(x)\, f[\varphi(x)]}{f(x)} > 1,$$

unde $\varphi(x)$ este o funcţie derivabilă oarecare, care satisface condiţia $\varphi(x) > x$ pentru $x > \alpha$.

Dacă există

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi'(x)\, f[\varphi(x)]}{f(x)} = K,$$

seria este convergentă pentru $K < 1$ şi divergentă pentru $K > 1$.

În particular, dacă $\varphi(x) = e^x$, atunci

$$K = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)}.$$

Criteriul lui d'Alembert poate fi obţinut din criteriul lui Ermakov, dacă $\varphi(x) = x + 1$.

Exemplu. Luînd pentru seria

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \ldots$$

$\varphi(x) = e^x$, obţinem:

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)2x}; \quad f[\varphi(x)] = \frac{1}{(2e^x-1)2e^x};$$

$$\varphi'(x) = e^x$$

$$\text{şi} \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(2x-1)}{2e^x-1} = 0<1.$$

Prin urmare, seria dată este convergentă.

Serii alternate. Un criteriu suficient de convergenţă pentru seria alternată $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots$ (aici cu u_1, $u_2\ldots$ sînt notate mărimile absolute (modulele) ale termenilor seriei) este: dacă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ şi dacă începînd de la un anumit n (adică pentru toţi $n\geqslant N$) modulele termenilor seriei variază monoton ($u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\ldots$), seria alternată este convergentă *(teorema lui Leibniz)*.

Dacă seria satisface condiţiile teoremei lui Leibniz, valoarea absolută a restului seriei pentru $n\geqslant N$ nu depăşeşte valoarea absolută a primului termen neglijat al seriei $|R_n|\leqslant u_{n+1}$.

De exemplu, seria $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ este convergentă, deoarece ambele condiţii care intervin în criteriul lui Leibniz sînt satisfăcute.

Convergenţa absolută şi relativă. Dacă seria $|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots$ formată din modulele termenilor seriei $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ este convergentă, seria dată este convergentă şi ea şi se numeşte *serie absolut convergentă.*

De exemplu, seria $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$ este absolut convergentă, deoarece seria ai cărei termeni sînt modulele termenilor acestei serii este convergentă, aşa cum se poate stabili, de exemplu, cu ajutorul criteriului integral.

Se poate întîmpla ca o serie alternată să fie convergentă, iar seria modulelor termenilor să fie divergentă. O astfel de serie se numeşte *semiconvergentă* (sau *relativ* convergentă).

De exemplu, seria $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ este convergentă (v. teorema lui Leibniz), în timp ce seria modulelor termenilor săi (seria armonică) este divergentă; prin urmare, seria dată este semiconvergentă.

Proprietăţile seriilor absolut convergente şi semiconvergente. Proprietatea de comutativitate, care este valabilă pentru sume finite, se extinde numai asupra seriilor absolut convergente: orice permutare de termeni ai unei serii absolut convergente nu modifică nici convergenţa acestei serii, nici suma sa. Pentru o serie semiconvergentă este valabilă următoarea teoremă *(teorema lui Riemann)*: prin permutarea corespunzătoare a termenilor unei serii semiconvergente suma sa poate fi făcută egală cu orice număr dinainte dat şi seria se poate chiar transforma într-o serie divergentă.

Operațiile cu serii. *Suma (diferența)* seriilor $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ și $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ se numește seria $(a_1\pm b_1+(a_2\pm b_2)+\ldots$ $\ldots+(a_n\pm b_n)+\ldots$

Dacă seriile date sînt convergente, suma (diferența) lor este și ea o serie convergentă, iar suma acestei serii este egală cu suma (diferența) sumelor seriilor date. Suma (diferența) unor serii absolut convergente este de asemenea o serie absolut convergentă.

Dacă seriile date sînt divergente, suma (diferența) lor poate totuși să fie convergentă (și chiar în mod absolut); dacă, însă, una dintre seriile date este convergentă, iar cealaltă este divergentă, suma (diferența) lor este totdeauna o serie divergentă.

Produsul seriilor $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ se numește seria $c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots$ cu termenul general $c_n=a_1b_n+$ $+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1$.

Dacă fiecare dintre cele două serii date este convergentă și cel puțin una absolut convergentă, produsul lor este o serie convergentă, a cărei sumă este egală cu produsul sumelor seriilor date. Dacă ambele serii sînt absolut convergente produsul lor este și el o serie absolut convergentă.

Sumele unor serii de numere

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2.$

2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\pm\frac{1}{2^n}\mp\ldots=\frac{2}{3}.$

3) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\pm\frac{1}{n}\mp\ldots=\ln 2.$

4) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\pm\frac{1}{2n-1}\mp\ldots=\frac{\pi}{4}.$

5) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=\mathrm{e}.$

6) $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots\pm\frac{1}{n!}\mp\ldots=\frac{1}{\mathrm{e}}.$

7) $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots\pm\frac{1}{(2n-1)!}\mp\ldots=\sin 1.$

8) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{7!}+\ldots\pm\frac{1}{(2n-2)!}\mp\ldots=\cos 1.$

9) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1.$

10) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots=\frac{1}{2}$.

11) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\ldots=\frac{3}{4}$.

12) $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$.

13) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots=\frac{1}{4}$.

14) $\frac{1}{1\cdot 2\cdots k}+\frac{1}{2\cdot 3\cdots (k+1)}+\frac{1}{3\cdot 4\cdots (k+2)}+\ldots+$

$$+\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}+\ldots=\frac{1}{(k-1)(k-1)!}.$$

15) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$.

16) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\pm\frac{1}{n^2}\mp\ldots=\frac{\pi^2}{12}$.

17) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$.

18) $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots\pm\frac{1}{(2n+1)^2}\mp\ldots=\frac{\pi^2}{32}$.

19) $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$.

20) $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots\pm\frac{1}{n^4}\mp\ldots=\frac{7\pi^4}{720}$.

21) $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96}$.

§ 1.19. Serii de funcţii

Convergenţa. *Domeniul de convergenţă* al unei serii de funcţii $f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$ se numeşte ansamblul tuturor valorilor argumentului x pentru care această serie este convergentă.

Suma acestei serii se numeşte $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, unde

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x).$$

Domeniul de convergenţă al unei *serii de puteri*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

este întotdeauna intervalul *(intervalul de convergenţă)* cu centrul în punctul $x = 0$; în toate punctele interioare ale acestui interval seria este absolut convergentă; la capetele intervalului de convergenţă, ea poate sau să fie convergentă, sau să fie divergentă. O jumătate din lungimea intervalului de convergenţă se numeşte *raza de convergenţă a seriei*. Raza de convergenţă r a seriei de puteri se determină după formula $\frac{1}{r} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (dacă această limită există sau este infinită).

Dacă raza de convergenţă este nulă, seria este convergentă numai în punctul $x = 0$; dacă raza de convergenţă este infinită, seria este convergentă pentru toate valorile argumentului $(-\infty < x < \infty)$.

Pentru seria de puteri cu forma mai generală

$$a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(x - \alpha)^2 + \ldots + a_n(x - \alpha)^n + \ldots$$

centrul intervalului de convergenţă este punctul $x = \alpha$.

Se poate, fără a recurge la formula de mai sus pentru raza de convergenţă (care de altfel nici nu este totdeauna aplicabilă), să se determine intervalul de convergenţă al unei serii de puteri în mod direct, aplicînd criteriile de convergenţă ale seriilor cu termeni pozitivi seriei compuse din valorile absolute ale termenilor seriei de puteri studiate. Pentru cercetarea convergenţei la capetele intervalului, criteriile lui Cauchy şi d'Alembert nu rezolvă, de cele mai multe ori, problema convergenţei şi atunci trebuie să recurgem la alte criterii (criteriul integral al lui Leibniz etc.).

Exemplu. Să se determine intervalul de convergenţă al seriei

$$\frac{x+1}{2\cdot 1} + \frac{(x+1)^2}{2^2\cdot 2} + \frac{(x+1)^3}{2^3\cdot 3} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{2^n\cdot n} + \ldots$$

Termenul general al seriei: $u_n = (x + 1)^n/2^n n$. Aplicînd criteriul lui d'Alembert seriei compuse din modulele termenilor seriei date, se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}2^n n}{(x+1)^n 2^{n+1}(n+1)} \right| = \frac{|x+1|}{2} < 1.$$

Rezolvînd inegalitatea, se găseşte intervalul de convergenţă $-3 < x < 1$. Pentru $x = 1$ obţinem seria armonică, serie divergentă, iar pentru $x = -3$ avem seria $-1 + 1/2 - 1/3 + \ldots$, serie semiconvergentă. Deci, seria este convergentă dacă $-3 \leqslant x < 1$.

Convergenţa uniformă. Seria de funcţii

$$f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

se numeşte *uniform convergentă* într-un anumit domeniu, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există întotdeauna un $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$, pentru toate valorile lui x care aparţin acestui domeniu, să aibă loc inegalitatea $|R_n(x)| < \varepsilon$, unde $R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots$

Dacă modulele termenilor seriei de funcţii date nu depăşesc, într-un anumit domeniu, mărimile termenilor respectivi ai unei serii convergente de numere pozitive, seria dată este uniform convergentă în acest domeniu *(criteriul lui Weierstrass)*. Dacă seria este uniform convergentă într-un anumit interval, suma sa $S(x)$ este contiună şi seria poate fi integrată termen cu termen în intervalul dat, adică pentru toate valorile x şi a care aparţin intervalului dat, are loc egalitatea

$$\int_a^x S(x)\,dx = \int_a^x f_0(x)\,dx + \int_a^x f_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^x f_n(x)\,dx + \ldots,$$

iar seria din partea dreaptă este uniform convergentă.

Dacă într-un anumit domeniu, derivatele termenilor seriei de funcţii date sînt continue şi seria formată din aceste derivate este uniform convergentă, suma acestei din urmă serii este egală cu derivata sumei seriei iniţiale, adică

$$S'(x) = f_0'(x) + f_1'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots$$

Seria de puteri este uniform convergentă pe orice segment, (interval închis) care se află în întregime în interiorul intervalului de convergenţă al acestei serii.

Prin derivarea şi prin integrarea unei serii de puteri, intervalul de convergenţă nu variază.

Seriile Taylor şi MacLaurin. Seria Taylor permite să reprezentăm o funcţie dată $f(x)$ ca sumă a unei serii de puteri

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

Această descompunere este valabilă dacă *restul seriei* $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ tinde spre zero pentru $n \to \infty$.

Aici $S_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$.

Formulele pentru rest:

1) $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ — forma integrală;

2) $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]\ (0 < \theta < 1)$ — *forma (restul lui) Lagrange*;

3) $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} (1-\theta)^n f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]\ (0 < \theta < 1)$ — *forma (restul lui) Cauchy*.

Dezvoltarea unor funcții în serii de puteri

Dezvoltarea în serie	Domeniul de convergență al seriei pentru funcția dată
$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n + \ldots$	$-\lvert a\rvert < x < +\lvert a\rvert$
$a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2\ln^2 a}{2!} + \ldots + \frac{x^n \ln^n a}{n!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2\,835} + \ldots$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \left\{\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4\,725} + \ldots\right\}$	$-\pi < x < \pi$, în afară de $x = 0$
$\arcsin x = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)\cdot(2n+1)} + \ldots$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$

$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$\mathrm{th}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\mathrm{coth}\, x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots$	$-\pi < x < \pi$, în afară de $x = 0$
$\arg \mathrm{sh}\, x = x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)(2n+1)} + \dots$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\arg \mathrm{tg}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$-1 < x < 1$
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$-1 < x \leqslant 1$
$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} + \dots\right]$	$x > 0$
$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right]$	$-1 < x < 1$
$\ln \frac{x+1}{x-1} = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \dots\right]$	$x < -1,\ x > 1$
$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$\int_0^x e^{-x^2}\, dx = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \dots$	$-\infty < x < +\infty$

Egalitatea $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, unde $S_n(x)$ este suma parţială a seriei Taylor, se numeşte *formula lui Taylor*.

Seria MacLaurin se obţine din seria Taylor pentru $a = 0$.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Formulele pentru rest:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_1 x) =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n!} (1 - \theta_2)^n f^{(n+1)}(\theta_2 x) \quad (0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1).$$

Seria Taylor pentru o funcţie de două variabile:

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} k^2 \right] + \dots$$

sau (în scriere simbolică):

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x, y) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x, y) + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x, y) + \dots$$

Restul seriei:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n+1} f(x + \theta_1 h;\ y + \theta_2 k)$$

$$(0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1).$$

Evaluarea restului. Cu ajutorul dezvoltării unei funcţii în serii de puteri se calculează valorile aproximative ale funcţiilor algebrice şi transcendente. Eroarea făcută la înlocuirea sumei unei serii prin suma sa parţială este egală cu restul seriei. La astfel de calcule trebuie să ştim să rezolvăm următoarele trei probleme fundamentale:

1. Să evaluăm eroarea, cunoscînd numărul de termeni ai sumei parţiale, sumă considerată ca valoare numerică aproximativă a funcţiei, adică să evaluăm $|R_n(x)|$ pentru valorile n şi x date.

2. Dîndu-se valoarea maximă, admisibilă, a erorii, să se găsească numărul de termeni ai sumei parţiale, care poate fi luată ca valoare numerică a funcţiei, adică să se găsească n minim din inegalitatea $|R_n(x)| < \delta$, unde x şi δ sînt date.

3. Să se determine valorile argumentului pentru care formula aproximativă, obţinută prin înlocuirea sumei seriei cu suma sa parţi-

ală, să dea o eroare care să nu depăşească o mărime dată, adică să se rezolve în raport cu x inegalitatea $|R_n(x)| < \delta$, unde n şi δ sînt cunoscute.

Exemplul 1. Care este mărimea erorii făcute dacă punem $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$?

În dezvoltarea funcţiei e^x să scriem restul sub forma lui Lagrange $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$; deoarece $n = 4$ şi $x = 1$, $e^{\theta x} < e < 3$ şi $|R_4(1)| < \frac{3}{5!} = 0{,}025$.

Exemplul 2. Cîţi termeni din seria

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

trebuie luaţi pentru a calcula numărul e cu o precizie de 0,0001?

Avem: $R_n(1) = \frac{e^\theta}{(n+1)!}$; $e^\theta < e < 3$. Prin urmare, este suficient să luăm pe n astfel încît să satisfacă inegalitatea $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}0001$; valoarea minimă care satisface această inegalitate este $n = 7$ ($8! = 40\,320$); deci cu precizie pînă la 0,0001,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}.$$

Exemplul 3. Pentru care valori ale lui x formula aproximativă $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ dă o eroare care nu depăşeşte 0,001?

Aici $n = 3$, $R_3(x) = \frac{\cos \theta x}{4!} x^4$; deoarece $|\cos \theta x| < 1$, urmează că $|R_3(x)| < \frac{x^4}{4!}$. Rezolvînd inegalitatea $\frac{x^4}{4!} < 0{,}001$, se obţine

$$|x| < \sqrt[4]{0{,}024} \approx 0{,}394 \text{ (radiani)} \approx 22°23'.$$

Serii Fourier. Dezvoltarea în serie Fourier. Dacă funcţia $f(x)$, definită în intervalul $(-\pi, \pi)$, satisface condiţiile lui Dirichlet, adică dacă în acest interval funcţia: a) este uniform mărginită (adică există o astfel de constantă M, încît $|f(x)| < M$ în toate punctele intervalului); b) are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate şi anume numai de speţa întîi; c) are un număr finit de puncte de maxim şi de minim, atunci ea poate fi dezvoltată în *serie Fourier*, adică în *serie trigonometrică* de forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

unde numerele $a_0, a_1, b_1, .., a_n, b_n, ...$ *(coeficienții Fourier)* se determină prin *formulele lui Euler-Fourier*:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Rolul intervalului $(-\pi, \pi)$ poate să-l joace orice interval $(a, a+2\pi)$, în particular intervalul $(0, 2\pi)$. În acest din urmă caz, coeficienții Fourier se calculează prin formulele:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, ...).$$

În cazul intervalului $(-\pi, \pi)$ suma seriei Fourier $S(x)$ este egală cu: a) valoarea funcției $f(x)$ în orice punct în care $f(x)$ este continuă; b) media aritmetică a valorilor limitelor la stînga și la dreapta ale lui $f(x)$ (p. 97) în orice punct de discontinuitate (fig. 1.168), adică

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2},$$

unde

$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon) \quad \text{și} \quad f(x+0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x+\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0).$$

În afara intervalului $(-\pi, \pi)$ suma seriei este continuarea periodică (cu perioada 2π) a funcției definite mai sus, $S(x)$.

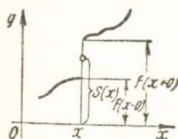


Fig. 1.168.

Dacă funcția $f(x)$ este pară, adică $f(-x) = f(x)$, atunci $b_n = 0 (n = 1, 2, ...)$ și ea se dezvoltă în *seria incompletă Fourier* după cosinusurile arcelor multiple:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx + ...$$

unde coeficienții a_n pot fi calculați prin formulele

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Dacă funcția $f(x)$ este impară, adică $f(-x) = -f(x)$, atunci $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ și ea se dezvoltă în *seria incompletă Fourier* după sinusurile arcelor multiple:

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + ... + b_n \sin nx + ...,$$

unde coeficienţii b_n pot fi calculaţi prin formulele

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

O funcţie dată în intervalul $(0, \pi)$ poate fi prelungită în intervalul $(-\pi, 0)$, fie ca funcţie pară (fig. 1.169 *a*), fie ca funcţie impară fig. 1.169 *b*), după cum dorim; dacă ea satisface condiţiile lui Dirichlet

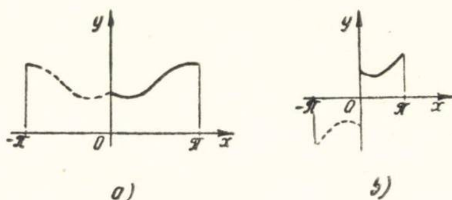


Fig. 1.169.

în intervalul în care este definită, poate fi dezvoltată — după dorinţă — într-o serie Fourier incompletă, numai după sinusurile, sau numai după cosinusurile arcelor multiple.

În cazul mai general în care funcţia $f(x)$ este definită şi satisface condiţiile lui Dirichlet în intervalul $(-l, l)$, ea poate fi dezvoltată într-o serie de forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

unde

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots$ pentru a_n şi $1, 2, \ldots$ pentru $b_n)$.

Suma unei astfel de serii Fourier, $S(x)$, se determină ca şi în cazul particular precedent.

Dacă funcţia $f(x)$ este pară, $b_n = 0$ şi $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$.

Dacă, însă, $f(x)$ este impară, atunci $a_n = 0$ şi $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$.

Proprietăţile coeficienţilor Fourier. Dacă o anumită funcţie $f(x)$ este aproximată în intervalul (a, b) printr-o funcţie $\varphi(x)$, *eroarea pătratică medie* a acestei aproximaţii este numărul δ, determinat prin relaţia $\delta^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2\,dx$.

Dezvoltarea unor funcţii în serii Fourier

Funcţia	Dezvoltarea în serie	Domeniul de convergenţă al seriei pentru funcţia dată	Graficul sumei seriei
$y = x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$	y; -2π $-\pi$ 0 π 2π 3π 4π 5π x
$y = x$	$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right)$	$-\pi < x < \pi$	y; -2π 0 2π 4π $-\pi$ π 3π 5π x
$y = x$	$\pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\right)$	$0 < x < 2\pi$	y; -2π 0 2π 3π x

$y = a$	$\frac{4a}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$	$0 < x < \pi$	
$y = 0$ pentru $0 \leqslant x < \alpha$ şi pentru $\pi - \alpha < x \leqslant \pi$; $y = a$ pentru $\alpha < x < \pi - \alpha$	$\frac{4a}{\pi}\left(\frac{\cos\alpha \sin x}{1} + \frac{1}{3}\cos 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5}\cos 5\alpha \sin 5x + \ldots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$ în afară de $x = \alpha$ şi $x = \pi - \alpha$	
$y = x^2$	$\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$	$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$	
$y = x(\pi - x)$	$\frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$	

(continuare)

$y = x(\pi - x)$	$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$
$y = \sin x$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$
$y = \cos x$	$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 3} + \frac{2\sin 4x}{3\cdot 5} + \frac{3\sin 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$	$0 < x < \pi$
$y = e^x$	$\frac{1}{\pi}\,\mathrm{sh}\,\pi + \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sh}\,\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx - k\sin kx}{1 + k^2}$	$-\pi < x < \pi$

Coeficienţii Fourier ai dezvoltării funcţiei $f(x)$ au următoarea *proprietate minimală*: eroarea pătratică medie datorită aproximării funcţiei $f(x)$ în intervalul $(-\pi, \pi)$ prin intermediul polinomului trigonometric de ordinul n, $\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ este minimă, dacă coeficienţii acestui polinom sînt egali cu coeficienţii Fourier respectivi ai dezvoltării funcţiei $f(x)$.

Coeficienţii Fourier ai dezvoltării funcţiei $f(x)$ sînt legaţi de valoarea pătratică medie a acestei funcţii prin *egalitatea lui Parseval*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx.$$

Dacă funcţia $f(x)$ satisface în orice interval finit condiţiile lui Dirichlet şi dacă integrala $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$ este convergentă, avem formula de dezvoltare a funcţiei în serie Fourier (*integrala Fourier*) (pentru $l \to \infty$).

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos s(t - x) \, dt.$$

1.8
Calculul vectorial

§ 1.20. Algebra vectorială

Noţiuni fundamentale. Mărimile caracterizate de un singur număr pozitiv sau negativ se numesc *mărimi scalare* sau *scalari* (lungimea, temperatura, masa, lucrul mecanic etc.). Mărimile, pentru determinarea cărora este necesar să se cunoască dimensiunile şi orientarea lor în spaţiu, se numesc mărimi *vectoriale* sau *vectori* (forţa, viteza, acceleraţia etc.). Geometric, o mărime vectorială se reprezintă printr-un segment orientat AB şi se notează $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (fig. 1.170). Punctul A se numeşte *origine* (*punct de aplicaţie*), iar punctul B se numeşte *capătul* vectorului. Lungimea vectorului $\vec{a}$ se notează $|\vec{a}|$ sau a. Ea se numeşte şi *modulul* vectorului.



Fig. 1.170.

Vectorul zero (0) este vectorul a cărui origine şi al cărui capăt coincid; lungimea lui este egală cu zero şi direcţia, nedeterminată.

Doi vectori se consideră egali ($\vec{a} = \vec{b}$) dacă lungimile lor sînt egale şi dacă au aceeaşi orientare.

Vectorii paraleli cu aceeaşi dreaptă se numesc *coliniari*. Doi vectori se numesc *opuşi* dacă sînt egali ca lungime şi opuşi ca sens.

Vectorii aşezaţi într-un acelaşi plan sau în plane paralele se numesc *coplanari*.

Versorul sau *vectorul unitar* al vectorului $\vec{a}$ se numeşte vectorul care coincide cu el ca direcţie şi are lungimea egală cu unitatea (notaţia: $\vec{a}^{\circ}$).

Versorii axelor de coordonate se notează prin $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Proiecţiile vectorului $\vec{a}$ pe axele unui sistem de coordonate ortogonal (fig. 1.171) sînt legate de lungimea vectorului şi de cosinusurile sale directoare prin relaţiile:

$$a_x = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, x}); \quad a_y = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, y}); \quad a_z = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, z}).$$

Proiecţia este pozitivă sau negativă, în funcţie de faptul dacă vectorul formează un unghi ascuţit sau un unghi obtuz cu direcţia pozitivă a axei de coordonate respective.

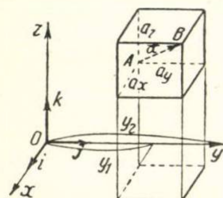


Fig. 1.171.

Vectorul este perfect determinat de trei scalari, proiecţiile sale pe axele de coordonate.

Proiecţiile a_x, a_y, a_z se numesc şi *coordonatele* vectorului în sistemul de coordonate $Oxyz$.

Dacă x_1, y_1, z_1 sînt coordonatele originei vectorului, iar x_2, y_2, z_2 sînt coordonatele vîrfului său, atunci $a_x = x_2 - x_1$; $a_y = y_2 - y_1$; $a_z = z_2 - z_1$.

Lungimea vectorului $\vec{a}$ şi cosinusurile sale directoare se determină prin proiecţiile vectorului după formulele:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, x}) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, y}) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, z}) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Vectorul $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ se numeşte *rază vectoare* a punctului M dacă originea sa coincide cu originea axelor de coordonate şi vîrful său cu punctul M; proiecţiile razei vectoare $\vec{r}$ (fig. 1.172) sînt egale cu coordonatele punctului M: $r_x = x$; $r_y = y$, $r_z = z$.

Operaţiile cu vectorii. *Sumă* a doi vectori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ şi $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ se numeşte vectorul $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ (fig. 1.173) care uneşte originea A a primului termen a cu vîrful C al termenului al doilea $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

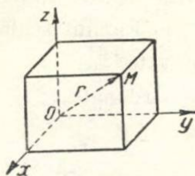


Fig. 1.172.

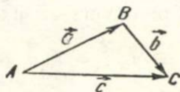


Fig. 1.173.

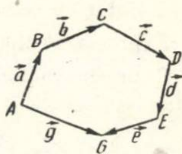


Fig. 1.174.

Suma vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{e}$ (fig. 1.174) este vectorul $\vec{g} = \overrightarrow{AG}$ care închide poligonul $ABC...G$, compus din vectorii-termeni;

$$\vec{g} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots + \vec{e}.$$

Suma vectorială are proprietatea de *comutativitate*: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ şi proprietatea de *asociativitate* $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Diferenţa dintre doi vectori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ şi $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (fig. 1.175) se numeşte vectorul $\vec{c'} = \overrightarrow{AC'}$ care uneşte originea A a vectorului $\vec{a}$ cu vîrful C al vectorului $-\vec{b}$, opus vectorului $\vec{b}$ $(\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{BC})$. Această diferenţă este suma vectorilor $\vec{a}$ şi $-\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Suma şi diferenţa a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (fig. 1.176) pot fi obţinute ca cei doi vectori diagonali ai paralelogramului $\vec{c}$ şi $\vec{c'}$, construit pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Pentru modulul vectorului sumă şi modulul vectorului-diferenţă avem inegalităţile

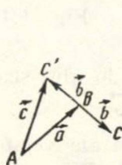
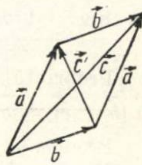


Fig. 1.175.


Fig. 1.176.

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| \leqslant |\vec{a} \pm \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Coordonatele vectorului-sumă şi ale vectorului-diferenţă a doi vectori sînt egale respectiv cu suma şi diferenţa coordonatelor vectorilor componenţi, adică dacă $\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$, atunci $c_x = a_x \pm b_x$; $c_y = a_y \pm b_y$; $c_z = a_z \pm b_z$.

Produsul dintre scalarul m și vectorul $\vec{a}$ este un vector coliniar cu $\vec{a}$, de lungime $|m| \cdot |\vec{a}|$, cu direcția lui $\vec{a}$ pentru $m > 0$ și cu direcția opusă lui $\vec{a}$ pentru $m < 0$.

Proprietăți fundamentale: $m\vec{a} = \vec{a}m$; $m(n\vec{a}) = n(m\vec{a})$; $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$; $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$.

Dacă vectorul $\vec{b}$ este coliniar cu vectorul $\vec{a}$, atunci $\vec{b} = m\vec{a}$.

Dacă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ sînt coplanari, unul dintre ei este o combinație liniară a celorlalți doi, adică $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (m și n sînt scalari).

Expresia vectorului $\vec{a}$ prin versorul său $\vec{a}^0$ este: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$.

Expresia vectorului $\vec{a}$ prin versorii axelor de coordonate:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Vectorii $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$, $a_z\vec{k}$ se numesc *componentele* vectorului $\vec{a}$ pe axele de coordonate.

În particular, pentru raza vectoare $\vec{r}$ a punctului $M(x, y, z)$ (fig. 1.177) avem $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (notația $\vec{a}\vec{b}$) se numește produsul lungimilor vectorilor factori cu cosinusul unghiului dintre ele sau, cu alte cuvinte, produsul dintre lungimea unuia dintre vectorii factori și proiecția celui de al doilea (fig. 1.178) pe direcția primului:

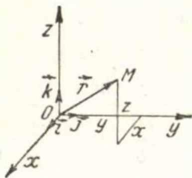


Fig. 1.177.

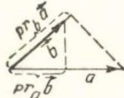


Fig. 1.178.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = |\vec{a}|\, \text{pr}_a \vec{b} = |\vec{b}|\, \text{pr}_b \vec{a}.$$

Proprietățile produsului scalar: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$; $m \cdot \vec{a}\vec{b} = m\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot m\vec{b}$; $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

Produsele scalare ale versorilor axelor de coordonate: $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$; $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$.

Expresia produsului scalar a doi vectori prin coordonatele vectorilor factori $\vec{a}\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.

Unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se determină după formula

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Condiţia de perpendicularitate a doi vectori: $\vec{a}\vec{b} = 0$ sau, cu ajutorul proiecţiilor, $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Produsul vectorial a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (notaţia: $[\vec{a}\ \vec{b}]$ sau $\vec{a} \times \vec{b}$) este un vector c cu lungimea numeric egală (fig. 1.179) cu aria paralelogramului construit pe vectorii factori, orientat perpendicular pe planul paralelogramului, astfel încît vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ să formeze un triedru drept, adică rotaţia cea mai mică de la $\vec{a}$ la $\vec{b}$, dacă privim din capătul vectorului $\vec{c}$, să se efectueze în sens contrar sensului de mişcare a acelor de ceasornic.

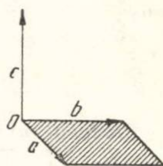


Fig. 1.179.

Modulul produsului vectorial este legat de modulele vectorilor-factori prin relaţia $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

La permutarea vectorilor-factori, produsul vectorial îşi schimbă orientarea, astfel că $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

Produsul vectorial a doi vectori are proprietăţile:

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = m\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times m\vec{b};\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Produsele vectoriale ale versorilor axelor de coordonate:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0;\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k};\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i};\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j};$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k};\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i};\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Expresia produsului vectorial cu ajutorul proiecţiilor vectorilor-factori:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Proiecţiile sale:

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\quad c_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix};\quad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ poate fi calculată după formula

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}.$$

Condiţia de coliniaritate a doi vectori este $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, iar cu ajutorul proiecţiilor:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Produsul mixt (vectorial-scalar) a trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ (fig. 1.180) [notaţia: $(\vec{a} \times \vec{b})\, c$ sau $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$] este un scalar care în mărime absolută este egal cu volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$, ca muchii. Produsul mixt este pozitiv, dacă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ formează un triedru drept şi negativ, dacă ei formează un triedru stîng. Produsul mixt a trei vectori îşi schimbă semnul la permutarea a doi factori; la o permutare ciclică (circulară) a tuturor celor trei factori, produsul nu-şi schimbă semnul:

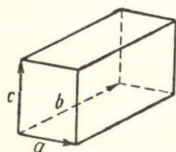


Fig. 1.180.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

Expresia produsului mixt a trei vectori cu ajutorul proiecţiilor vectorilor-factori:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Condiţia de coplanaritate a trei vectori este $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ sau, cu ajutorul proiecţiilor,

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Produsul vectorial dublu a trei vectori [notaţia: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$] este un vector coplanar cu vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$; el poate fi calculat după formula $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$.

§ 1.21. Analiza vectorială

Funcţia vectorială. Dacă vectorul $\vec{a}$ variază în funcţie de un argument scalar t, el se numeşte *funcţie vectorială* de argumentul scalar: $\vec{a} = \vec{a}(t)$.

Funcţia vectorială $\vec{a} = \vec{a}(t)$ poate fi definită dacă se dau trei funcţii scalare — proiecţiile sale pe axele de coordonate — $a_x = a_x(t)$, $a_y = a_y(t)$, $a_z = a_z(t)$:

$$\vec{a} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}.$$

Vîrful M al unei raze vectoare variabile $\vec{r} = \vec{r}(t)$ descrie o curbă în spaţiu (fig. 1.181) numită *hodograful* vectorului $\vec{r}$.

Ecuaţiile hodografului $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ $(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.

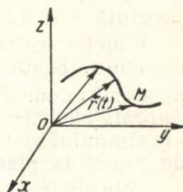


Fig. 1.181.

Derivata unei funcţii vectoriale $\vec{a} = \vec{a}(t)$ *în raport cu argumentul scalar* t este

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = a'_x(t)\vec{i} + a'_y(t)\vec{j} + a'_z(t)\vec{k}.$$

Derivata razei vectoare $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ reprezintă un vector (fig. 1.182) tangent la hodograf în punctul respectiv.

Lungimea vectorului $d\vec{r}/dt$ depinde de alegerea parametrului t; dacă t este lungimea arcului s al hodografului, calculat de la un anumit punct iniţial al hodografului pînă în punctul M, lungimea vectorului $d\vec{r}/ds$ este egală cu 1.

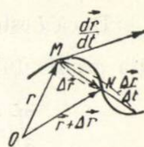


Fig. 1.182.

Regulile fundamentale de derivare a funcţiei vectoriale de argument scalar:

1) $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \dfrac{d\vec{a}}{dt} + \dfrac{d\vec{b}}{dt} - \dfrac{d\vec{c}}{dt}$;

2) $\dfrac{d(\varphi\vec{a})}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt}\vec{a} + \varphi\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, unde $\varphi = \varphi(t)$ este o funcţie scalară de t;

3) $\dfrac{d(\vec{a}\,\vec{b})}{dt} = \dfrac{d\vec{a}}{dt}\vec{b} + \vec{a}\dfrac{d\vec{b}}{dt}$;

4) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$

5) $\frac{d}{dt}\vec{a}(\varphi(t)) = \frac{d\vec{a}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$.

Pentru vectorul unitar, şi în general pentru vectorul $\vec{r}$ de lungime constantă, există relaţia $\vec{r}\,(d\vec{r}/dt) = 0$, care arată că tangenta la hodograf este perpendiculară pe raza vectoare; în acest caz, hodograful reprezintă o curbă pe sferă.

Funcţia scalară $f(x, y, z)$, definită în toate punctele unui anumit domeniu, poate fi considerată ca o funcţie de punctul $P(x, y, z)$ al acestui domeniu [notaţie: $f(P)$] şi defineşte un anumit *cîmp scalar*. Suprafeţele $f(x, y, z) = c$ (c = const) se numesc *suprafeţe de nivel* ale cîmpului scalar dat [în cazul unei funcţii de două variabile — funcţie de punct în plan — curbele $f(x, y) = c$ sînt *linii de nivel*].

Prin orice punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ trece o suprafaţă de nivel, pentru care valoarea c se determină din relaţia $c = f(M_0) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Gradientul cîmpului scalar $f(P) = f(x, y, z)$ [notaţia: grad $f(P)$ sau grad $f(x, y, z)$] într-un punct dat se numeşte vectorul orientat după normala n la suprafaţa de nivel [pentru funcţia $f(x, y)$, la linia de nivel] în acest punct, în sensul creşterii funcţiei, şi ca lungime egal cu derivata funcţiei date după această direcţie (v. p. 106).

$$|\text{grad}\, f(x, y, z)| = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial n}.$$

Dacă l este o direcţie arbitrară, derivata $\frac{\partial f}{\partial l}$ este egală cu proiecţia gradientului pe direcţia l:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n}\cos(\widehat{l, n}) = |\text{grad}\, f|\cos(\widehat{l, n}) = \text{grad}_l\, f.$$

În particular, $\text{grad}_x\, f = \frac{\partial f}{\partial x}$; $\text{grad}_y\, f = \frac{\partial f}{\partial y}$; $\text{grad}_z\, f = \frac{\partial f}{\partial z}$. Vectorul $\vec{A}(x, y, z)$ care depinde de coordonatele punctului $P(x, y, z)$ şi este definit în toate punctele unui anumit domeniu, se numeşte *funcţie vectorială* de punctul P sau *cîmp vectorial*.

Exemplu. Să se determine cîmpul gradientului funcţiei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Suprafeţele de nivel ale acestei funcţii, $x^2 + y^2 + z^2 = C$, sînt suprafeţe sferice cu centrul în originea axelor de coordonate. Avem

$$\text{grad}_x\, f = 2x; \text{grad}_y\, f = 2y; \text{grad}_z\, f = 2z \text{ şi } |\text{grad}\, f| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dacă este dat cîmpul vectorial $\vec{A}(x,y,z)$, atunci în fiecare punct (x, y, z) sînt cunoscute funcţiile scalare $A_x(x, y, z)$; $A_y(x, y, z)$; $A_z(x, y, z)$ — proiecţiile vectorului $\vec{A}$ pe axele de coordonate (reciproc: A_x, A_y, A_z definesc un cîmp vectorial).

Divergenţa cîmpului vectorial $\vec{A}(P) = \vec{A}(x, y, z)$ (notaţia: $\operatorname{div} \vec{A}$) se numeşte scalarul

$$\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}.$$

Pentru funcţia vectorială $\vec{A}(x, y)$, care depinde de două variabile:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}.$$

Rotorul cîmpului vectorial $\vec{A}(P) = \vec{A}(x, y, z)$ se numeşte vectorul $\vec{B}(x, y, z)$ (notaţia: $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ sau $\vec{B} = \operatorname{curl} \vec{A}$), ale cărui proiecţii pe axele de coordonate B_x, B_y, B_z se exprimă prin proiecţiile vectorului $\vec{A}$ cu ajutorul egalităţilor:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

În cazul funcţiei vectoriale $\vec{A}(x, y)$, care depinde de două argumente, avem: $B_x = B_y = 0$, $B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$, iar vectorul $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ este orientat totdeauna ca axa Oz; uneori este indicat să se considere rotorul ca un scalar:

$$B = B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Circulaţia şi fluxul. *Circulaţia* vectorului $\vec{A}(x, y, z)$ (circulaţia cîmpului vectorial) pe un contur în spaţiu, închis, C se numeşte integrala curbilinie $\int_C A_s \mathrm{d}s$, unde $\mathrm{d}s$ este diferenţiala arcului conturului C, iar A_s este proiecţia vectorului $\vec{A}$ pe direcţia pozitivă a tangentei la conturul C.

Dacă $\mathrm{d}\vec{s}$ este un vector, a cărui lungime este egală cu diferenţiala arcului şi care este orientat pe tangenta la conturul C în direcţia pozitivă ($\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ sînt proiecţiile vectorului $\mathrm{d}s$ pe axele de coordonate), avem $A_s \mathrm{d}s = \vec{A}\, \mathrm{d}\vec{s}$.

Circulaţia vectorului $\vec{A}$ pe conturul C poate fi scrisă sub forma

$$\int_C \vec{A}\,d\vec{s} \text{ sau } \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Circulaţia unui cîmp vectorial plan $\vec{A}\,(x, y)$:

$$\int_C A_s ds = \int_C \vec{A}\,d\vec{s} = \int_C A_x dx + A_y dy.$$

Fluxul vectorului $\vec{A}\,(x, y, z)$ (fluxul cîmpului vectorial) prin suprafaţa S se numeşte integrala de suprafaţă $\iint_S A_n dS$, unde A_n este proiecţia vectorului $\vec{A}$ pe direcţia n aleasă după normala la suprafaţă.

Dacă $d\vec{S}$ este un vector, a cărui lungime este numeric egală cu aria elementară dS a suprafeţei şi care este orientat pe normala la suprafaţă în direcţia pozitivă, avem $A_n dS = \vec{A}\,d\vec{S}$, iar fluxul vectorului prin suprafaţă poate fi scris sub forma $\iint_S \vec{A}d\vec{S}$ sau

$$\iint_S \left[A_x \cos(\widehat{n,x}) + A_y \cos(\widehat{n,y}) + A_z \cos(\widehat{n,z})\right] dS.$$

Fluxul cîmpului vectorial plan $\vec{A}\,(x,y)$ prin arcul l:

$$\int_l A_n ds = \int_l \vec{A}d\vec{n} = \int_l \left[A_x \cos(\widehat{n,x}) + A_y \cos(\widehat{n,y})\right] ds =$$
$$= \int_l A_x dy - A_y dx,$$

unde $d\vec{n}$ este vectorul cu lungimea ds, orientat pe normala la contur în direcţia pozitivă.

Formulele lui Stokes (pentru cîmpul plan — *formula lui Green*) şi *Gauss-Ostrogradski* (v. p. 149) leagă circulaţia şi fluxul vectorului de rotor şi de divergenţă:

1) $$\int_C A_s ds = \iint_\sigma \text{rot}_n \vec{A}\,d\sigma,$$

unde C este un contur închis care mărgineşte suprafaţa σ , iar n este normala exterioară la suprafaţă (formula lui Stokes);

2) $$\int_\sigma A_n d\sigma = \iiint_V \text{div}\,\vec{A}\,dV,$$

unde σ este o suprafață închisă care mărginește domeniul V, iar n este normala exterioară la suprafața σ (formula lui Gauss-Ostrogradski).

Relațiile care leagă o funcție scalară f de gradientul său și vectorul $\vec{A}$ de rotorul său:

$$\int_\sigma f\,d\vec{S} = \iiint_V \text{grad}\, f\, dV; \quad \int_\sigma \vec{A} \times d\vec{S} = -\iiint_V \text{rot}\,\vec{A}\, dV.$$

Aici σ este o suprafață închisă, iar V este volumul mărginit de ea.

Cîmpul vectorului $\vec{A}$ se numește *potențial sau irotațional* dacă vectorul $\vec{A}$ este gradientul unei funcții $f(x, y, z)$, numită *funcție potențială*: $\vec{A} = \text{grad}\, f$; în acest caz

$$A_x = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad A_y = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad A_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

și expresia $A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz = df$ este o diferențială totală; pentru aceasta este necesar și suficient ca

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0,$$

adică se cere ca vectorul rot $\vec{A}$ să fie nul în orice punct. Într-un cîmp potențial circulația vectorului pe orice contur închis C este nulă: $\oint_C A_s\, ds = 0$.

Cîmpul vectorului $\vec{A}$ se numește *solenoidal*, dacă în orice punct al cîmpului div $\vec{A} = 0$, adică dacă $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$; în acest caz fluxul vectorului prin orice suprafață închisă este nul.

Dacă cîmpul este simultan potențial și solenoidal, atunci div grad $f = 0$ (f este funcție potențială), iar funcția potențială este *armonică*, adică satisface *ecuația lui Laplace*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right.$ — *operatorul lui Laplace*$\Big)$.

Dacă divergența vectorului $\vec{A}$ este nulă în toate punctele cîmpului vectorial, cu excepția unui număr finit de puncte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ în care condiția de solenoidalitate nu este satisfăcută sau devine lipsită de sens din cauză că cel puțin una dintre derivatele $\frac{\partial A_x}{\partial x}$, $\frac{\partial A_y}{\partial y}$, $\frac{\partial A_z}{\partial z}$

devine infinită, atunci fluxul vectorului $\vec{A}$ prin suprafaţa în interiorul căreia se află punctul M_i poate fi diferit de zero. Dacă fluxul vectorului $\vec{A}$ prin suprafaţa închisă σ, care mărgineşte domeniul în interiorul căruia se află numai unul dintre aceste puncte M_i, este diferit de zero şi egal cu N_σ, atunci punctul M_i se numeşte *sursă* dacă $N_\sigma > 0$ şi *puţ* dacă $N_\sigma < 0$. Numărul N_σ se numeşte *intensitatea* (sau debitul) sursei sau puţului. În mod analog se definesc noţiunile de sursă, puţ şi intensitate în cazul unui cîmp plan (în locul fluxului printr-o suprafaţă închisă se consideră fluxul printr-un contur închis).

Dacă cîmpul vectorial plan $\vec{A}(x, y)$ este potenţial (irotaţional) în toate punctele, în afară de un număr finit de puncte $M_1, M_2, \ldots, M_r$, în care condiţia de potenţialitate nu este satisfăcută sau devine lipsită de sens din cauză că cel puţin una dintre derivatele parţiale care intervin în această condiţie devine infinită, atunci circulaţia pe conturul închis în interiorul căruia se află punctele M_i poate fi diferită de zero. Dacă circulaţia pe conturul C (parcurs o singură dată în sens opus sensului mişcării acelor de ceasornic), care delimitează domeniul în interiorul căruia se află numai unul dintre aceste puncte M_i, este egală cu Γ_c şi diferită de zero, atunci punctul M_i se numeşte *punct rotaţional*, iar numărul Γ_c, *intensitatea rotorului* în punctul M_i. În cazul unui cîmp spaţial, rolul punctelor rotaţionale este jucat de *liniile rotaţionale*, iar conturul C ocoleşte linia rotaţională (adică linia rotaţională intersectează domeniul delimitat de conturul C şi care se află pe o suprafaţă arbitrară ce trece prin conturul C).

Pentru scrierea formulelor de analiză vectorială este comod să se folosească *operatorul lui Hamilton* ∇ *(nabla)*, unde ∇ este un vector simbolic; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. Astfel de exemplu, grad $f = \nabla f$; div $\vec{A} = \nabla\vec{A}$; rot $\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$; $\nabla\nabla = \Delta$.

1.9
Ecuaţii diferenţiale

Ecuaţie diferenţială ordinară se numeşte o ecuaţie care conţine argumentul, funcţia căutată a acestui argument şi derivatele ei de ordine diferite $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Ordinul cel mai mare al derivatei funcţiei căutate, din ecuaţia dată, se numeşte *ordinul* acestei ecuaţii.

Orice funcţie care, fiind înlocuită împreună cu derivatele sale de ordine corespunzătoare într-o ecuaţie diferenţială în locul funcţiei căutate şi a derivatelor sale, preface această ecuaţie în identitate

(satisface identic ecuaţia) se numeşte *soluţia* (*integrala*) ecuaţiei diferenţiale.

Soluţia unei ecuaţii diferenţiale poate conţine constante arbitrare. Pentru determinarea acestor constante arbitrare sînt necesare condiţii suplimentare.

§ 1.22. Ecuaţii de ordinul întîi

Teorema de existenţă (Cauchy). Dacă într-un domeniu al planului xOy care conţine punctul (x_0, y_0), funcţia $f(x, y)$ este continuă şi satisface *condiţia lui Lipschitz* $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < A|y_1 - y_2|$ (A este o constantă în domeniul dat) există o singură funcţie continuă într-o anumită vecinătate a punctului x_0, y_0, funcţia $y = f(x)$, care este soluţia ecuaţiei $y' = f(x, y)$ şi care satisface condiţia iniţială, $y = y_0$ pentru $x = x_0$.

Orice soluţie despre care este vorba în teorema lui Cauchy (la valori x_0 şi y_0 date) se numeşte *soluţie particulară* a ecuaţiei diferenţiale. Ansamblul tuturor soluţiilor particulare se numeşte *soluţie generală*. Soluţia generală a unei ecuaţii de ordinul întîi conţine o constantă arbitrară C. Soluţia unei ecuaţii care nu conţine constanta arbitrară şi care nu este soluţie particulară (şi, prin urmare, nu este obţinută din soluţia generală pentru nici o valoare a constantei arbitrare care intervine în ea) se numeşte *singulară**).

Graficul soluţiei ecuaţiei diferenţiale se numeşte *curba integrală* a acestei ecuaţii. Soluţia generală a ecuaţiei de ordinul întîi este reprezentată, prin urmare, printr-o familie de curbe integrale cu un parametru.

Ecuaţia diferenţială $y' = f(x, y)$ dă coeficientul unghiular al tangentei la curba integrală ca funcţie de coordonatele punctului de tangenţă. Ansamblul punctelor în care este definită funcţia $f(x, y)$ şi al dreptelor orientate după tangentele la curbele integrale, care trec prin aceste puncte, formează aşa-numitul *cîmp de direcţii* al ecuaţiei diferenţiale date.

Curbele $f(x, y) = \text{const}$ se numesc *izocline*. În toate punctele fiecărei izocline tangentele la curbele integrale, duse prin aceste puncte, sînt paralele între ele. Pe fig. 1.183 sînt reprezentate curbele integrale (cercurile $x^2 + y^2 = C$) şi izoclinele (dreptele $y = kx$) pentru ecuaţia $y' = -\frac{x}{y}$.

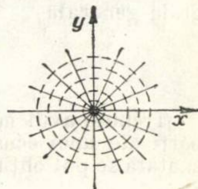


Fig. 1.183.

Ecuaţii cu diferenţiale totale. Ecuaţia $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ în cazul cînd avem identitatea $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, se numeşte *ecuaţie în diferenţiale totale* (*exacte*).

*) În toate punctele curbei care reprezintă soluţia singulară condiţiile teoremei lui Cauchy nu sînt satisfăcute.

Soluţia generală a unei astfel de ecuaţii are forma $u(x, y) = C$, unde

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M\,(x,y)\,; \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N\,(x,y), \text{ adică } \mathrm{d}u = M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y.$$

Funcţia $u\,(x,y)$ se determină prin relaţia $u(x,y)=\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y)$,

unde $\varphi(y)$ se deduce din ecuaţia $\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y)\right] = N\,(x,y)$.

Dacă condiţia $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ nu este satisfăcută, există o funcţie $\mu\,(x,y)$ (*factor integrant*), astfel încît ecuaţia $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0$ se reduce la o ecuaţie în diferenţiale totale (exacte) după înmulţirea cu $\mu\,(x,y)$.

Ca factor integrant putem alege orice soluţie particulară a ecuaţiei

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \text{ sau } N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Dacă, în particular, expresia $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ depinde numai de x, atunci la căutarea factorului integrant putem presupune că şi el depinde numai de x.

Ecuaţii cu variabile separabile. O ecuaţie de forma $y' = \varphi(x)\,\psi(y)$ se numeşte ecuaţie cu *variabile separabile*. Transformînd-o (*separînd variabilele*) în ecuaţia de forma $\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} - \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, găsim integrala generală

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} - \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x = C.$$

Trebuie avut în vedere că la înmulţirea sau la împărţirea ambelor părţi ale unei ecuaţii diferenţiale cu o expresie care conţine funcţia căutată se pot obţine şi soluţii străine sau se pot pierde soluţii.

Ecuaţii omogene. *O ecuaţie omogenă* este de forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Ea se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile prin substituţia $y=ux$ (în acest caz $y' = u'x + u$).

Ecuaţiile de forma $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ se reduc la ecuaţii omogene, în cazul $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, prin substituţia $x = u + \alpha$, $y=v+\beta$, unde α şi β se determină din sistemul de ecuaţii $a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$,

$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$. Dacă însă, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, atunci, punînd $a_1x + b_1y = t$, obţinem o ecuaţie cu variabile separabile.

Ecuaţii liniare. *Ecuaţie diferenţială liniară de primul ordin* se numeşte o ecuaţie de forma $y' = P(x)y + Q(x)$ liniară în raport cu y şi y'. Soluţia ei generală se obţine prin formula

$$y = e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right].$$

Dacă se cunoaşte o soluţie particulară a ecuaţiei liniare $y = y_1(x)$, soluţia generală se obţine cu ajutorul unei *cuadraturi* (unei integrări)

$$y = y_1(x) + Ce^{\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

Dacă se cunosc două soluţii particulare, liniar independente (p. 210), $y = y_1(x)$ şi $y = y_2(x)$, soluţia generală se află fără cuadraturi $y = y_1(x) + C\left[y_2(x) - y_1(x)\right]$.

Ecuaţia lui Bernoulli. Ecuaţia de forma $y' = P(x)y + Q(x)y^n$ (*ecuaţia lui Bernoulli*) se reduce la o ecuaţie liniară, cu ajutorul substituţiei $y^{1-n} = t$.

Ecuaţia lui Clairaut. Soluţia generală a *ecuaţiei lui Clairaut*, $y = xy' + \psi(y')$, este de forma $y = Cx + \psi(C)$.

Soluţia singulară se obţine din ecuaţiile $y = Cx + \psi(C)$, $0 = x + \psi'(C)$ prin eliminarea lui C.

Curba integrală corespunzătoare soluţiei singulare este înfăşurătoarea (p. 157) familiei de drepte determinate prin soluţia generală (fig. 1.184).

Exemplu. Ecuaţia $y = xy' + y'^2$ are soluţia generală $y = Cx + C^2$; eliminînd C din ecuaţiile $y = Cx + C^2$, $0 = x + 2C$, se obţine soluţia singulară, sub forma explicită, $y = -x^2/4$.

Ecuaţia lui Lagrange. Ecuaţia lui Clairaut este o formă particulară a *ecuaţiei lui Lagrange* $y = x\varphi(y') + \psi(y')$.

Făcînd substituţia $y' = p$ şi diferenţiind egalitatea obţinută în raport cu x, se ajunge la ecuaţiile

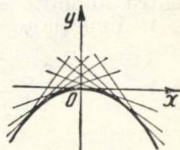


Fig. 1.184.

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{x\varphi'(p) + \psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

A doua dintre aceste ecuaţii $[p - \varphi(p) \neq 0]$ este liniară $\left(\text{în raport cu funcţia } x \text{ şi derivata } \frac{\partial x}{\partial p}\right)$ şi soluţia sa generală împreună cu prima ecuaţie determină, sub forma parametrică, integrala generală a ecuaţiei lui Lagrange.

Dacă $p - \varphi(p) = 0$ pentru $p = p_0$, atunci $y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$ este o soluţie singulară a ecuaţiei lui Lagrange.

§ 1.23. Ecuaţii de ordin superior

Teorema de existenţă (Cauchy). Pentru ca ecuaţia $y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ să aibă o singură soluţie $y = \varphi(x)$, continuă în vecinătatea punctului x_0 şi care să satisfacă condiţiile iniţiale $y = y_0$, $y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ pentru $x = x_0$, este suficient ca funcţia $f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$, unde $x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ sînt argumente independente, să fie continuă într-o anumită vecinătate a punctului $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$, adică pentru toate valorile argumentelor care satisfac sistemul de inegalităţi $x_0 - h < x < x_0 + h$,

$$y_0 - k < y < y_0 + k,\ y'_0 - k_1 < y_1 < y'_0 + k_1, \ldots, y_0^{(n-1)} -$$

$$- k_{n-1} < y_{n-1} < y_0^{(n-1)} + k_{n-1}, \quad \text{unde} \quad h, k, k_1, \ldots, k_{n-1}$$

sînt constante pozitive şi să satisfacă condiţia lui Lipschitz

$$|f(x,\bar{y},\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{n-1}) - f(x,y,y_1,\ldots,y_{n-1})| <$$
$$< A\,(|\bar{y} - y| + |\bar{y}_1 - y_1| + \ldots + |\bar{y}_{n-1} - y_{n-1}|).$$

Soluţia generală a ecuaţiei $y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{n-1})$ conţine n constante arbitrare $C_1, C_2, \ldots, C_n$ şi se reprezintă geometric printr-o familie de curbe integrale cu n parametri.

Orice sistem de condiţii iniţiale de forma $y = y_0$, $y' = y'_0, \ldots, y^{n-1} = y_0^{n-1}$, pentru $x = x_0$, în cazul cînd sînt satisfăcute condiţiile teoremei lui Chauchy, ne permite să găsim valorile $C_1, C_2, \ldots, C_n$, care determină soluţia particulară respectivă.

Ecuaţiile care admit micşorarea ordinului. Micşorînd ordinul prin intermediul substituţiei $y' = p$, se poate obţine soluţia generală pentru anumite ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea.

1) Ecuaţia $y'' = f(y)$: soluţia generală $x =$

$$= \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} + C_2.$$

2) Ecuaţia $y'' = f(y')$: soluţia generală $x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} + C_2$,

unde pentru găsirea funcţiei $p = \varphi(y, C_1)$ trebuie să rezolvăm ecuaţia $y = \int \frac{p\,dp}{f(p)} + C_1$ în raport cu p.

3) Ecuaţia $y'' = f(x,y')$: soluţia generală $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$,

unde $p = \varphi(x, C_1)$ este soluţia generală a ecuaţiei $\frac{dp}{dx} = f(x,p)$.

4) Ecuaţia $y'' = f(y,y')$: soluţia generală $x = \int \frac{dy}{\varphi(y,C_1)} + C_2$, unde $p = \varphi(y,C_1)$ este soluţia generală a ecuaţiei $p\frac{dp}{dy} = f(y,p)$.

Soluţia generală a ecuaţiei $y^{(n)} = f(x)$ se află prin integrare succesivă de n ori.

Ecuaţia $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ se reduce prin substituţia $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$; $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dp}{dx}$ la ecuaţia cu variabile separabile $\frac{dp}{dx} = f(p)$.

Ordinul ecuaţiei care nu conţine funcţia căutată y, $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$, se micşorează cu o unitate cu ajutorul substituţiei $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ etc.

Dacă în afară de y lipsesc din ecuaţie şi derivatele pînă la ordinul $k - 1$ inclusiv, trebuie să se efectueze substituţia $y^{(k)} = p$.

Pentru a micşora ordinul unei ecuaţii, care nu conţine argumentul x, se scrie $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$ etc.

Ecuaţii liniare. *Ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n* se numeşte ecuaţia de forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

liniară în raport cu funcţia căutată şi cu derivatele sale.

Dacă *partea dreaptă* a ecuaţiei $f(x)$ este identic nulă, ecuaţia se numeşte *omogenă* (sau ecuaţie *fără partea dreaptă*); în caz contrar, ea se numeşte *neomogenă*.

Dacă funcţiile $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sînt soluţii particulare ale ecuaţiei *omogene liniare* şi totodată sînt liniare independente (v. mai departe), atunci soluţia generală a ecuaţiei omogene este de forma

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x).$$

Funcţiile $y_1(x)$, $y_2(x)$, .., $y_n(x)$ se numesc *liniar independente*, dacă identitatea $\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \ldots + \alpha_ny_n(x) = 0$, unde α_i sînt constante, poate avea loc numai în cazul cînd $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca aşa-numitul *determinant al lui Wronski (wronskian)*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

să fie diferit de zero. Wronskianul format pentru n soluţii particulare ale unei ecuaţii liniare de ordinul n [dacă coeficienţii $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ ai acestei ecuaţii sînt continui] poate să se anuleze numai identic.

Dacă $Y(x)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei liniare neomogene, iar $u(x)$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene respective, atunci funcţia $u(x) + Y(x)$ este soluţia generală a ecuaţiei neomogene.

Dacă $Y_1(x)$ şi $Y_2(x)$ sînt soluţiile a două ecuaţii liniare cu aceeaşi parte stîngă şi cu părţile drepte $f_1(x)$ şi $f_2(x)$, funcţia $Y_1(x) + Y_2(x)$ este o soluţie a ecuaţiei cu aceeaşi parte stîngă şi cu partea dreaptă $f_1(x) + f_2(x)$.

Ecuaţii omogene liniare cu coeficienţi constanţi. Pentru găsirea soluţiei generale a unei ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi constanţi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — constante reale), trebuie să formăm aşa-numita *ecuaţie caracteristică* $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0$ şi să găsim rădăcinile ei, după care cele n soluţii particulare liniar independente $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ ale ecuaţiei se obţin (sub formă reală) după următoarele reguli:

1) fiecărei rădăcini reale k de ordin de multiplicitate p îi corespund p soluţii particulare liniar independente:

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ \ldots,\ x^{p-1}e^{kx};$$

2) fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate $\alpha \pm \beta i$ de ordin de multiplicitate q îi corespund $2q$ soluţii particulare liniar independente:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{q-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{q-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Soluţia generală se exprimă prin relaţia

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x).$$

Exemplul 1: să se rezolve ecuaţia $y''' - 4y'' + 4y' = 0$;

$k^3 - 4k^2 + 4k = 0$; $k_1 = 0$, $k_{2,3} = 2$; $y = C_1 + e^{2x}(C_2 + C_3x)$.

Exemplul 2. Să se rezolve ecuaţia $y^{VI} + y^{IV} - y'' - y = 0$;

$k^6 + k^4 - k^2 - 1 = 0$; $k_1 = -1$; $k_2 = 1$; $k_{3,4} = i$; $k_{5,6} = -i$;

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x.$$

Ecuaţii liniare neomogene cu coeficienţi constanţi. Dacă s-a găsit o soluţie particulară $Y(x)$ a ecuaţiei liniare neomogene cu coeficienţi constanţi $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$ şi se cunoaşte soluţia generală $u(x)$ a ecuaţiei omogene respective, atunci $y = u(x) + Y(x)$ este soluţia generală a ecuaţiei neomogene date. Dacă, în particular, $f(x) = P(x)\,e^{ax}\cos bx$ sau $f(x) = P(x)e^{ax}\sin bx$, unde $P(x)$ este un polinom de gradul m, soluţia particulară trebuie căutată sub forma $Y(x) = x^pe^{ax}[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx]$, unde

$Q_1(x)$ şi $Q_2(x)$ sînt polinoame de gradul m cu coeficienţi nedeterminaţi; p este ordinul de multiplicitate a rădăcinii ecuaţiei caracteristice egală cu $a + bi$ (dacă numărul $a + bi$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci $p = 0$).

Exemplu. Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei $y'' + \frac{y}{4} = x \sin \frac{x}{2}$. Aici numărul $a + bi = \frac{i}{2}$ este rădăcina simplă a ecuaţiei caracteristice $k^2 + \frac{1}{4} = 0$ şi, prin urmare, soluţia particulară a ecuaţiei trebuie căutată sub forma

$$Y(x) = x\left[(A_1x + B_1)\sin\frac{x}{2} + (A_2x + B_2)\cos\frac{x}{2}\right].$$

Găsind de aici Y'' şi înlocuind în ecuaţie, se obţine

$$[-2A_2x + (2A_1 - B_2)]\sin\frac{x}{2} + [2A_1x + (2A_2 + B_1)]\cos\frac{x}{2} = x\sin\frac{x}{2}.$$

Comparînd coeficienţii din ambele părţi ale egalităţii, rezultă

$$-2A_2 = 1;\ 2A_1 - B_2 = 0;\ 2A_1 = 0,\ 2A_2 + B_1 = 0,$$

de unde $A_1 = 0$; $B_1 = 1$; $A_2 = -1/2$, $B_2 = 0$ şi

$$Y(x) = x\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}x^2\cos\frac{x}{2}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene respective este $u(x) = C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}$ şi, prin urmare,

$$y = C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2} + x\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}x^2\cos\frac{x}{2}.$$

În anumite cazuri particulare putem folosi următoarele reguli:
1) Dacă $f(x)$ este un polinom de gradul m:

$$f(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

şi $a_n \neq 0$, soluţia particulară a ecuaţiei trebuie căutată sub forma unui polinom de acelaşi grad (cu coeficienţi nedeterminaţi):

$$Y(x) = B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_{m-1}x + B_m;$$

dacă, însă, $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-p+1} = 0$, $a_{n-p} \neq 0$, atunci soluţia particulară se caută sub forma $Y(x) = x^p(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots B_{m-1}x + B_m)$.

2) Dacă $f(x) = ke^{ax}$ şi a nu este o rădăcină a ecuaţiei caracteristice, soluţia particulară se caută sub forma $Y(x) = Ae^{ax}$, unde A este un coeficient nedeterminat; dacă, însă, a este o rădăcină a ecuaţiei caracteristice, de ordin de multiplicitate p, atunci $Y(x) = Ax^p e^{ax}$.

3) Dacă $f(x) = m \cos bx + n \sin bx$ şi bi nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, soluţia particulară trebuie căutată sub forma $Y(x) = M \cos bx + N \sin bx$, unde M, N sînt coeficienţi nedeterminaţi; dacă, însă, $\pm bi$ este o pereche de rădăcini a ecuaţiei caracteristice, de ordin de multiplicitate p, atunci $Y(x) = x^p(M \cos bx + N \sin bx)$.

În cazul cînd $f(x)$ din partea dreaptă are o formă arbitrară, soluţia generală a ecuaţiei neomogene se află prin metoda *variaţiei constantelor arbitrare* sub forma $y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \ldots + C_n(x)\, y_n(x)$, unde $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sînt, ca şi înainte, soluţii liniare independente ale ecuaţiei omogene respective, iar funcţiile $C_1(x)$, $C_2(x), \ldots, C_n(x)$ se determină din următorul sistem de ecuaţii algebrice, de gradul întîi în raport cu derivatele respective:

$$C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n(x) = 0$$

$$C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n'(x) = 0$$

....

$$C_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)\, y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) = 0$$

$$C_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + C_2(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Rezolvînd acest sistem, se găseşte $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$; prin integrare se pot determina funcţiile $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$, iar fiecare dintre aceste funcţii va conţine un termen constant arbitrar.

Exemplu. Soluţia generală a ecuaţiei $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$ trebuie căutată sub forma $y = C_1(x)\, e^{-x} + C_2(x)\, xe^{-x}$ ($y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene).

Pentru determinarea lui $C_1(x)$ şi $C_2(x)$, se formează sistemul de ecuaţii:

$$C_1'(x)\, e^{-x} + C_2'(x)\, xe^{-x} = 0;$$

$$-C_1'(x)\, e^{-x} + C_2'(x)\, (e^{-x} - xe^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x};$$

de unde $C_1'(x) = -1$; $C_2'(x) = \frac{1}{x}$ şi $C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = \ln x + C_2$).

Aşadar, $y = (C_1 - x)\, e^{-x} + (C_2 + \ln x)\, xe^{-x}$.

Ecuaţia lui Euler. Ecuaţia liniară cu coeficienţi variabili de forma $(\alpha x + \beta)^n y^{(n)} + a_1(\alpha x + \beta)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(\alpha x + \beta)\, y' + a_n y = f(x)$ *(ecuaţia lui Euler)* se reduce la o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi prin substituţia $\alpha x + \beta = e^t$.

Calculul operaţional. Transformarea Laplace $\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ asociază funcţiei $f(t)$, funcţia $\bar{f}(p)$; $f(t)$ se numeşte original, iar $\bar{f}(p)$ *imagine* (transformată). Trecerea de la original la imagine se scrie pe scurt: $f(t) \to \bar{f}(p)$. Se presupune că funcţia $f(t)$ este continuă şi netedă pe porţiuni pentru $t \geqslant 0$ [adică $f(t)$ şi $f'(t)$ au pe fiecare segment finit nu mai mult decît un număr finit de puncte de discontinuitate, şi anume de speţa întîi] şi creşte nu mai repede decît o funcţie exponenţială, adică $|f(t)| < Me^{st}$, unde M, s sînt constante, iar $f(t) \equiv 0$ pentru $t<0$.

Proprietăţile cele mai simple ale transformării Laplace:

1) $cf(t) \to c\bar{f}(p)$ (c — constantă);

2) $f_1(t) + f_2(t) \to \bar{f}_1(p) + \bar{f}_2(p)$;

3) $f'(t) \to p\bar{f}(p) - f(0)$;

4) $f^{(n)}(t) \to p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$;

5) $\int_0^t f(t)\, dt \to \frac{1}{p} \bar{f}(p)$;

6) $f(t - \tau_0) \to e^{-p\tau_0}\bar{f}(p)$ ($\tau_0 > 0$ — constantă);

7) $f(at) \to \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{p}{a}\right)$;

8) $e^{at} f(t) \to \bar{f}(p - a)$;

9) $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau)\, d\tau \to \bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p)$.

Pentru a găsi soluţia $x(t)$ a ecuaţiei diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi $x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_nx(t) = f(t)$, care să satisfacă condiţiile iniţiale $x(0) = x_0$; $x'(0) = x_0' \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$, trebuie să aplicăm ambelor părţi ale ecuaţiei transformarea Laplace, ceea ce duce la relaţia

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{f}(p) + \varphi(p)}{Q(p)}, \text{ unde } Q(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$$\varphi(p) = p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)} +$$

$$+ a_1(p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}x_0.$$

(În particular, dacă $x_0 = x_0' = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0$, atunci $\varphi(p.) \equiv 0$. În acest caz soluţia ecuaţiei diferenţiale se numeşte *soluţie particulară normală)*. Pentru găsirea soluţiei, rămîne să trecem de la imaginea $\bar{x}(p)$ la originalul $x(t)$. Pentru aceasta se poate folosi tabela de imagini şi originale şi proprietăţile transformării Laplace. Dacă funcţia $\frac{\bar{f}(p) + \varphi(p)}{Q(p)}$ este o fracţie raţională regulată, este indicat, de obicei, s-o dezvoltăm în fracţii elementare.

Se dă în continuare o tabelă sumară de originale şi imagini.

Nr.	$\bar{f}(p)$ — imagine	$f(t)$ — original
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$
3	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
4	$\frac{1}{(p+a)^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$
5	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
6	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
7	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\operatorname{sh} at$
8	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
9	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
10	$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin at$
11	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
12	$\frac{a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at - at\cos at)$
13	$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{\cos at - \cos bt}{b^2-a^2}$
14	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin bt$
15	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
16	$\frac{p}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{a^2}\sin\frac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{at}{\sqrt{2}}$
17	$\frac{p^3}{p^4+a^4}$	$\cos\frac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{at}{\sqrt{2}}$

(continuare)

Nr.	$\bar{f}(p)$ — imagine	$f(t)$ — original
18	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
19	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$
20	$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$	$\frac{1-e^{-t}}{t}$
21	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{\sqrt{p}}$	$\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\sin a\sqrt{t}$
22	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{p\sqrt{p}}$	$\frac{4}{a^2\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a}\sin a\sqrt{t}-\sqrt{t}\cos a\sqrt{t}\right)$
23	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\ (a\geqslant 0)$	$\frac{ae^{-\frac{a^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}\,t\sqrt{t}}$

Exemplu. Să se găsească soluţia particulară normală şi soluţia generală a ecuaţiei $y''' + 2y'' + y' + 2y = \sin x$. Transformarea Laplace duce la ecuaţia algebrică $(p^3 + 2p^2 + p + 2)\,Y(p) = \frac{1}{p^2+1}$, de unde

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p^3+2p^2+p+2)} = \frac{1}{(p^2+1)^2(p+2)}.$$

Descompunînd în sumă de fracţii simple, se obţine

$$Y(p) = \frac{-\frac{1}{5}p+\frac{2}{5}}{(p^2+1)^2} + \frac{-\frac{1}{25}p+\frac{2}{25}}{p^2+1} + \frac{\frac{1}{25}}{p+2}$$

şi folosind tabela de mai înainte se găseşte soluţia particulară normală

$$y(x) = -\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{2}\sin x + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}(\sin x - x\cos x) - \frac{1}{25}\cos x +$$

$$+\frac{2}{25}\sin x + \frac{1}{25}e^{-2x} \text{ sau } y(x) = \frac{1}{25}e^{-2x} - \frac{1}{25}\cos x +$$

$$+\frac{7}{25}\sin x - \frac{x}{10}(2\cos x + \sin x).$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene respective este de forma $u = C_1e^{-2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, şi, prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = C_1e^{-2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{x}{10} (2 \cos x + \sin x).$$

Dacă se caută numai soluţia generală a ecuaţiei, calculele se simplifică foarte mult, deoarece este suficient, ţinînd seama de forma soluţiei generale a ecuaţiei omogene, să avem în vedere numai prima dintre fracţiile simple care apar în expresia pentru $Y(p)$.

1.10
Metode aproximative în analiză

§ 1.24. Rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor algebrice şi transcendente

Rezolvarea grafică a ecuaţiilor. Metodele grafice de rezolvare a ecuaţiilor algebrice şi transcendente se aplică în cazurile cînd nu este nevoie de o precizie mare.

Pentru a găsi pe cale grafică rădăcinile reale ale unei ecuaţii de forma $f(x) = 0$, trebuie să se construiască graficul funcţiei $y = f(x)$ şi să se determine punctele de intersecţie sau, în cazul rădăcinilor multiple, punctele ei de tangenţă cu axa Ox. Abscisele acestor puncte vor fi rădăcinile căutate ale ecuaţiei $f(x) = 0$.

Exemplu. Să se rezolve grafic ecuaţia $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

Se construieşte graficul funcţiei $y = x^3 + 3x^2 - 2$; abscisele intersecţiei acestui grafic cu axa Ox sînt rădăcinile ecuaţiei: $x_1 = -2{,}73$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0{,}73$ (fig. 1.185); pe desen, scara de pe axa Oy a fost aleasă de şase ori mai mică decît pe axa Ox.

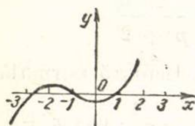


Fig. 1.185.

Uneori este indicat să împărţim termenii ecuaţiei $f(x) = 0$ în două grupe, păstrînd în partea stîngă unul sau cîţiva termeni şi trecînd restul în partea dreaptă. În acest caz, ecuaţia capătă forma $f_1(x) = f_2(x)$, după care trebuie: să construim două grafice $y = f_1(x)$ şi $y = f_2(x)$ şi să găsim punctele de intersecţie ale graficelor construite. Abscisele acestor puncte vor fi rădăcinile căutate ale ecuaţiei $f(x) = 0$. Avantajul acestei metode se manifestă în mod deosebit în cazurile cînd una dintre funcţii, de exemplu $f_2(x)$, este liniară şi rezolvarea grafică a ecuaţiei se reduce la găsirea punctului de intersecţie a curbei $y = f_1(x)$ cu dreapta $y = f_2(x) = kx + b$. Atunci cînd este

necesar să se rezolve un număr mare de ecuații de același tip de forma $f_1(x) = kx + b$, care diferă numai prin coeficienții funcției liniare din partea dreaptă, este indicat să se deseneze o dată graficul funcției $y = f_1(x)$ pe o foaie de hîrtie transparentă, după care, pentru rezolvarea unei ecuații oarecare de tipul dat, rămîne să se construiască la aceeași scară dreapta $y = kx + b$, să se suprapună peste ea foaia cu curba desenată $y = f_1(x)$ și să se determine abscisele punctelor de intersecție. Pentru rezolvarea altei ecuații de acest tip, trebuie să se ducă numai o nouă dreaptă, care corespunde părții drepte respective a acestei ecuații, folosind de fiecare dată aceeași foaie cu graficul funcției $y = f_1(x)$.

În fig. 1.186 sînt date soluțiile grafice a două ecuații cubice $x^3 - 7x - 6 = 0$ și $x^3 + 2{,}8\,x - 7 = 0$. Rădăcinile primei ecuații sînt $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$; ecuația a doua are o singură rădăcină reală $x_1 = 1{,}4$. Scara pe axa Oy este aleasă de 20 de ori mai mică decît pe axa Ox.

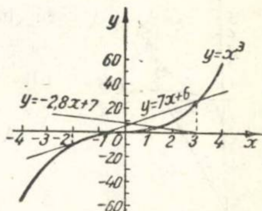


Fig. 1.186.

Pentru rezolvarea grafică a unui sistem de două ecuații cu două necunoscute $f(x,y) = 0$, $\varphi(x,y) = 0$. se construiesc curbele corespunzătoare acestor ecuații și se determină punctele de intersecție ale curbelor. Coordonatele fiecăruia dintre punctele de intersecție dau o pereche de valori pentru necunoscutele x și y, care satisfac sistemul.

Metoda iterației. Pentru rezolvarea ecuației $f(x) = 0$ prin metoda iterației (repetării), se transcrie ecuația sub forma $x + f(x) - x = 0$ sau $x = \varphi(x)$, unde $\varphi(x) = x + f(x)$.

Pe cale grafică sau printr-o altă metodă oarecare se găsește valoarea inițială aproximativă a rădăcinii x_0 și se înlocuiește în partea dreaptă a ecuației $x = \varphi(x)$ în locul lui x; se obține astfel prima valoare mai corectă a rădăcinii: $x^{(1)} = \varphi(x_0)$. Punînd analog în $\varphi(x)$ în locul lui x valoarea calculată $x^{(1)}$, se găsește a doua valoare corectată $x^{(2)} = \varphi(x^{(1)})$.

Repetînd acest procedeu de cîteva ori, se obține

$$x^{(3)} = \varphi(x^{(2)});\; x^{(4)} = \varphi(x^{(3)});\; \ldots;\; x^{(n)} = \varphi(x^{(n-1)}).$$

Procesul de iterație încetează îndată ce se obține precizia dorită, adică atunci cînd valoarea absolută a diferenței dintre două valori consecutive ale rădăcinii devine mai mică decît eroarea admisă.

Pentru ca procesul de iterare să fie convergent, este suficient să fie îndeplinită condiția $|\varphi'(x)| < 1$ într-o anumită vecinătate a rădăcinii căutate, care conține punctul x_0. Convergența este cu atît mai rapidă, cu cît $|\varphi'(x)|$ este mai mic. Deoarece funcția $\varphi(x)$ poate fi aleasă în mod arbitrar, trebuie să avem în vedere că la o alegere nefericită a lui $\varphi(x)$ procesul de iterare poate să ducă nu la micșorarea, ci la mărirea erorii. Astfel, de exemplu, metoda iterării nu poate fi aplicată la ecuația $x = \operatorname{tg} x$; însă dacă transformăm această ecuație în ecuația $x = \operatorname{arctg} x$, procesul de iterație devine convergent.

Exemplu: Să se găsească rădăcina reală a ecuației $\lg x - 2x + 7 = 0$.

Pentru a găsi valoarea aproximativă inițială a rădăcinii, transcriem ecuația sub forma $\lg x = 2x - 7$; construim curba $y = \lg x$ și dreapta $y = 2x - 7$ (fig. 1.187) și determinăm abscisa punctului de intersecție: $x_0 = 3{,}8$.

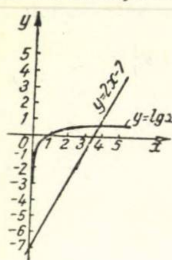


Fig. 1.187.

Transformînd ecuația dată în $x = \frac{\lg x + 7}{2}$ și înlocuind în partea dreaptă x prin valoarea $x_0 = 3{,}8$, se obține valoarea corectată a rădăcinii: $x^{(1)} = \frac{1}{2}(\lg 3{,}8 + 7) = 3{,}79$.

Analog se calculează: $x^{(2)} = \frac{1}{2}(\lg 3{,}79 + 7) = 3{,}7893$; $x^{(3)} = \frac{1}{2}(\lg 3{,}7893 + 7) = 3{,}7893$.

Dacă ne limităm la valoarea aproximativă a rădăcinii cu cinci cifre exacte, putem să întrerupem calculele, admițînd $x = 3{,}7893$.

Convergența rapidă a procesului de iterație se explică prin aceea că în cazul nostru mărimea $|\varphi'(x)|$ este mică: $|\varphi'(x)| = \left|\frac{1}{2x}\right| \approx \approx \frac{1}{7{,}6}$.

Metoda iterației poate fi aplicată și atunci cînd ecuația este dată sub forma unei serii infinite. Astfel, de exemplu, dacă avem ecuația $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \ldots = 0{,}4431$ o transcriem sub forma $x = 0{,}4431 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42} - \frac{x^9}{216} + \ldots$; neglijînd termenii superiori începînd cu x^3 și rotunjind termenul liber, avem $x^{(0)} = 0{,}44$.

Introducînd valoarea 0,44 în partea dreaptă a ecuației în locul lui x, găsim $x^{(1)} = 0{,}4431 + \frac{(0{,}44)^3}{3} - \frac{(0{,}44)^5}{10} + \frac{(0{,}44)^7}{42} \approx 0{,}470$.

Analog obținem $x^{(2)} = 0{,}4431 + \frac{(0{,}47)^3}{3} - \frac{(0{,}47)^5}{10} + \frac{(0{,}47)^7}{42} \approx \approx 0{,}476$ etc.

Pentru aplicarea metodei iterației la rezolvarea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute $f_1(x, y) = 0$; $f_2(x, y) = 0$ le transcriem sub forma $x = \varphi_1(x, y)$; $y = \varphi_2(x, y)$.

Determinînd grafic (sau pe altă cale) valorile aproximative inițiale ale rădăcinilor x_0 și y_0 și înlocuindu-le în ecuații, se obține prima aproximație $x^{(1)} = \varphi_1(x_0, y_0)$; $y^{(1)} = \varphi_2(x_0, y_0)$.

Analog se găsesc aproximațiile următoare

$$\left.\begin{aligned} x^{(2)} &= \varphi_1(x^{(1)}, y^{(1)}), \\ y^{(2)} &= \varphi_2(x^{(1)}, y^{(1)}), \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x^{(3)} &= \varphi_1(x^{(2)}, y^{(2)}) \\ y^{(3)} &= \varphi_2(x^{(2)}, y^{(2)}) \end{aligned}\right\} \text{ etc.}$$

Pentru convergenţa proceselor de iteraţie, este suficient să fie satisfăcute condiţiile $\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| < 1$ şi $\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| < 1$ în vecinătatea punctului (x_0, y_0), iar convergenţa va fi cu atît mai rapidă, cu cît va fi mai mică fiecare dintre părţile din stînga ale ambelor inegalităţi.

La fel se aplică metoda iteraţiei şi la rezolvarea sistemelor de ecuaţii cu un număr mare de necunoscute.

Separarea rădăcinilor unei ecuaţii. Separarea rădăcinilor unei ecuaţii $f(x) = 0$ constă în determinarea a două numere a şi b, între care să se afle o singură rădăcină reală a ecuaţiei. Dacă partea stîngă a ecuaţiei $f(x)$ reprezintă o funcţie continuă, iar ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcini reale, atunci dînd lui x diferite valori numerice succesive şi calculînd valorile respective ale funcţiei $f(x)$, putem determina o pereche de valori a şi b apropiate între ele $(a < b)$, pentru care valorile funcţiei vor avea semne diferite. În acest caz, între a şi b se află cel puţin o rădăcină reală a ecuaţiei noastre. Continuînd să calculăm valorile funcţiei pentru valorile lui x cuprinse între a şi b, putem înlocui intervalul (a, b) cu un interval mai mic (a', b'), la capetele căruia $f(x)$ are de asemenea semne diferite, şi putem continua astfel, pînă cînd acest interval devine mai mic decît eroarea absolută cu care dorim să determinăm rădăcina ecuaţiei.

De exemplu, dacă este dată ecuaţia $x \lg x - 1{,}2 = 0$, pentru separarea rădăcinilor se formează o tabelă de valori x şi de valorile corespunzătoare acestora $f(x) = x \lg x - 1{,}2$.

x	$f(x) = x \lg x - 1{,}2$	x	$f(x) = x \lg x - 1{,}2$
0	−1,2	1,0	−1,2
0,2	−1,34	2,0	−0,6
0,4	−1,36	3,0	+0,23
0,6	−1,33	4,0	+1,21
0,8	−1,28		

Această tabelă arată că f(2) şi f(3) sînt cu semne diferite şi de aceea în intervalul (2,3) se află o rădăcină a ecuaţiei $x \lg x - 1{,}2 = 0$, micşorînd prin metoda indicată intervalul obţinut, se poate determina valoarea acestei rădăcini cu orice precizie.

Metoda indicată de separarea rădăcinilor nu este aplicabilă pentru separarea unei rădăcini multiple a funcţiei $f(x)$, dacă ordinul de multiplicitate a rădăcinii este un număr par (sau în cazul cînd există un număr par de rădăcini foarte apropiate). O astfel de rădăcină este o rădăcină simplă sau multiplă, de ordin impar, a derivatei $f'(x)$ şi separarea ei poate fi efectuată cu ajutorul metodei indicate mai înainte, care trebuie aplicată funcţiei $f'(x)$. Desigur, trebuie să avem în vedere că nu orice rădăcină a funcţiei $f'(x)$ poate fi rădăcină a funcţiei $f(x)$ şi, de aceea, trebuie să facem o verificare înlocuind rădăcina găsită în $f(x)$.

Interpolarea liniară (metoda coardelor). Pentru a aplica această metodă, trebuie în prealabil să efectuăm separarea rădăcinii căutate a ecuaţie $f(x) = 0$. Precizarea valorii rădăcinii se face după formula

$$x^{(1)} = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} \text{ sau } x^{(1)} = b - \frac{(b-a)d(b)}{f(b)-f(a)}.$$

Valoarea aproximativă a rădăcinii obţinute prin această formulă este abscisa punctului de intersecţie a coardei MN_1 a curbei $y = f(x)$ cu axa Ox (fig. 1.188), în timp ce valoarea exactă a rădăcinii este abscisa punctului de intersecţie a arcului MN_1 cu axa Ox.

Prima aproximaţie obţinută a rădăcinii poate fi din nou precizată prin aplicarea repetată a aceleiaşi formule pentru cel mai mic dintre intervale $(a, x^{(1)})$ sau $(x^{(1)}, b)$, la capetele căruia $f(x)$ are semne diferite:

$$x^{(2)} = a - \frac{(x^{(1)} - a)f(a)}{f(x^{(1)}) - f(a)} \text{ sau } x^{(2)} = b - \frac{(b - x^{(1)})f(b)}{f(b) - f(x^{(1)})}.$$

Din punct de vedere geometric, aplicarea repetată a metodei înseamnă apropierea de rădăcină cu ajutorul coardelor MN_1, MN_2 etc.

Exemplu: să se rezolve ecuaţia $x \lg x - 1,2 = 0$.

Din tabela de la p. 219 se vede că rădăcina acestei ecuaţii se află între 2 şi 3. De aceea, calculînd prima valoare aproximativă a rădăcinii, se obţine $x^{(1)} = 2 - \frac{(3-2)(-0,6)}{0,23-(-0,6)} = 2,72$.

Deoarece $f(2,72) = -0,017$ şi $f(3) = 0,23$ au semne diferite, aplicînd de două ori metoda coardelor intervalului (2,72; 3), se oţine următoarea aproximaţie

$$x^{(2)} = 2,72 - \frac{(3-2,72-(-0,017)}{0,23-(-0,017)} \approx 2,74.$$

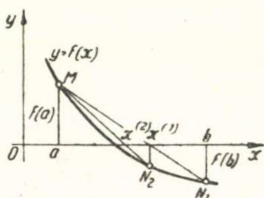


Fig. 1-188.

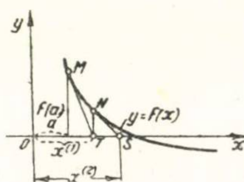


Fig. 1-189

Metoda lui Newton. Pentru a obine o valoare mai exactă rădăcinii $x = a$ a ecuaţiei $f(x) = 0$, putem folosi *formula lui Newton* $x^{(1)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ care din punct de vedere geometric înseamnă că arcul curbei $y = f(x)$ este înlocuit cu tangenta MT (fig. 1.189), iar în locul valorii exacte a rădăcinii x (abscisa punctului de intersecţie a curbei cu axa Ox) se ia ca valoare aproximativă $x^{(1)}$ (abscisa punctului de intersecţie a tangentei cu axa Ox).

Prin aplicarea repetată a metodei lui Newton putem corecta prima aproximaţie obţinută a rădăcinii:

$$x^{(2)} = x_1^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})};$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{f'(x^{(2)})}; \ldots$$

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{f(x^{(n-1)})}{f'(x^{(n-1)})}.$$

Din punct de vedere geometric, aceasta înseamnă apropierea de rădăcină, cu ajutorul tangentelor MT, NS etc.

Dacă curba $y = f(x)$, la intersecţia cu axa Ox, este aproape paralelă cu ea, adică dacă mărimea $f'(x)$ este aproape de zero, se recomandă să se recurgă la metoda coardelor sau la alte metode.

Dacă într-un anumit interval (a, b), care conţine rădăcina ecuaţiei $f(x) = 0$, mărimea $f''(x)$ are semnul constant, este indicat să se facă simultan calculul atît prin metoda lui Newton, cît şi prin metoda coardelor; una dintre metode va da valori aproximative ale rădăcinii cu erori în minus, iar cealaltă cu erori în plus, ceea ce va permite să se evalueze precizia obţinută.

Exemplu. Să se determine rădăcina reală a ecuaţiei $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Aproximaţia iniţială $x = 2$ (fig. 1.190) se determină grafic. Precizarea ulterioară a rădăcinii se efectuează cu ajutorul formulei lui Newton:

$$x^{(1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 + \frac{1}{10} = 2{,}1.$$

Apoi se găseşte

$$x^{(2)} = 2{,}1 - \frac{f(2{,}1)}{f'(2{,}1)} = 2{,}0946$$

şi

$$x^{(3)} = 2{,}0946 - \frac{f(2{,}0946)}{f'(2{,}0946)} = 2{,}09455148.$$

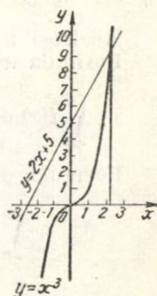


Fig. 1-190.

Metoda menţionată este aplicabilă şi pentru obţinerea valorilor aproximative ale rădăcinilor unui sistem de ecuaţii. De exemplu, dacă pentru sistemul $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, numerele $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ sînt valorile iniţiale aproximative ale rădăcinilor sistemului, atunci aproximaţiile lor succesive $x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(1)}$, $y^{(1)} = y^{(0)} + k^{(1)}$ se obţin determinînd pe $h^{(1)}$ şi $k^{(1)}$ din sistemul de ecuaţii:

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}\right]_0 h^{(1)} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]_0 k^{(1)} + [f_1]_0 = 0$$

$$\left[\frac{\partial f_2}{\partial x}\right]_0 h^{(1)} + \left[\frac{\partial f_2}{\partial y}\right]_0 k^{(1)} + [f_2]_0 = 0,$$

unde indicele zero de pe lîngă paranteze înseamnă că în funcții și în derivatele lor trebuie să înlocuim pe x și y prin valorile $x^{(0)}$ și $y^{(0)}$.

Pentru obținerea unor valori mai exacte a rădăcinilor, trebuie să repetăm metoda indicată și să găsim corecțiile următoare $h^{(2)}$, $k^{(2)}$ etc.

§ 1.25. Integrarea numerică (cuadraturi mecanice)

Dacă într-o integrală definită $\int_a^b f(x)\,dx$ funcția de sub integrală este dată printr-o tabelă, ea poate fi integrată numeric, adică putem calcula aproximativ valoarea integralei definite (putem să efectuăm *cuadratura mecanică)*. Dăm mai jos cîteva formule utile pentru cuadraturile mecanice.

Formula dreptunghiurilor:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

sau

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n),$$

unde $y_0 = f(x_0)$; $y_1 = f(x_0 + h)$; $x_2 = f(x_0 + 2h)$; ...; $y_n = f(x_0 + nh)$, iar $x_0 = a$, $x_n = a + nh = b$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Aceleași notații sînt adoptate și în următoarele două formule.

Formula trapezelor:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Formula parabolelor (Simpson):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + $$
$$+ 2y_4 + \dots + 4y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n),$$

unde n este par.

Formula lui Cebîșev;

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n)],$$

unde

$$X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_i,$$

iar abscisele x_i sînt date mai departe în tabela I.

Pentru $n = 8$ şi pentru $n > 9$ formula lui Cebîşev nu este aplicabilă (abscisele sînt imaginare).

I. *Abscisele x_i pentru formula lui Cebîşev*

n	x_1	x_2	x_3	x_4
2	0,577350	−0,577350		
3	0,707107	0	−0,707107	
4	0,794654	0,187592	−0,187592	−0,794654
5	0,832498	0,374541	0	−0,374541
6	0,866247	0,422519	0,266635	−0,266635
7	0,883862	0,529657	0,323919	0
9	0,911589	0,601019	0,528762	−0,167906

n	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
2					
3					
4					
5	−0,832498				
6	−0,422519	−0,866247			
7	−0,323919	−0,529657	−0,883862		
9	0	−0,167906	−0,528762	−0,601019	−0,911589

Formula lui Gauss:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\left[A_1 f(X_1) + A_2 f(X_2) + \ldots + A_n f(X_n)\right],$$

unde $X_i = a + (b - a)\,x_i$, iar coeficienţii A_i şi abscisele x_i sînt date în tabela II.

Precizia fiecărei formule a cuadraturilor mecanice este de regulă cu atît mai mare, cu cît este mai mare n. Pentru aceleaşi valori n, formula a doua este mai precisă decît prima, iar a treia este în general şi mai precisă şi de aceea se foloseşte mai des.

Exemplu. Să se calculeze $I = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ (valoarea exactă $I = 1$):

a) După formula trapezului. Pentru $n = 10$ se obţine

$$\frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{20} = 0{,}1570796 = 9^\circ$$

şi

$$I = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1570796\,[\sin 0^\circ + 2\sin 9^\circ + 2\sin 18^\circ + \ldots$$
$$\ldots + 2\sin 81^\circ + \sin 90^\circ] = 0{,}997946.$$

II. *Abscisele X_i și coeficienții A_i ai formulei lui Gauss*

n	Abscisele x_i							
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	0,5							
2	0,211325	0,788675						
3	0,112702	0,5	0,887298					
4	0,069432	0,330009	0,669991	0,930568				
5	0,046910	0,230765	0,5	0,769235	0,953090			
6	0,033765	0,169395	0,380690	0,619310	0,830605	0,966235		
7	0,025446	0,129234	0,297077	0,5	0,702923	0,870766	0,974554	
8	0,019855	0,101667	0,237234	0,408283	0,591717	0,762766	0,898333	0,980145

n	Coeficienții A_i							
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	1							
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
3	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$					
4	0,173927	0,326073	0,326073	0,173927				
5	0,118463	0,239314	0,284444	0,239314	0,118463			
6	0,085662	0,180381	0,233957	0,233957	0,180381	0,085662		
7	0,064742	0,139853	0,190915	0,208980	0,190915	0,139853	0,064742	
8	0,050614	0,111191	0,156853	0,181342	0,181342	0,156853	0,111191	0,050614

b) După formula parabolei. Pentru $n = 10$ se obţine

$$I = \frac{1}{3} \cdot 0{,}1570796\,[\sin 0^\circ + 4 \sin 9^\circ + 2 \sin 18^\circ + 4 \sin 27^\circ +$$
$$+ \ldots + 4 \sin 72^\circ + 2 \sin 81^\circ + \sin 90^\circ] = 1{,}000005.$$

c) După formula lui Cebîşev. Luăm $n = 5$.
Folosind tabela I, avem:

$$x_1 = -x_5 = 0{,}832498; \quad x_2 = -x_1 = 0{,}374541; \quad x_3 = 0.$$

Mai departe

$$X_i = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} x_i = 45^\circ + 45^\circ x_i$$

şi

$$X_1 = 45^\circ + 45^\circ x_1 = 82^\circ 27',74; \quad \sin X_1 = 0{,}99136;$$
$$X_2 = 45^\circ + 45^\circ x_2 = 61^\circ 51',26; \quad \sin X_2 = 0{,}88176;$$
$$X_3 = 45^\circ + 45^\circ x_3 = 45^\circ; \quad \sin X_3 = 0{,}70711;$$
$$X_4 = 45^\circ + 45^\circ x_4 = 28^\circ 08',74; \quad \sin X_4 = 0{,}47171;$$
$$X_5 = 45^\circ + 45^\circ x_5 = 7^\circ 32',26; \quad \sin X_5 = 0{,}13117;$$

$$I = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} (\sin X_1 + \sin X_2 + \sin X_3 + \sin X_4 + \sin X_5) = 1{,}00000.$$

d) După formula lui Gauss. Luînd $n = 5$, se obţine x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, şi A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 din tabela II.
Mai departe,

$$X_i = a + (b - a)\, x_i = 90^\circ x_i,$$

de unde

$$X_1 = 4^\circ 13' 18'',87; \quad X_2 = 20^\circ 46' 7'',96; \quad X_3 = 45^\circ;$$
$$X_4 = 69^\circ 13' 52'',03; \quad X_5 = 85^\circ 46' 41'',13$$

şi

$$I = \frac{\pi}{2} (A_1 \sin X_1 + A_2 \sin X_2 + A_3 \sin X_3 + A_4 \sin X_4 +$$
$$+ A_5 \sin X_5) = 1{,}000000.$$

§ 1.26. Rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale

Pentru a găsi o soluţie particulară aproximativă a ecuaţiei diferenţiale $dy/dx = f(x,y)$ care să satisfacă condiţia iniţială $y = y_0$ pentru $x = x_0$ se pot folosi următoarele metode.

Metoda aproximațiilor succesive. Folosind condiția inițială, din ecuația $y' = f(x,y)$ se obține expresia pentru y sub forma.

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx.$$

Ca aproximație inițială pentru y luăm y_0, pe care o înlocuim în funcția de sub integrală în locul lui y; efectuăm cuadratura (exact sau aproximativ) și obținem prima aproximație:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx.$$

A doua și aproximațiile următoare le găsim în mod analog prin înlocuirea succesivă, în funcția de sub integrală, a lui y prin aproximațiile calculate y_1, y_2, y_3 etc.:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx; \quad y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\, dx; \ \ldots$$

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx.$$

Procesul de aproximare succesivă se întrerupe, de obicei, îndată ce mărimea absolută a diferenței dintre două aproximații succesive y_{n+1} și y_n devine mai mică decît eroarea admisă.

Exemplu. Să se găsească soluția ecuației diferențiale $\dfrac{dy}{dx} = x + y$, care satisface condiția inițială: $y_0 = 1$ pentru $x = 0$.
Avem

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x + 1)\, dy = 1 + x + \frac{x^2}{2};$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(x + 1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6};$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left(x + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}\right) dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}.$$

Această aproximație dă $y = 1{,}1103$ pentru $x = 0{,}1$ și $y = 1{,}2427$ pentru $x = 0{,}2$. Dacă comparăm aceste numere cu valorile respective ale soluției exacte, vom constata că în prima dintre ele toate cifrele sînt exacte, iar în a doua eroarea este de o unitate la ultima cifră.

Aplicarea seriilor. Soluția particulară a ecuației diferențiale se caută sub forma unei serii Taylor:

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

În această dezvoltare x_0 şi y_0 sînt date prin valorile iniţiale. Introducînd în ecuaţia diferenţială x_0 şi y_0 în locul lui x şi y, obţinem valoarea iniţială a primei derivate $y'_0 = f(x_0, y_0)$.

Pentru determinarea valorilor iniţiale ale derivatelor superioare, derivăm ecuaţia noastră în raport cu x: $y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\, y'$; în expresia obţinută punem $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$ şi găsim $y''_0 = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)\, y'_0$.

Analog determinăm valorile iniţiale ale celorlalte derivate.

Uneori, pentru găsirea coeficienţilor seriei, se foloseşte metoda coeficienţilor nedeterminaţi. În acest caz, se scrie soluţia sub forma

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

Derivînd în raport cu x, se obţine: $y' = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots$ Se înlocuieşte această dezvoltare în ecuaţie în identitatea obţinută, se compară coeficienţii aceloraşi puteri ale diferenţei $x - x_0$ din partea stîngă şi din partea dreaptă a identităţii şi se ajunge astfel la un sistem de ecuaţii pentru determinarea coeficienţilor $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Metoda de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul seriilor se aplică de asemenea şi ecuaţiilor de ordine superioare.

Exemplu. Să se găsească soluţia particulară a ecuaţiei $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$ cu condiţiile iniţiale: $y = 1$, $y' = 0$, pentru $x = 0$.

Punînd $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + \ldots$, se obţine

$$y' = a_1 + 2a_2x + \ldots + (n - 2)\, a_{n-2}x^{n-3} +$$
$$+ (n - 1)\, a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} + \ldots;$$
$$y'' = 2a_2 + \ldots + (n - 3)\,(n - 2)\, a_{n-2}x^{n-4} +$$
$$+ (n - 2)\,(n - 1)\, a_{n-1}x^{n-3} + (n - 1)\, na_nx^{n-2} + \ldots$$

Înlocuind în ecuaţie, rezultă

$$\frac{a_1}{x} + (a_0 + 2a_2 + 2a_2) + \ldots$$
$$\ldots + [a_{n-2} + na_n + (n - 1)\, na_n]\, x^{n-2} + \ldots = 0$$

sau

$$\frac{a_1}{x} + (a_0 + 4a_2) + \ldots + (a_{n-2} + n^2a_n)x^{n-2} + \ldots = 0.$$

De aici

$$a_1 = 0; \quad a_0 + 2^2a_2 = 0; \quad a_1 + 3^2a_3 = 0; \ldots; \quad a_{n-2} + n^2a_n = 0; \ldots$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii, se obţine

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0;$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2};\ a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^2 4^2};\ \dots;\ a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2} = \pm\frac{a_0}{2^2 . 4^2 \dots n^2}$$

(n — par) şi

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 . 4^2} - \frac{x^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \dots\right).$$

Pentru determinarea lui a_0 se folosesc condiţiile iniţiale.

Punînd $x = 0$ şi $y = 1$, se obţine $a_0 = 1$ (condiţia $y' = 0$ pentru $x = 0$ este satisfăcută pentru orice a_0).

Soluţia particulară căutată este

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 . 4^2} - \frac{x^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \dots$$

Metoda lui Euler-Cauchy. Transcriind ecuaţia diferenţială sub forma $dy = f(x,y)\,dx$ şi înlocuind diferenţialele prin creşterile respective, se obţin egalităţile aproximative $\Delta y_0 = f(x_0, y_0)\,\Delta x_0$;

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,\Delta x_1;\quad \Delta y_2 = f(x_2, y_2)\,\Delta x_2;\ \dots$$
$$\dots\ \Delta y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})\,\Delta x_{n-1}.$$

Din prima relaţie se determină y_1 după formula

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + f(x_0, y_0)\,\Delta x_0$$

şi se înlocuieşte în a doua. În mod analog, din egalitatea a doua se determină y_2:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_1 + f(x_1, y_1)\,\Delta x_1$$

şi se înlocuieşte în a treia etc.

Metoda lui Euler-Cauchy se foloseşte de obicei numai pentru aproximaţii grosolane, luînd n mic.

Metoda lui Adams-Krîlov. Această metodă se bazează pe aplicarea formulei

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\,\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\,\Delta^2\eta_{n-2},\ \text{unde}\ \eta_n = y'_n h = f(x_n, y_n)\,h.$$

Dacă, în afară de valoarea iniţială a funcţiei $y = y_0$ pentru $x = x_0$, se cunosc încă două valori ale funcţiei y_1 şi y_2, corespunzătoare

valorilor argumentului $x_1 = x_0 + h$ şi $x_2 = x_0 + 2h$, putem forma tabela

x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
x_0	y_0		η_0		
		Δy_0		$\Delta\eta_0$	
x_1	y_1		η_1		$\Delta^2\eta_0$
		Δy_1		$\Delta\eta_1$	
x_2	y_2		η_2		

Această tabelă poate fi prelungită cu ajutorul formulei fundamentale. Într-adevăr, punînd $n = 2$, găsim din formulă Δy_2 şi, deci, şi y_3 ($y_3 = y_2 + \Delta y_2$). Calculăm η_3 după formula $\eta_3 = f(x_3, y_3)h$ şi diferenţele $\Delta\eta_2$ şi $\Delta^2\eta_1$ şi completăm astfel partea dreaptă a tabelei printr-un rînd oblic. Folosind formula din urmă precum şi formula fundamentală, determinăm Δy_3 şi deci şi y_4, calculăm $\eta_4, \Delta\eta_3$ şi $\Delta^2\eta_2$ şi prin urmare completăm tabela cu încă un rînd oblic. Analog continuăm completarea tabelei.

Valorile y_1 şi y_2, necesare pentru completarea rîndurilor iniţiale ale tabelei, pot fi determinate fie cu ajutorul dezvoltării lui y în serie, fie prin metoda aproximaţiilor succesive, propusă de A. N. Krîlov şi bazată pe două formule

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0$$

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0. \qquad (*)$$

În prima aproximaţie punem $\Delta y_0 = \eta_0$.

Cunoscînd pe y_0 şi calculînd pe η_0 după formula $\eta_0 = f(x_0, y_0)h$, găsim $y_1(y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + \eta_0)$. Acum vom calcula η_1 şi, prin aceasta, şi $\Delta\eta_0$ ($\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0$) şi vom corecta valoarea Δy_0, punînd, de data aceasta, $\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0$.

Cu ajutorul acestei valori corectate Δy_0 vom corecta valorile y_1, η_1 şi $\Delta\eta_0$ şi vom găsi Δy_1 după formula $\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0$

Putem determina acum y_2 ($y_2 = y_1 + \Delta y_1$) precum şi η_2, $\Delta\eta_1 = \eta_2 - \eta_1$ şi $\Delta^2\eta_0 = \Delta\eta_1 - \Delta\eta_0$.

Rămîne să verificăm acum formulele (*).

Deseori $\Delta^2\eta_0$ se dovedeşte a fi atît de mic, încît aceste formule sînt corecte, deşi pentru calculul lui Δy_0 şi Δy_1 mărimea $\Delta^2\eta_0$ nu a fost luată în considerare. Dacă aceasta nu este aşa, atunci vom recalcula Δy_0 şi Δy_1 complet pe baza formulelor (*), vom calcula din nou η_1, η_2, $\Delta\eta_0$, $\Delta\eta_1$ şi $\Delta^2\eta_0$ şi vom verifica din nou dacă formulele (*) sînt satisfăcute etc. De obicei, acest proces duce rapid la valori suficient de exacte pentru y_1 şi y_2.

Exemplu. Să se găsească soluția aproximativă a ecuației $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ pentru condițiile inițiale: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Să formăm tabela de valori a funcției căutate în intervalul de la $x = 0$ la $x = 1$ prin 0,1 (adică punînd $h = 0,1$); să determinăm mai întîi prin metoda lui Krîlov valorile y_1 și y_2. Avem $\eta_0 = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} h = 0$; în prima aproximație punem $\Delta y_0 = \eta_0 = 0$, $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1$ și

$$\eta_1 = \frac{x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2} h = \frac{0,1 \cdot 1}{0,1^2 + 1^2} \cdot 0,1 = 0,0099,$$

de unde $\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0 = 0,0099$.

Să corectăm valoarea Δy_0 punînd

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta\eta_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0,0099 = 0,005,$$

de unde

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,005$$

și

$$\eta_1 = \frac{x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2} h = \frac{0,1 \cdot 1,005}{0,1^2 + 1,005^2} \cdot 0,1 = 0,0099;$$

în acest caz,

$$\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0 = 0,0099 - 0 = 0,0099$$

și

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta\eta_0 = 0,0099 - \frac{1}{2} \cdot 0,0099 = 0,015.$$

Prin urmare

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1,005 + 0,015 = 1,020.$$

Mai departe

$$\eta_2 = \frac{x_2 y_2}{x_2^2 + y_2^2} h = \frac{0,2 \cdot 1,020}{0,2^2 \cdot 1,020^2} \cdot 0,1 = 0,0189,$$

$$\Delta\eta_1 = \eta_2 - \eta_1 = 0,0189 - 0,0099 = -0,0090$$

și

$$\Delta^2\eta_0 = \Delta\eta_1 - \Delta\eta_0 = 0,0090 - 0,0099 = -0,0009.$$

Să verificăm formulele (*) pentru valorile $y_1 = 1,005$ și $y_2 = 1,020$:

$$\Delta y_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0,0099 - \frac{1}{12} (-0,0009) = 0,005;$$

$$\Delta y_1 = 0,0099 + \frac{1}{2} \cdot 0,0099 + \frac{5}{12} (-0,0009) = 0,0145.$$

Astfel, prima formulă este satisfăcută exact, iar eroarea celei de a doua este atît de mică, încît apare numai în a cincea cifră semnificativă a lui y.

Calculele următoare ale valorilor y după metoda Adams-Krîlov sînt date în tabela de mai jos.

Rezolvarea ecuației $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0,0	1,000		0		
		0,005		0,0099	
0,1	1,005		0,0099		−0,0009
		0,015		0,0090	
0,2	1,020		0,0189		−0,0013
		0,023		0,0077	
0,3	1,043		0,0266		−0,0016
		0,030		0,0061	
0,4	1,073		0,0327		−0,0013
		0,035		0,0048	
0,5	1,108		0,0375		−0,0012
		0,039		0,0036	
0,6	1,147		0,0411		−0,0010
		0,042		0,0026	
0,7	1,189		0,0437		−0,0007
		0,045		0,0019	
0,8	1,234		0,0456		−0,0004
		0,046		0,0015	
0,9	1,280		0,0471		
		0,048			
1,0	1,328				

§ 1.27. Metode grafice

Diferențierea grafică. Dacă funcția $y = f(x)$ este dată grafic (fig. 1.191), derivata ei $f'(x)$ poate fi găsită grafic în modul următor.

Segmentul $[a, b]$ pe care este dată funcția $y = f(x)$, îl împărțim în n părți. Părțile segmentului $[a, b]$ nu trebuie să fie numaidecît egale: trebuie luate mai mici acolo unde funcția $f(x)$ variază repede. Prin mijloacele tuturor părților de segment, m_1, m_2, m_3, ducem dreptele m_1M_1, m_2M_2, m_3M_3, ... perpendiculare pe axa Ox, pînă la intersecția cu curba în punctele M_1, M_2, M_3... și în fiecare din aceste puncte ducem tangentele respective. După aceea, alegînd în partea negativă a axei Ox polul P la distanța $PO = \lambda$ de originea axelor

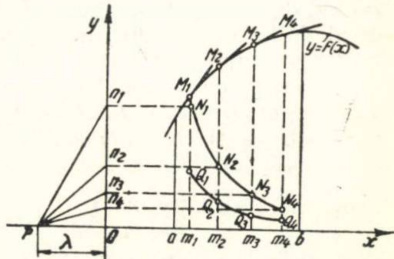


Fig. 1.191.

de coordonate, ducem din el paralel cu tangentele la curbă în punctele $M_1, M_2, M_3, \ldots$, dreptele $Pn_1, Pn_2, Pn_3, \ldots$ pînă la intersecţia cu axa Oy în punctele $n_1, n_2, n_3, \ldots$ Din aceste puncte ducem paralel cu axa Ox dreptele $n_1N_1, n_2N_2, n_3N_3, \ldots$ pînă la intersecţia cu ordonatele respective (sau cu prelungirile lor) $m_1M_1, m_2M_2, m_3M_3, \ldots$, în punctele $N_1, N_2, N_3, \ldots$

Curba $N_1N_2N_3, \ldots$ este graficul aproximativ al funcţiei $y = \lambda f'(x)$; pentru $\lambda = 1$ obţinem graficul căutat al derivatei $y = f'(x)$.

Dacă $\lambda \neq 1$, construim punctele $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ cu ordonatele egale cu ordonatele punctelor $N_1, N_2, N_3, \ldots$ împărţite prin λ. Curba care uneşte punctele $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ este graficul derivatei.

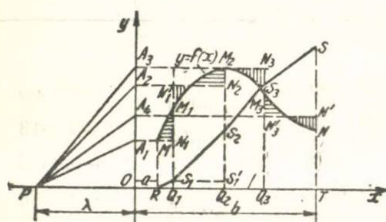


Fig. 1.192.

Integrarea grafică. Dacă este dat graficul funcţiei $y = f(x)$ (fig. 1.192), valoarea integralei definite $\int_b^a f(x)\,dx$ poate fi găsită grafic în modul următor. Aria $RMNT$, care dă mărimea integralei definite, se împarte în trapeze curbilinii RMM_1Q_1, $Q_1M_1M_2Q_2$, $Q_2M_2M_3Q_3$, Q_3M_3NT şi construim dreptunghiurile RMN_1Q_1, $Q_1N_1'N_2Q_2$, $Q_2M_2N_3Q_3$, $Q_3N_3'N'T$ astfel, încît ariile triunghiurilor curbilinii situate deasupra şi sub curbă (haşurate pe figură) să fie aproximativ egale; în acest caz, aria căutată poate fi înlocuită cu suma ariilor acestor triunghiuri.

Pentru a obţine grafic un număr egal cu numărul care reprezintă aria primului dreptunghi RMN_1Q_1, marcăm pe axa Ox la stînga originei segmentul $OP = \lambda$, iar pe axa Oy segmentul $OA_1 = Q_1N_1$ şi din punctul R ducem o dreaptă paralelă cu PA_1 pînă la intersecţia cu Q_1N_1 în punctul S_1. Lungimea segmentului Q_1S_1 va reprezenta grafic aria dreptunghiului RMN_1Q_1, împărţită prin λ.

Apoi, prin aceeaşi metodă construim un segment, a cărui lungime este numeric egală cu aria dreptunghiului al doilea. Pentru aceasta marcăm pe axa Oy, începînd de la origine, segmentul $OA_2 = Q_2N_2$, iar din punctul S_1 ducem o dreaptă paralelă cu PA_2 pînă la intersecţia cu dreapta Q_2N_2 în punctul S_2. Segmentul $S_1'S_2$ dă aria celui de al doilea dreptunghi, împărţită prin λ, iar segmentul Q_2S_2, suma ariilor primului şi al doilea dreptunghi, împărţită prin λ etc. Pentru $\lambda = 1$ lungimile segmentelor Q_1S_1 şi $S_1'S_2$ sînt numeric egale cu ariile dreptunghiurilor RMN_1Q_1, $Q_1N_1'N_2Q_2$, iar lungimea segmentului Q_2S_2 este egală cu suma ariilor acestor dreptunghiuri. Continuînd construcţia, ajungem la segmentul TS, care pentru $\lambda = 1$ reprezintă grafic mărimea integralei $\int_a^b f(x)\,dx$. Linia frîntă $RS_1S_2S_3S$ va reprezenta (pentru $\lambda = 1$) graficul aproximativ al funcţiei $y = \int_a^x f(x)\,dx$.

Rezolvarea grafică a ecuațiilor diferențiale. Ecuația $dy/dx = f(x,y)$ redă dependența dintre coordonatele punctului $M(x,y)$ și coeficientul unghiular al tangentei la curbă în acest punct.

Dacă este dată valoarea inițială a funcției căutate $y = y_0$ pentru $x = x_0$, atunci din familia de curbe, reprezentate prin soluția generală a ecuației date, putem alege o anumită curbă, care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$.

Pentru construirea aproximativă a acestei curbe, împărțim planul în benzi prin dreptele $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$ etc., paralele cu axa Oy și, pornind de la originea axelor de coordonate, marcăm pe axa Ox segmentul $OP = 1$ (fig. 1.193).

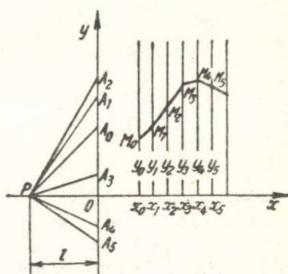


Fig. 1.193.

Determinînd din ecuația dată $f(x_0, y_0)$, marcăm pe axa Oy segmentul $OA_0 = f(x_0, y_0)$.

Dreapta PA_0 este paralelă cu tangenta la curba integrală în punctul M_0, deoarece coeficientul ei unghiular este egal cu $f(x_0, y_0)$.

Din punctul M_0 ducem dreapta $M_0M_1 \| PA_0$, pînă la intersecția cu dreapta $x = x_1$ și măsurăm ordonata y_1 a punctului M_1. După aceea, pe axa ordonatelor marcăm segmentul $OA_1 = f(x_1, y_1)$, iar din punctul M_1 ducem dreapta $M_1M_2 \| PA_1$ pînă la intersecția cu dreapta $x = x_2$ în punctul M_2, măsurăm ordonata y_2 a acestui punct, luînd pe axa Oy segmentul $OA_2 = f(x_2,y_2)$ etc.

Linia frîntă construită $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$ reprezintă aproximativ curba integrală.

Tabele matematice

Cuprins

Tabele matematice

Tabela 1.1. Puterile numerelor 2, 3 și 5

Puterile lui 2

Ex	P	Ex	P	Ex	P	Ex	P
1	2	11	2 048	21	2 097 152	31	2 147 483 648
2	4	12	4 096	22	4 194 304	32	4 294 967 296
3	8	13	8 192	23	8 388 608	33	8 589 934 592
4	16	14	16 384	24	16 777 216	34	17 179 869 184
5	32	15	32 768	25	33 554 432	35	34 359 738 368
6	64	16	65 536	26	67 108 864	36	68 719 476 736
7	128	17	131 072	27	134 217 728	37	137 438 953 472
8	256	18	262 144	28	268 435 456	38	274 877 906 944
9	512	19	524 288	29	536 870 912	39	549 755 813 888
10	1 024	20	1 048 576	30	1 073 741 824	40	1 099 511 627 776

Puterile lui 3

Ex	P	Ex	P	Ex	P
1	3	11	177 147	21	10 460 353 203
2	9	12	531 441	22	31 381 059 609
3	27	13	1 594 323	23	94 143 178 827
4	81	14	4 782 969	24	282 429 536 481
5	243	15	14 348 907	25	847 288 609 443
6	729	16	43 046 721	26	2 541 865 828 329
7	2 187	17	129 140 163	27	7 625 597 484 987
8	6 561	18	387 420 489	28	22 876 792 454 961
9	19 683	19	1 162 261 467	29	68 630 377 364 883
10	59 049	20	3 486 784 401	30	205 891 132 094 649

Puterile lui 5

Ex	P	Ex	P	Ex	P
1	5	9	1 953 125	17	762 939 453 125
2	25	10	9 765 625	18	3 814 697 265 625
3	125	11	48 828 125	19	19 073 486 328 125
4	625	12	244 140 625	20	95 367 431 640 625
5	3 125	13	1 220 703 125	21	476 837 158 203 125
6	15 625	14	6 103 515 625	22	2 384 185 791 015 625
7	78 125	15	30 517 578 125	23	11 920 928 955 078 125
8	390 625	16	152 587 890 625	24	59 604 644 775 390 625

Tabela 1.2. **Numerele prime de la 1 pînă la 10 000**

1; 2	2 23	4 99	8 11	11 17	14 81	18 11	21 61	25 43
3	27	—	21	23	83	23	79	49
5	29	**5 03**	23	29	87	31	**22 03**	51
7	33	09	27	51	89	47	07	57
11	39	21	29	53	93	61	13	79
13	41	23	39	63	99	67	21	91
17	51	41	53	71	—	71	37	93
19	57	47	57	81	**15 11**	73	39	**26 09**
23	63	57	59	87	23	77	43	17
29	69	63	63	93	31	79	51	21
31	71	69	77	**12 01**	43	89	67	33
37	77	71	81	13	49	**19 01**	69	47
41	81	77	83	17	53	07	73	57
43	83	87	87	23	59	13	81	59
47	93	93	**9 07**	29	67	31	87	63
53	**3 07**	99	11	31	71	33	93	71
59	11	**6 01**	19	37	79	49	97	77
61	13	07	29	49	83	51	**23 09**	83
67	17	13	37	59	97	73	11	87
71	31	17	41	77	**16 01**	79	33	89
73	37	19	47	79	07	87	39	93
79	47	31	53	83	09	93	41	99
83	49	41	67	89	13	97	47	**27 07**
89	53	43	71	91	19	99	51	11
97	59	47	77	97	21	20 03	57	13
1 01	67	53	83	**13 01**	27	11	71	19
03	73	59	91	03	37	17	77	29
07	79	61	97	07	57	27	81	31
09	83	73	**10 09**	19	63	29	83	41
13	89	77	13	21	67	39	89	49
27	97	83	19	27	69	53	93	53
31	**4 01**	91	21	61	93	63	99	67
37	09	**7 01**	31	67	97	69	**24 11**	77
39	19	09	33	73	99	81	17	89
49	21	19	39	81	**17 09**	83	23	91
51	31	27	49	99	21	87	37	97
57	33	33	51	**14 09**	23	89	41	**28 01**
63	39	39	61	23	33	99	47	03
67	43	43	63	27	41	**21 11**	59	19
73	49	51	69	29	47	13	67	33
79	57	57	87	33	53	29	73	37
81	61	61	91	39	59	31	77	43
91	63	69	93	47	77	37	—	51
93	67	73	97	51	83	41	**25 03**	57
97	79	87	**11 03**	53	87	43	21	61
99	87	97	09	59	89	53	31	79
2 11	91	**8 09**		71	**18 01**		39	87

Tabela 1.2. (*continuare*)

28 97	33 07	36 59	40 49	44 51	48 71	52 61	56 53	60 53
29 03	13	71	51	57	77	73	57	67
09	19	73	57	63	89	79	59	73
17	23	77	73	81	**49 03**	81	69	79
27	29	91	79	83	09	97	83	89
39	31	97	91	93	19	**53 03**	89	91
53	43	**37 01**	93	—	31	09	93	**61 01**
57	47	09	99	**45 07**	33	23	**57 01**	13
63	59	19	**41 11**	13	37	33	11	21
69	61	27	27	17	43	47	17	31
71	71	33	29	19	51	51	37	33
99	73	39	33	23	57	81	41	43
30 01	89	61	39	47	67	87	43	51
11	91	67	53	49	69	93	49	63
19	**34 07**	69	57	61	73	99	79	73
23	13	79	59	67	87	**54 07**	83	97
37	33	93	77	83	93	13	91	99
41	49	97	**42 01**	91	99	17	**58 01**	**62 03**
49	57	**38 03**	11	97	**50 03**	19	07	11
61	61	21	17	**46 03**	09	31	13	17
67	63	23	19	21	11	37	21	21
79	67	33	29	37	21	41	27	29
83	69	47	31	39	23	43	39	47
89	91	51	41	43	39	49	43	57
31 09	99	53	43	49	51	71	49	63
19	—	63	53	51	59	77	51	69
21	**35 11**	77	59	57	77	79	57	71
37	17	81	61	63	81	83	61	77
63	27	89	71	73	87	—	67	87
67	29	**39 07**	73	79	99	**55 01**	69	99
69	33	11	83	91	**51 01**	03	79	**63 01**
81	39	17	89	**47 03**	07	07	81	11
87	41	19	97	21	13	19	97	17
91	47	23	**43 27**	23	19	21	**59 03**	23
32 03	57	29	37	29	47	27	23	29
09	59	31	39	33	53	31	27	37
17	71	43	49	51	67	57	39	43
21	81	47	57	59	71	63	53	53
29	83	67	63	83	79	69	81	59
51	93	89	73	87	89	73	87	61
53	**36 07**	**40 01**	91	89	97	81	**60 07**	67
57	13	03	97	93	**52 09**	91	11	73
59	17	07	**44 09**	99	27	**56 23**	29	79
71	23	13	21	**48 01**	31	39	37	89
99	31	19	23	13	33	41	43	97
33 01	37	21	41	17	37	47	47	**64 21**
	43	27	47	31		51		27
				61				

Tabela 1.2. (*continuare*)

64 49	68 63	72 83	76 87	81 17	85 63	89 63	93 77	97 81
51	69	97	91	23	73	69	91	87
69	71	**73 07**	99	47	81	71	97	91
73	83	09	**77 03**	61	97	99	**94 03**	**98 03**
81	99	21	17	67	99	**90 01**	13	11
91	**69 07**	31	23	71	**86 09**	07	19	17
—	11	33	27	79	23	11	21	29
65 21	17	49	41	91	27	13	31	33
29	47	51	53	**82 09**	29	29	33	39
47	49	69	57	19	41	41	37	51
51	59	93	59	21	47	43	39	57
53	61	**74 11**	89	31	63	49	61	59
63	67	17	93	33	69	59	63	71
69	71	33	**78 17**	37	77	67	67	83
71	77	51	23	43	81	91	73	87
77	83	57	29	63	89	**91 03**	79	**99 01**
81	91	59	41	69	93	09	91	07
99	97	77	53	73	99	27	97	23
66 07	**70 01**	81	67	87	**87 07**	33	—	29
19	13	87	73	91	13	37	**95 11**	31
37	19	89	77	93	19	51	21	41
53	27	99	79	97	31	57	33	49
59	39	—	83	**83 11**	37	61	39	67
61	43	**75 07**	**79 01**	17	41	73	47	73
73	57	17	07	29	47	81	51	
79	69	23	19	53	53	87	87	
89	79	29	27	63	61	99	**96 01**	
91	**71 03**	37	33	69	79	**92 03**	13	
67 01	09	41	37	77	83	09	19	
03	21	47	49	87	**88 03**	21	23	
09	27	49	51	89	07	27	29	
19	29	59	63	**84 19**	19	39	31	
33	51	61	93	23	21	41	43	
37	59	73	**80 09**	29	31	57	49	
61	77	77	11	31	37	77	61	
63	87	83	17	43	39	81	77	
79	93	89	39	47	49	83	79	
81	**72 07**	91	53	61	61	93	89	
91	11	**76 03**	59	67	63	**93 11**	97	
93	13	07	69	—	67	19	**97 19**	
68 03	19	21	81	**85 01**	87	23	21	
23	29	39	87	13	93	37	33	
27	37	43	89	21	**89 23**	41	39	
29	43	49	93	27	29	43	43	
33	47	69	**81 01**	37	33	49	49	
41	53	73	11	39	41	71	67	
57		81		43	51		69	

Tabela 1.3. **Logaritmii zecimali ai numerelor de la 1 pînă la 100**

N	lg	*N*	lg	*N*	lg	*N*	lg	*N*	lg
0	$-\infty$	**20**	30 103	**40**	60 206	**60**	77 815	**80**	90 309
1	00 000	1	32 222	1	61 278	1	78 533	1	90 849
2	30 103	2	34 242	2	62 325	2	79 239	2	91 381
3	47 712	3	36 173	3	63 347	3	79 934	3	91 908
4	60 206	4	38 021	4	64 345	4	80 618	4	92 428
5	69 897	5	39 794	5	65 321	5	81 291	5	92 942
6	77 815	6	41 497	6	66 276	6	81 954	6	93 450
7	84 510	7	43 136	7	67 210	7	82 607	7	93 952
8	90 309	8	44 716	8	68 124	8	83 251	8	94 448
9	95 424	9	46 240	9	69 020	9	83 885	9	94 939
10	00 000	**30**	47 712	**50**	69 897	**70**	84 510	**90**	95 424
1	04 139	1	49 136	1	70 757	1	85 126	1	95 904
2	07 918	2	50 515	2	71 600	2	85 733	2	96 379
3	11 394	3	51 851	3	72 428	3	86 332	3	96 848
4	14 613	4	53 148	4	73 239	4	86 923	4	97 313
5	17 609	5	54 407	5	74 036	5	87 506	5	97 772
6	20 412	6	55 630	6	74 819	6	88 081	6	98 227
7	23 045	7	56 820	7	75 587	7	88 649	7	98 677
8	25 527	8	57 978	8	76 343	8	89 209	8	99 123
9	27 875	9	59 106	9	77 085	9	89 763	9	99 564

Tabela 1.4. **Logaritmii zecimali ai numerelor de la 100 pînă la 10 000**
100—139

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
115	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
117	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
121	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
123	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
125	691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001
135	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
138	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

	44	43	42
1	4,4	4,3	4,2
2	8,8	8,6	8,4
3	13,2	12,9	12,6
4	17,6	17,2	16,8
5	22,0	21,5	21,0
6	26,4	25,8	25,2
7	30,8	30,1	29,4
8	35,2	34,4	33,6
9	39,6	38,7	37,8

	41	40	39
1	4,1	4,0	3,9
2	8,2	8,0	7,8
3	12,3	12,0	11,7
4	16,4	16,0	15,6
5	20,5	20,0	19,5
6	24,6	24,0	23,4
7	28,7	28,0	27,3
8	32,8	32,0	31,2
9	36,9	36,0	35,1

	38	37	36
1	3,8	3,7	3,6
2	7,6	7,4	7,2
3	11,4	11,1	10,8
4	15,2	14,8	14,4
5	19,0	18,5	18,0
6	22,8	22,2	21,6
7	26,6	25,9	25,2
8	30,4	29,6	28,8
9	34,2	33,3	32,4

	35	34	33
1	3,5	3,4	3,3
2	7,0	6,8	6,6
3	10,5	10,2	9,9
4	14,0	13,6	13,2
5	17,5	17,0	16,5
6	21,0	20,4	19,8
7	24,5	23,8	23,1
8	28,0	27,2	26,4
9	31,5	30,6	29,7

P.P.

140—179 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
140	14 613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
141	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198
142	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
144	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
145	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
149	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580
150	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
151	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
152	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
154	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005
155	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
156	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
157	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
158	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
159	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656
161	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
162	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
163	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
165	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
166	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
173	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030
174	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

	32	31	30	29	28	27	26	25
1	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5
2	6,4	6,2	6,0	5,8	5,6	5,4	5,2	5,0
3	9,6	9,3	9,0	8,7	8,4	8,1	7,8	7,5
4	12,8	12,4	12,0	11,6	11,2	10,8	10,4	10,0
5	16,0	15,5	15,0	14,5	14,0	13,5	13,0	12,5
6	19,2	18,6	18,0	17,4	16,8	16,2	15,6	15,0
7	22,4	21,7	21,0	20,3	19,6	18,9	18,2	17,5
8	25,6	24,8	24,0	23,3	22,4	21,6	20,8	20,0
9	28,8	27,9	27,0	26,1	25,2	24,3	23,4	22,5

P.P.

180 – 219

Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
180	25 527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
182	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
183	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
185	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
186	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161
187	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
188	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
189	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
191	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
192	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
193	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
194	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
195	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
196	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
197	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
198	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
199	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298
201	320	341	363	384	406	428	449	471	492	514
202	535	557	578	600	621	643	664	685	707	728
203	750	771	792	814	835	856	878	899	920	942
204	963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154
205	31 175	197	218	239	260	281	302	323	345	366
206	387	408	429	450	471	492	513	534	555	576
207	597	618	639	660	681	702	723	744	765	785
208	806	827	848	869	890	911	931	952	973	994
209	32 015	035	056	077	098	118	139	160	181	201
210	222	243	263	284	305	325	346	366	387	408
211	428	449	469	490	510	531	552	572	593	613
212	634	654	675	695	715	736	756	777	797	818
213	838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021
214	33 041	062	082	102	122	143	163	183	203	224
215	244	264	284	304	325	345	365	385	405	425
216	445	465	486	506	526	546	566	586	606	626
217	646	666	686	706	726	746	766	786	806	826
218	846	866	885	905	925	945	965	985	*005	*025
219	34 044	064	084	104	124	143	163	183	203	223
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

	26	25
1	2,6	2,5
2	5,2	5,0
3	7,8	7,5
4	10,4	10,0
5	13,0	12,5
6	15,6	15,0
7	18,2	17,5
8	20,8	20,0
9	23,4	22,5

	24	23
1	2,4	2,3
2	4,8	4,6
3	7,2	6,9
4	9,6	9,2
5	12,0	11,5
6	14,4	13,8
7	16,8	16,1
8	19,2	18,4
9	21,6	20,7

	22	21
1	2,2	2,1
2	4,4	4,2
3	6,6	6,3
4	8,8	8,4
5	11,0	10,5
6	13,2	12,6
7	15,4	14,7
8	17,6	16,8
9	19,8	18,9

P.P.

220—259 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
220	34 242	262	282	301	321	341	361	380	400	420
221	439	459	479	498	518	537	557	577	596	616
222	635	655	674	694	713	733	753	772	792	811
223	830	850	869	889	908	928	947	967	986	*005
224	35 025	044	064	083	102	122	141	160	180	199
225	218	238	257	276	295	315	334	353	372	392
226	411	430	449	468	488	507	526	545	564	583
227	603	622	641	660	679	698	717	736	755	774
228	793	813	832	851	870	889	908	927	946	965
229	984	*003	*021	*040	*059	*078	*097	*116	*135	*154
230	36 173	192	211	229	248	267	286	305	324	342
231	361	380	399	418	436	455	474	493	511	530
232	549	568	586	605	624	642	661	680	698	717
233	736	754	773	791	810	829	847	866	884	903
234	922	940	959	977	996	*014	*033	*051	*070	*088
235	37 107	125	144	162	181	199	218	236	254	273
236	291	310	328	346	365	383	401	420	438	457
237	475	493	511	530	548	566	585	603	621	639
238	658	676	694	712	731	749	767	785	803	822
239	840	858	876	894	912	931	949	967	985	*003
240	38 021	039	057	075	093	112	130	148	166	184
241	202	220	238	256	274	292	310	328	346	364
242	382	399	417	435	453	471	489	507	525	543
243	561	578	596	614	632	650	668	686	703	721
244	739	757	775	792	810	828	846	863	881	899
245	917	934	952	970	987	*005	*023	*041	*058	*076
246	39 094	111	129	146	164	182	199	217	235	252
247	270	287	305	322	340	358	375	393	410	428
248	445	463	480	498	515	533	550	568	585	602
249	620	637	655	672	690	707	724	742	759	777
250	794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
251	967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123
252	40 140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
253	312	329	346	364	381	398	415	432	449	466
254	483	500	518	535	552	569	586	603	620	637
255	654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
256	824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
257	993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145
258	41 162	179	196	212	229	246	263	280	296	313
259	330	347	363	380	397	414	430	447	464	481
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

	20	19	18
1	2,0	1,9	1,8
2	4,0	3,8	3,6
3	6,0	5,7	5,4
4	8,0	7,6	7,2
5	10,0	9,5	9,0
6	12,0	11,4	10,8
7	14,0	13,3	12,6
8	16,0	15,2	14,4
9	18,0	17,1	16,2

P.P.

260–299 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
260	41 497	514	531	547	564	581	597	614	631	647
261	664	681	697	714	731	747	764	780	797	814
262	830	847	863	880	896	913	929	946	963	979
263	996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144
264	42 160	177	193	210	226	243	259	275	292	308
265	325	341	357	374	390	406	423	439	455	472
266	488	504	521	537	553	570	586	602	619	635
267	651	667	684	700	716	732	749	765	781	797
268	813	830	846	862	878	894	911	927	943	959
269	975	*991	*008	*024	*040	056	*072	*088	*104	*120
270	43 136	152	169	185	201	217	233	249	265	281
271	297	313	329	345	361	377	393	409	425	441
272	457	473	489	505	521	537	553	569	584	600
273	616	632	648	664	680	696	712	727	743	759
274	775	791	807	823	838	854	870	886	902	917
275	933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075
276	44 091	107	122	138	154	170	185	201	217	232
277	248	264	279	295	311	326	342	358	373	389
278	404	420	436	451	467	483	498	514	529	545
279	560	576	592	607	623	638	654	669	685	700
280	716	731	747	762	778	793	809	824	840	855
281	871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010
282	45 025	040	056	071	086	102	117	133	148	163
283	179	194	209	225	240	255	271	286	301	317
284	332	347	362	378	393	408	423	439	454	469
285	484	500	515	530	545	561	576	591	606	621
286	637	652	667	682	697	712	728	743	758	773
287	788	803	818	834	849	864	879	894	909	924
288	939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075
289	46 090	105	120	135	150	165	180	195	210	225
290	240	255	270	285	300	315	330	345	359	374
291	389	404	419	434	449	464	479	494	509	523
292	538	553	568	583	598	613	627	642	657	672
293	687	702	716	731	746	761	776	790	805	820
294	835	850	864	879	894	909	923	938	953	967
295	982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114
296	47 129	144	159	173	188	202	217	232	246	261
297	276	290	305	319	334	349	363	378	392	407
298	422	436	451	465	480	494	509	524	538	553
299	567	582	596	611	625	640	654	669	683	698

P.P.

17	
1	1,7
2	3,4
3	5,1
4	6,8
5	8,5
6	10,2
7	11,9
8	13,6
9	15,3

16	
1	1,6
2	3,2
3	4,8
4	6,4
5	8,0
6	9,6
7	11,2
8	12,8
9	14,4

15	
1	1,5
2	3,0
3	4,5
4	6,0
5	7,5
6	9,0
7	10,5
8	12,0
9	13,5

N 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 P.P.

300–339 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47 712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
301	857	871	885	900	914	929	943	958	972	986
302	48 001	015	029	044	058	073	087	101	116	130
303	144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
304	287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
305	430	444	458	473	487	501	515	530	544	558
306	572	586	601	615	629	643	657	671	686	700
307	714	728	742	756	770	785	799	813	827	841
308	855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
309	996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122
310	49 136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
311	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313	554	568	582	596	610	624	638	651	665	679
314	693	707	721	734	748	762	776	790	803	817
315	831	845	859	872	886	900	914	927	941	955
316	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501
320	515	529	542	556	569	583	596	610	623	637
321	651	664	678	691	705	718	732	745	759	772
322	786	799	813	826	840	853	866	880	893	907
323	920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041
324	51 055	068	081	095	108	121	135	148	162	175
325	188	202	215	228	242	255	268	282	295	308
326	322	335	348	362	375	388	402	415	428	441
327	455	468	481	495	508	521	534	548	561	574
328	587	601	614	627	640	654	667	680	693	706
329	720	733	746	759	772	786	799	812	825	838
330	851	865	878	891	904	917	930	943	957	970
331	983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101
332	52 114	127	140	153	166	179	192	205	218	231
333	244	257	270	284	297	310	323	336	349	362
334	375	388	401	414	427	440	453	466	479	492
335	504	517	530	543	556	569	582	595	608	621
336	634	647	660	673	686	699	711	724	737	750
337	763	776	789	802	815	827	840	853	866	879
338	892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007
339	53 020	033	046	058	071	084	097	110	122	135
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

14	
1	1,4
2	2,8
3	4,2
4	5,6
5	7,0
6	8,4
7	9,8
8	11,2
9	12,6

13	
1	1,3
2	2,6
3	3,9
4	5,2
5	6,5
6	7,8
7	9,1
8	10,4
9	11,7

P.P.

340—379 Tabela 1.4 (*continuare*)

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
340	53	148	161	173	186	199	212	224	237	250	263
341		275	288	301	314	326	339	352	364	377	390
342		403	415	428	441	453	466	479	491	504	517
343		529	542	555	567	580	593	605	618	631	643
344		656	668	681	694	706	719	732	744	757	769
345		782	794	807	820	832	845	857	870	882	895
346		908	920	933	945	958	970	983	995	*008	*020
347	54	033	045	058	070	083	095	108	120	133	145
348		158	170	183	195	208	220	233	245	258	270
349		283	295	307	320	332	345	357	370	382	394
350		407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
351		531	543	555	568	580	593	605	617	630	642
352		654	667	679	691	704	716	728	741	753	765
353		777	790	802	814	827	839	851	864	876	888
354		900	913	925	937	949	962	974	986	998	*011
355	55	023	035	047	060	072	084	096	108	121	133
356		145	157	169	182	194	206	218	230	242	255
357		267	279	291	303	315	328	340	352	364	376
358		388	400	413	425	437	449	461	473	485	497
359		509	522	534	546	558	570	582	594	606	618
360		630	642	654	666	678	691	703	715	727	739
361		751	763	775	787	799	811	823	835	847	859
362		871	883	895	907	919	931	943	955	967	979
363		991	*003	*015	*027	*038	*050	*062	*074	*086	*098
364	56	110	122	134	146	158	170	182	194	205	217
365		229	241	253	265	277	289	301	312	324	336
366		348	360	372	384	396	407	419	431	443	455
367		467	478	490	502	514	526	538	549	561	573
368		585	597	608	620	632	644	656	667	679	691
359		703	714	726	738	750	761	773	785	797	808
370		820	832	844	855	867	879	891	902	914	926
371		937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*043
372	57	054	066	078	089	101	113	124	136	148	159
373		171	183	194	206	217	229	241	252	264	276
374		287	299	310	322	334	345	357	368	380	392
375		403	415	426	438	449	461	473	484	496	507
376		519	530	542	553	565	576	588	600	611	623
377		634	646	657	669	680	692	703	715	726	738
378		749	761	772	784	795	807	818	830	841	852
379		864	875	887	898	910	921	933	944	955	967
N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

13	
1	1,3
2	2,6
3	3,9
4	5,2
5	6,5
6	7,8
7	9,1
8	10,4
9	11,7

12	
1	1,2
2	2,4
3	3,6
4	4,8
5	6,0
6	7,2
7	8,4
8	9,6
9	10,8

11	
1	1,1
2	2,2
3	3,3
4	4,4
5	5,5
6	6,6
7	7,7
8	8,8
9	9,9

P.P.

380–419 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
380	57 978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081
381	58 092	104	115	127	138	149	161	172	184	195
382	206	218	229	240	252	263	274	286	297	309
383	320	331	343	354	365	377	388	399	410	422
384	433	444	456	467	478	490	501	512	524	535
385	546	557	569	580	591	602	614	625	636	647
386	659	670	681	692	704	715	726	737	749	760
387	771	782	794	805	816	827	838	850	861	872
388	883	894	906	917	928	939	950	961	973	984
389	995	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095
390	59 106	118	129	140	151	162	173	184	195	207
391	218	229	240	251	262	273	284	295	306	318
392	329	340	351	362	373	384	395	406	417	428
393	439	450	461	472	483	494	506	517	528	539
394	550	561	572	583	594	605	616	627	638	649
395	660	671	682	693	704	715	726	737	748	759
396	770	780	791	802	813	824	835	846	857	868
397	879	890	901	912	923	934	945	956	966	977
398	988	999	*010	*021	*032	*043	*054	*065	*076	*086
399	60 097	108	119	130	141	152	163	173	184	195
400	206	217	228	239	249	260	271	282	293	304
401	314	325	336	347	358	369	379	390	401	412
402	423	433	444	455	466	477	487	498	509	520
403	531	541	552	563	574	584	595	606	617	627
404	638	649	660	670	681	692	703	713	724	735
405	746	756	767	778	788	799	810	821	831	842
406	853	863	874	885	895	906	917	927	938	949
407	959	970	981	991	*002	*013	*023	*034	*045	*055
408	61 066	077	087	098	109	119	130	140	151	162
409	172	183	194	204	215	225	236	247	257	268
410	278	289	300	310	321	331	342	352	363	374
411	384	395	405	416	426	437	448	458	469	479
412	490	500	511	521	532	542	553	563	574	584
413	595	606	616	627	637	648	658	669	679	690
414	700	711	721	731	742	752	763	773	784	794
415	805	815	826	836	847	857	868	878	888	899
416	909	920	930	941	951	962	972	982	993	*003
417	62 014	024	034	045	055	066	076	086	097	107
418	118	128	138	149	159	170	180	190	201	211
419	221	232	242	252	263	273	284	294	304	315

N 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 P.P.

P.P.

12	
1	1,2
2	2,4
3	3,6
4	4,8
5	6,0
6	7,2
7	8,4
8	9,6
9	10,8

11	
1	1,1
2	2,2
3	3,3
4	4,4
5	5,5
6	6,6
7	7,7
8	8,8
9	9,9

420—459 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
420	62 325	335	346	356	366	377	387	397	408	418
421	428	439	449	459	469	480	490	500	511	521
422	531	542	552	562	572	583	593	603	613	624
423	634	644	655	665	675	685	696	706	716	726
424	737	747	757	767	778	788	798	808	818	829
425	839	849	859	870	880	890	900	910	921	931
426	941	951	961	972	982	992	*002	*012	*022	*033
427	63 043	053	063	073	083	094	104	114	124	134
428	144	155	165	175	185	195	205	215	225	236
429	246	256	266	276	286	296	306	317	327	337
430	347	357	367	377	387	397	407	417	428	438
431	448	458	468	478	488	498	508	518	528	538
432	548	558	568	579	589	599	609	619	629	639
433	649	659	669	679	689	699	709	719	729	739
434	749	759	769	779	789	799	809	819	829	839
435	849	859	869	879	889	899	909	919	929	939
436	949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038
437	64 048	058	068	078	088	098	108	118	128	137
438	147	157	167	177	187	197	207	217	227	237
439	246	256	266	276	286	296	303	316	326	335
440	345	355	365	375	385	395	404	414	424	434
441	444	454	464	473	483	493	503	513	523	532
442	542	552	562	572	582	591	601	611	621	631
443	640	650	660	670	680	689	699	709	719	729
444	738	748	758	768	777	787	797	807	816	826
445	836	846	856	865	875	885	895	904	914	924
446	933	943	953	963	972	982	992	*002	*011	*021
447	65 031	040	050	060	070	079	089	099	108	118
448	128	137	147	157	167	176	186	196	205	215
449	225	234	244	254	263	273	283	292	302	312
450	321	331	341	350	360	369	379	389	398	408
451	418	427	437	447	456	466	475	485	495	504
452	514	523	533	543	552	562	571	581	591	600
453	610	619	629	639	648	658	667	677	686	696
454	706	715	725	734	744	753	763	772	782	792
455	801	811	820	830	839	849	858	868	877	887
456	896	906	916	925	935	944	954	963	973	982
457	992	*001	*011	*020	*030	*039	*049	*058	*068	*077
458	66 087	096	106	115	124	134	143	153	162	172
459	181	191	200	210	219	229	238	247	257	266
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

	11	10	9
1	1,1	1,0	0,9
2	2,2	2,0	1,8
3	3,3	3,0	2,7
4	4,4	4,0	3,6
5	5,5	5,0	4,5
6	6,6	6,0	5,4
7	7,7	7,0	6,3
8	8,8	8,0	7,2
9	9,9	9,0	8,1

P.P.

460--499 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
460	66 276	285	295	304	314	323	332	342	351	361
461	370	380	389	398	408	417	427	436	445	455
462	464	474	483	492	502	511	521	530	539	549
463	558	567	577	586	596	605	614	624	633	642
464	652	661	671	680	689	699	708	717	727	736
465	745	755	764	773	783	792	801	811	820	829
466	839	848	857	867	876	885	894	904	913	922
467	932	941	950	960	969	978	987	997	*006	*015
468	67 025	034	043	052	062	071	080	089	099	108
469	117	127	136	145	154	164	173	182	191	201
470	210	219	228	237	247	256	265	274	284	293
471	302	311	321	330	339	348	357	367	376	385
472	394	403	413	422	431	440	449	459	468	477
473	486	495	504	514	523	532	541	550	560	569
474	578	587	596	605	614	624	633	642	651	660
475	669	679	688	697	706	715	724	733	742	752
476	761	770	779	788	797	806	815	825	834	843
477	852	861	870	879	888	897	906	916	925	934
478	943	952	961	970	979	988	997	*006	*015	*024
479	68 034	043	052	061	070	079	088	097	106	115
480	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205
481	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296
482	305	314	323	332	341	350	359	368	377	386
483	395	404	413	422	431	440	449	458	467	476
484	485	494	502	511	520	529	538	547	556	565
485	574	583	592	601	610	619	628	637	646	655
486	664	673	681	690	699	708	717	726	735	744
487	753	762	771	780	789	797	806	815	824	833
488	842	851	860	869	878	886	895	904	913	922
489	931	940	949	958	966	975	984	993	*002	*011
490	69 020	028	037	046	055	064	073	082	090	099
491	108	117	126	135	144	152	161	170	179	188
492	197	205	214	223	232	241	249	258	267	276
493	285	294	302	311	320	329	338	346	355	364
494	373	381	390	399	408	417	425	434	443	452
495	461	469	478	487	496	504	513	522	531	539
496	548	557	566	574	583	592	601	609	618	627
497	636	644	653	662	671	679	688	697	705	714
498	723	732	740	749	758	767	775	784	793	801
499	810	819	827	836	845	854	862	871	880	888
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

10	
1	1,0
2	2,0
3	3,0
4	4,0
5	5,0
6	6,0
7	7,0
8	8,0
9	9,0

9	
1	0,9
2	1,8
3	2,7
4	3,6
5	4,5
6	5,4
7	6,3
8	7,2
9	8,1

8	
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2
5	4,0
6	4,8
7	5,6
8	6,4
9	7,2

P.P.

500–539 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
500	69 897	906	914	923	932	940	949	958	966	975	
501	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062	
502	70 070	079	088	096	105	114	122	131	140	148	
503	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234	
504	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321	
505	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406	
506	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492	9
507	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578	
508	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663	1 0,9
509	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749	2 1,8
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834	3 2,7
511	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919	4 3,6
512	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003	5 4,5
513	71 012	020	029	037	046	054	063	071	079	088	6 5,4
514	096	105	113	122	130	139	147	155	164	172	7 6,3
515	181	189	198	206	214	223	231	240	248	257	8 7,2
516	265	273	282	290	299	307	315	324	332	341	9 8,1
517	349	357	366	374	383	391	399	408	416	425	
518	433	441	450	458	466	475	483	492	500	508	
519	517	525	533	542	550	559	567	575	584	592	
520	600	609	617	625	634	642	650	659	667	675	
521	684	692	700	709	717	725	734	742	750	759	
522	767	775	784	792	800	809	817	825	834	842	
523	850	858	867	875	883	892	900	908	917	925	
524	933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008	
525	72 016	024	032	041	049	057	066	074	082	090	
526	099	107	115	123	132	140	148	156	165	173	8
527	181	189	198	206	214	222	230	239	247	255	
528	263	272	280	288	296	304	313	321	329	337	1 0,8
529	346	354	362	370	378	387	395	403	411	419	2 1,6
530	428	436	444	452	460	469	477	485	493	501	3 2,4
531	509	518	526	534	542	550	558	567	575	583	4 3,2
532	591	599	607	616	624	632	640	648	656	665	5 4,0
533	673	681	689	697	705	713	722	730	738	746	6 4,8
534	754	762	770	779	787	795	803	811	819	827	7 5,6
535	835	843	852	860	868	876	884	892	900	908	8 6,4
536	916	925	933	941	949	957	965	973	981	989	9 7,2
537	997	*006	*014	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070	
538	73 078	086	094	102	111	119	127	135	143	151	
539	159	167	175	183	191	199	207	215	223	231	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.

540–579 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
540	73 239	247	255	263	272	280	288	296	304	312
541	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392
542	400	408	416	424	432	440	448	456	464	472
543	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552
544	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632
545	640	648	656	664	672	679	687	695	703	711
546	719	727	735	743	751	759	767	775	783	791
547	799	807	815	823	830	838	846	854	862	870
548	878	886	894	902	910	918	926	933	941	949
549	957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
551	115	123	131	139	147	155	162	170	178	186
552	194	202	210	218	225	233	241	249	257	265
553	273	280	288	296	304	312	320	327	335	343
554	351	359	367	374	382	390	398	406	414	421
555	429	437	445	453	461	468	476	484	492	500
556	507	515	523	531	539	547	554	562	570	578
557	586	593	601	609	617	624	632	640	648	656
558	663	671	679	687	695	702	710	718	726	733
559	741	749	757	764	772	780	788	796	803	811
560	819	827	834	842	850	858	865	873	881	889
561	896	904	912	920	927	935	943	950	958	966
562	974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*043
563	75 051	059	066	074	082	089	097	105	113	120
564	128	136	143	151	159	166	174	182	189	197
565	205	213	220	228	236	243	251	259	266	274
566	282	289	297	305	312	320	328	335	343	351
567	358	366	374	381	389	397	404	412	420	427
568	435	442	450	458	465	473	481	488	496	504
569	511	519	526	534	542	549	557	565	572	580
570	587	595	603	610	618	626	633	641	648	656
571	664	671	679	686	694	702	709	717	724	732
572	740	747	755	762	770	778	785	793	800	808
573	815	823	831	838	846	853	861	868	876	884
574	891	899	906	914	921	929	937	944	952	959
575	967	974	982	989	997	*005	*012	*020	*027	*035
576	76 042	050	057	065	072	080	087	095	103	110
577	118	125	133	140	148	155	163	170	178	185
578	193	200	208	215	223	230	238	245	253	260
579	268	275	283	290	298	305	313	320	328	335
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

8	
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2
5	4,0
6	4,8
7	5,6
8	6,4
9	7,2

7	
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

P.P.

580—619 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
580	76 343	350	358	365	373	380	388	395	403	410	
581	418	425	433	440	448	455	462	470	477	485	
582	492	500	507	515	522	530	537	545	552	559	
583	567	574	582	589	597	604	612	619	626	634	
584	641	649	656	664	671	678	686	693	701	708	
585	716	723	730	738	745	753	760	768	775	782	
586	790	797	805	812	819	827	834	842	849	856	8
587	864	871	879	886	893	901	908	916	923	930	
588	938	945	953	960	967	975	982	989	997	*004	1 0,8
589	77 012	019	026	034	041	048	056	063	070	078	2 1,6
590	085	093	100	107	115	122	129	137	144	151	3 2,4
591	159	166	173	181	188	195	203	210	217	225	4 3,2
592	232	240	247	254	262	269	276	283	291	298	5 4,0
593	305	313	320	327	335	342	349	357	364	371	6 4,8
594	379	386	393	401	408	415	422	430	437	444	7 5,6
595	452	459	466	474	481	488	495	503	510	517	8 6,4
596	525	532	539	546	554	561	568	576	583	590	9 7,2
597	597	605	612	619	627	634	641	648	656	663	
598	670	677	685	692	699	706	714	721	728	735	
599	743	750	757	764	772	779	786	793	801	808	
600	815	822	830	837	844	851	859	866	873	880	
601	887	895	902	909	916	924	931	938	945	952	
602	960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025	
603	78 032	039	046	053	061	068	075	082	089	097	
604	104	111	118	125	132	140	147	154	161	168	
605	176	183	190	197	204	211	219	226	233	240	
606	247	254	262	269	276	283	290	297	305	312	7
607	319	326	333	340	347	355	362	369	376	383	
608	390	398	405	412	419	426	433	440	447	455	1 0,7
609	462	469	476	483	490	497	504	512	519	526	2 1,4
610	533	540	547	554	561	569	576	583	590	597	3 2,1
611	604	611	618	625	633	640	647	654	661	668	4 2,8
612	675	682	689	696	704	711	718	725	732	739	5 3,5
613	746	753	760	767	774	781	789	796	803	810	6 4,2
614	817	824	831	838	845	852	859	866	873	880	7 4,9
615	888	895	902	909	916	923	930	937	944	951	8 5,6
616	958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021	9 6,3
617	79 029	036	043	050	057	064	071	078	085	092	
618	099	106	113	120	127	134	141	148	155	162	
619	169	176	183	190	197	204	211	218	225	232	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.

620—659 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
620	79 239	246	253	260	267	274	281	288	295	302	
621	309	316	323	330	337	344	351	358	365	372	
622	379	386	393	400	407	414	421	428	435	442	
623	449	456	463	470	477	484	491	498	505	511	
624	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581	
625	588	595	602	609	616	623	630	637	644	650	
626	657	664	671	678	685	692	699	706	713	720	7
627	727	734	741	748	754	761	768	775	782	789	
628	796	803	810	817	824	831	837	844	851	858	1 0,7
629	865	872	879	886	893	900	906	913	920	927	2 1,4
630	934	941	948	955	962	969	975	982	989	996	3 2,1
631	80 003	010	017	024	030	037	044	051	058	065	4 2,8
632	072	079	085	092	099	106	113	120	127	134	5 3,5
633	140	147	154	161	168	175	182	188	195	202	6 4,2
634	209	216	223	229	236	243	250	257	264	271	7 4,9
635	277	284	291	298	305	312	318	325	332	339	8 5,6
636	346	353	359	366	373	380	387	393	400	407	9 6,3
637	414	421	428	434	441	448	455	462	468	475	
638	482	489	496	502	509	516	523	530	536	543	
639	550	557	564	570	577	584	591	598	604	611	
640	618	625	632	638	645	652	659	665	672	679	
641	686	693	699	706	713	720	726	733	740	747	
642	754	760	767	774	781	787	794	801	808	814	
643	821	828	835	841	848	855	862	868	875	882	
644	889	895	902	909	916	922	929	936	943	949	
645	956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017	
646	81 023	030	037	043	050	057	064	070	077	084	6
647	090	097	104	111	117	124	131	137	144	151	
648	158	164	171	178	184	191	198	204	211	218	1 0,6
649	224	231	238	245	251	258	265	271	278	285	2 1,2
650	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351	3 1,8
651	358	365	371	378	385	391	398	405	411	418	4 2,4
652	425	431	438	445	451	458	465	471	478	485	5 3,0
653	491	498	505	511	518	525	531	538	544	551	6 3,6
654	558	564	571	578	584	591	598	604	611	617	7 4,2
655	624	631	637	644	651	657	664	671	677	684	8 4,8
656	690	697	704	710	717	723	730	737	743	750	9 5,4
657	757	763	770	776	783	790	796	803	809	816	
658	823	829	836	842	849	856	862	869	875	882	
659	889	895	902	908	915	921	928	935	941	948	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.

660 – 699 Tabela 1.4 *(continuare)*

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
660	81 954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014
661	82 020	027	033	040	046	053	060	066	073	079
662	086	092	099	105	112	119	125	132	138	145
663	151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
664	217	223	230	236	243	249	256	263	269	276
665	282	289	295	302	308	315	321	328	334	341
666	347	354	360	367	373	380	387	393	400	406
667	413	419	426	432	439	445	452	458	465	471
668	478	484	491	497	504	510	517	523	530	536
669	543	549	556	562	569	575	582	588	595	601
670	607	614	620	627	633	640	646	653	659	666
671	672	679	685	692	698	705	711	718	724	730
672	737	743	750	756	763	769	776	782	789	795
673	802	808	814	821	827	834	840	847	853	860
674	866	872	879	885	892	898	905	911	918	924
675	930	937	943	950	956	963	969	975	982	988
676	995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052
677	83 059	065	072	078	085	091	097	104	110	117
678	123	129	136	142	149	155	161	168	174	181
679	187	193	200	206	213	219	225	232	238	245
680	251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
681	315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
682	378	385	391	398	404	410	417	423	429	436
683	442	448	455	461	467	474	480	487	493	499
684	506	512	518	525	531	537	544	550	556	563
685	569	575	582	588	594	601	607	613	620	626
686	632	639	645	651	658	664	670	677	683	689
687	696	702	708	715	721	727	734	740	746	753
688	759	765	771	778	784	790	797	803	809	816
689	822	828	835	841	847	853	860	866	872	879
690	885	891	897	904	910	916	923	929	935	942
691	948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004
692	84 011	017	023	029	036	042	048	055	061	067
693	073	080	086	092	098	105	111	117	123	130
694	136	142	148	155	161	167	173	180	186	192
695	198	205	211	217	223	230	236	242	248	255
696	261	267	273	280	286	292	298	305	311	317
697	323	330	336	342	348	354	361	367	373	379
698	386	392	398	404	410	417	423	429	435	442
699	448	454	460	466	473	479	485	491	497	504
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

7	
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

6	
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

P.P.

700—739 Tabela 1.4 (*continuare*)

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84	510	516	522	528	535	541	547	553	559	566
701		572	578	584	590	597	603	609	615	621	628
702		634	640	646	652	658	665	671	677	683	689
703		696	702	708	714	720	726	733	739	745	751
704		757	763	770	776	782	788	794	800	807	813
705		819	825	831	837	844	850	856	862	868	874
706		880	887	893	899	905	911	917	924	930	936
707		942	948	954	960	967	973	979	985	991	997
708	85	003	009	016	022	028	034	040	046	052	058
709		065	071	077	083	089	095	101	107	114	120
710		126	132	138	144	150	156	163	169	175	181
711		187	193	199	205	211	217	224	230	236	242
712		248	254	260	266	272	278	285	291	297	303
713		309	315	321	327	333	339	345	352	358	364
714		370	376	382	388	394	400	406	412	418	425
715		431	437	443	449	455	461	467	473	479	485
716		491	497	503	509	516	522	528	534	540	546
717		552	558	564	570	576	582	588	594	600	606
718		612	618	625	631	637	643	649	655	661	667
719		673	679	685	691	697	703	709	715	721	727
720		733	739	745	751	757	763	769	775	781	788
721		794	800	806	812	818	824	830	836	842	848
722		854	860	866	872	878	884	890	896	902	908
723		914	920	926	932	938	944	950	956	962	968
724		974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028
725	86	034	040	046	052	058	064	070	076	082	088
726		094	100	106	112	118	124	130	136	141	147
727		153	159	165	171	177	183	189	195	201	207
728		213	219	225	231	237	243	249	255	261	267
729		273	279	285	291	297	303	308	314	320	326
730		332	338	344	350	356	362	368	374	380	386
731		392	398	404	410	415	421	427	433	439	445
732		451	457	463	469	475	481	487	493	499	504
733		510	516	522	528	534	540	546	552	558	564
734		570	576	581	587	593	599	605	611	617	623
735		629	635	641	646	652	658	664	670	676	682
736		688	694	700	705	711	717	723	729	735	741
737		747	753	759	764	770	776	782	788	794	800
738		806	812	817	823	829	835	841	847	853	859
739		864	870	876	882	888	894	900	906	911	917
N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

6	
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

5	
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

P.P.

740–779 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
740	86 923	929	935	941	947	953	958	964	970	976	6 1 0,6 2 1,2 3 1,8 4 2,4 5 3,0 6 3,6 7 4,2 8 4,8 9 5,4
741	982	988	994	999	*005	*011	*017	*023	*029	*035	
742	87 040	046	052	058	064	070	075	081	087	093	
743	099	105	111	116	122	128	134	140	146	151	
744	157	163	169	175	181	186	192	198	204	210	
745	216	221	227	233	239	245	251	256	262	268	
746	274	280	286	291	297	303	309	315	320	326	
747	332	338	344	349	355	361	367	373	379	384	
748	390	396	402	408	413	419	425	431	437	442	
749	448	454	460	466	471	477	483	489	495	500	
750	506	512	518	523	529	535	541	547	552	558	
751	564	570	576	581	587	593	599	604	610	616	
752	622	628	633	639	645	651	656	662	668	674	
753	679	685	691	697	703	708	714	720	726	731	
754	737	743	749	754	760	766	772	777	783	789	
755	795	800	806	812	818	823	829	835	841	846	5 1 0,5 2 1,0 3 1,5 4 2,0 5 2,5 6 3,0 7 3,5 8 4,0 9 4,5
756	852	858	864	869	875	881	887	892	898	904	
757	910	915	921	927	933	938	944	950	955	961	
758	967	973	978	984	990	996	*001	*007	*013	*018	
759	88 024	030	036	041	047	053	058	064	070	076	
760	081	087	093	098	104	110	116	121	127	133	
761	138	144	150	156	161	167	173	178	184	190	
762	195	201	207	213	218	224	230	235	241	247	
763	252	258	264	270	275	281	287	292	298	304	
764	309	315	321	326	332	338	343	349	355	360	
765	366	372	377	383	389	395	400	406	412	417	
766	423	429	434	440	446	451	457	463	468	474	
767	480	485	491	497	502	508	513	519	525	530	
768	536	542	547	553	559	564	570	576	581	587	
769	593	598	604	610	615	621	627	632	638	643	
770	649	655	660	666	672	677	683	689	694	700	6 1 0,6 2 1,2 3 1,8 4 2,4 5 3,0 6 3,6 7 4,2 8 4,8 9 5,4
771	705	711	717	722	728	734	739	745	750	756	
772	762	767	773	779	784	790	795	801	807	812	
773	818	824	829	835	840	846	852	857	863	868	
774	874	880	885	891	897	902	908	913	919	925	
775	930	936	941	947	953	958	964	969	975	981	
776	986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037	
777	89 042	048	053	059	064	070	076	081	087	092	
778	098	104	109	115	120	126	131	137	143	148	
779	154	159	165	170	176	182	187	193	198	204	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.

780–819 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
780	89 209	215	221	226	232	237	243	248	254	260	
781	265	271	276	282	287	293	298	304	310	315	
782	321	326	332	337	343	348	354	360	365	371	
783	376	382	387	393	398	404	409	415	421	426	
784	432	437	443	448	454	459	465	470	476	481	
785	487	492	498	504	509	515	520	526	531	537	
786	542	548	553	559	564	570	575	581	586	592	6
787	597	603	609	614	620	625	631	636	642	647	
788	653	658	664	669	675	680	686	691	697	702	1 0,6
789	708	713	719	724	730	735	741	746	752	757	2 1,2
790	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812	3 1,8
791	818	823	829	834	840	845	851	856	862	867	4 2,4
792	873	878	883	889	894	900	905	911	916	922	5 3,0
793	927	933	938	944	949	955	960	966	971	977	6 3,6
794	982	988	993	998	*004	*009	*015	*020	*026	*031	7 4,2
795	90 037	042	048	053	059	064	069	075	080	086	8 4,8
796	091	097	102	108	113	119	124	129	135	140	9 5,4
797	146	151	157	162	168	173	179	184	189	195	
798	200	206	211	217	222	227	233	238	244	249	
799	255	260	266	271	276	282	287	293	298	304	
800	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	
801	363	369	374	380	385	390	396	401	407	412	
802	417	423	428	434	439	445	450	455	461	466	
803	472	477	482	488	493	499	504	509	515	520	
804	526	531	536	542	547	553	558	563	569	574	
805	580	585	590	596	601	607	612	617	623	628	
806	634	639	644	650	655	660	666	671	677	682	5
807	687	693	698	703	709	714	720	725	730	736	
808	741	747	752	757	763	768	773	779	784	789	1 0,5
809	795	800	806	811	816	822	827	832	838	843	2 1,0
810	849	854	859	865	870	875	881	886	891	897	3 1,5
811	902	907	913	918	924	929	934	940	945	950	4 2,0
812	956	961	966	972	977	982	988	993	998	*004	5 2,5
813	91 009	014	020	025	030	036	041	046	052	057	6 3,0
814	062	068	073	078	084	089	094	100	105	110	7 3,5
815	116	121	126	132	137	142	148	153	158	164	8 4,0
816	169	174	180	185	190	196	201	206	212	217	9 4,5
817	222	228	233	238	243	249	254	259	265	270	
818	275	281	286	291	297	302	307	312	318	323	
819	328	334	339	344	350	355	360	365	371	376	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.

820–859 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
820	91 381	387	392	397	403	408	413	418	424	429	
821	434	440	445	450	455	461	466	471	477	482	
822	487	492	498	503	508	514	519	524	529	535	
823	540	545	551	556	561	566	572	577	582	587	
824	593	598	603	609	614	619	624	630	635	640	
825	645	651	656	661	666	672	677	682	687	693	
826	698	703	709	714	719	724	730	735	740	745	6
827	751	756	761	766	772	777	782	787	793	798	1 | 0,6
828	803	808	814	819	824	829	834	840	845	850	2 | 1,2
829	855	861	866	871	876	882	887	892	897	903	3 | 1,8
830	908	913	918	924	929	934	939	944	950	955	4 | 2,4
831	960	965	971	976	981	986	991	997	*002	*007	5 | 3,0
832	92 012	018	023	028	033	038	044	049	054	059	6 | 3,6
833	065	070	075	080	085	091	096	101	106	111	7 | 4,2
834	117	122	127	132	137	143	148	153	158	163	8 | 4,8
835	169	174	179	184	189	195	200	205	210	215	9 | 5,4
836	221	226	231	236	241	247	252	257	262	267	
837	273	278	283	288	293	298	304	309	314	319	
838	324	330	335	340	345	350	355	361	366	371	
839	376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	
840	428	433	438	443	449	454	459	464	469	474	
841	480	485	490	495	500	505	511	516	521	526	
842	531	536	542	547	552	557	562	567	572	578	
843	583	588	593	598	603	609	614	619	624	629	
844	634	639	645	650	655	660	665	670	675	681	
845	686	691	696	701	706	711	716	722	727	732	
846	737	742	747	752	758	763	768	773	778	783	5
847	788	793	799	804	809	814	819	824	829	834	
848	840	845	850	855	860	865	870	875	881	886	1 | 0,5
849	891	896	901	906	911	916	921	927	932	937	2 | 1,0
850	942	947	952	957	962	967	973	978	983	988	3 | 1,5
851	993	998	*003	*008	*013	*018	*024	*029	*034	*039	4 | 2,0
852	93 044	049	054	059	064	069	075	080	085	090	5 | 2,5
853	095	100	105	110	115	120	125	131	136	141	6 | 3,0
854	146	151	156	161	166	171	176	181	186	192	7 | 3,5
855	197	202	207	212	217	222	227	232	237	242	8 | 4,0
856	247	252	258	263	268	273	278	283	288	293	9 | 4,5
857	298	303	308	313	318	323	328	334	339	344	
858	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394	
859	399	404	409	414	420	425	430	435	440	445	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.

860–899 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
860	93 450	455	460	465	470	475	480	485	490	495
861	500	505	510	515	520	526	531	536	541	546
862	551	556	561	566	571	576	581	586	591	596
863	601	606	611	616	621	626	631	636	641	646
864	651	656	661	666	671	676	682	687	692	697
865	702	707	712	717	722	727	732	737	742	747
866	752	757	762	767	772	777	782	787	792	797
867	802	807	812	817	822	827	832	837	842	847
868	852	857	862	867	872	877	882	887	892	897
869	902	907	912	917	922	927	932	937	942	947
870	952	957	962	967	972	977	982	987	992	997
871	94 002	007	012	017	022	027	032	037	042	047
872	052	057	062	067	072	077	082	086	091	096
873	101	106	111	116	121	126	131	136	141	146
874	151	156	161	166	171	176	181	186	191	196
875	201	206	211	216	221	226	231	236	240	245
876	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295
877	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345
878	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
879	399	404	409	414	419	424	429	433	438	443
880	448	453	458	463	468	473	478	483	488	493
881	498	503	507	512	517	522	527	532	537	542
882	547	552	557	562	567	571	576	581	586	591
883	596	601	606	611	616	621	626	630	635	640
884	645	650	655	660	665	670	675	680	685	689
885	694	699	704	709	714	719	724	729	734	738
886	743	748	753	758	763	768	773	778	783	787
887	792	797	802	807	812	817	822	827	832	836
888	841	846	851	856	861	866	871	876	880	885
889	890	895	900	905	910	915	919	924	929	934
890	939	944	949	954	959	963	968	973	978	983
891	988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032
892	95 036	041	046	051	056	061	066	071	075	080
893	085	090	095	100	105	109	114	119	124	129
894	134	139	143	148	153	158	163	168	173	177
895	182	187	192	197	202	207	211	216	221	226
896	231	236	240	245	250	255	260	265	270	274
897	279	284	289	294	299	303	308	313	318	323
898	328	332	337	342	347	352	357	361	366	371
899	376	381	386	390	395	400	405	410	415	419
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

5	
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

4	
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

900–939 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
900	95 424	429	434	439	444	448	453	458	463	468	
901	472	477	482	487	492	497	501	506	511	516	
902	521	525	530	535	540	545	550	554	559	564	
903	569	574	578	583	588	593	598	602	607	612	
904	617	622	626	631	636	641	646	650	655	660	
905	665	670	674	679	684	689	694	698	703	708	
906	713	718	722	727	732	737	742	746	751	756	5
907	761	766	770	775	780	785	789	794	799	804	
908	809	813	818	823	828	832	837	842	847	852	1 0,5
909	856	861	866	871	875	880	885	890	895	899	2 1,0
910	904	909	914	918	923	928	933	938	942	947	3 1,5
911	952	957	961	966	971	976	980	985	990	995	4 2,0
912	999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042	5 2,5
913	96 047	052	057	061	066	071	076	080	085	090	6 3,0
914	095	099	104	109	114	118	123	128	133	137	7 3,5
915	142	147	152	156	161	166	171	175	180	185	8 4,0
916	190	194	199	204	209	213	218	223	227	232	9 4,5
917	237	242	246	251	256	261	265	270	275	280	
918	284	289	294	298	303	308	313	317	322	327	
919	332	336	341	346	350	355	360	365	369	374	
920	379	384	388	393	398	402	407	412	417	421	
921	426	431	435	440	445	450	454	459	464	468	
922	473	478	483	487	492	497	501	506	511	515	
923	520	525	530	534	539	544	548	553	558	562	
924	567	572	577	581	586	591	595	600	605	609	
925	614	619	624	628	633	638	642	647	652	656	
926	661	666	670	675	680	685	689	694	699	703	4
927	708	713	717	722	727	731	736	741	745	750	
928	755	759	764	769	774	778	783	788	792	797	1 0,4
929	802	806	811	816	820	825	830	834	839	844	2 0,8
930	848	853	858	862	867	872	876	881	886	890	3 1,2
931	895	900	904	909	914	918	923	928	932	937	4 1,6
932	942	946	951	956	960	965	970	974	979	984	5 2,0
933	988	993	997	*002	*007	*011	*016	*021	*025	*030	6 2,4
934	97 035	039	044	049	053	058	063	067	072	077	7 2,8
935	081	086	090	095	100	104	109	114	118	123	8 3,2
936	128	132	137	142	146	151	155	160	165	169	9 3,6
937	174	179	183	188	192	197	202	206	211	216	
938	220	225	230	234	239	243	248	253	257	262	
939	267	271	276	280	285	290	294	299	304	308	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.

940–979 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
940	97 313	317	322	327	331	336	340	345	350	354
941	359	364	368	373	377	382	387	391	396	400
942	405	410	414	419	424	428	433	437	442	447
943	451	456	460	465	470	474	479	483	488	493
944	497	502	506	511	516	520	525	529	534	539
945	543	548	552	557	562	566	571	575	580	585
946	589	594	598	603	607	612	617	621	626	630
947	635	640	644	649	653	658	663	667	672	676
948	681	685	690	695	699	704	708	713	717	722
949	727	731	736	740	745	749	754	759	763	768
950	772	777	782	786	791	795	800	804	809	813
951	818	823	827	832	836	841	845	850	855	859
952	864	868	873	877	882	886	891	896	900	905
953	909	914	918	923	928	932	937	941	946	950
954	955	959	964	968	973	978	982	987	991	996
955	98 000	005	009	014	019	023	028	032	037	041
956	046	050	055	059	064	068	073	078	082	087
957	091	096	100	105	109	114	118	123	127	132
958	137	141	146	150	155	159	164	168	173	177
959	182	186	191	195	200	204	209	214	218	223
960	227	232	236	241	245	250	254	259	263	268
961	272	277	281	286	290	295	299	304	308	313
962	318	322	327	331	336	340	345	349	354	358
963	363	367	372	376	381	385	390	394	399	403
964	408	412	417	421	426	430	435	439	444	448
965	453	457	462	466	471	475	480	484	489	493
966	498	502	507	511	516	520	525	529	534	538
967	543	547	552	556	561	565	570	574	579	583
968	588	592	597	601	605	610	614	619	623	628
969	632	637	641	646	650	655	659	664	668	673
970	677	682	686	691	695	700	704	709	713	717
971	722	726	731	735	740	744	749	753	758	762
972	767	771	776	780	784	789	793	798	802	807
973	811	816	820	825	829	834	838	843	847	851
974	856	860	865	869	874	878	883	887	892	896
975	900	905	909	914	918	923	927	932	936	941
976	945	949	954	958	963	967	972	976	981	985
977	989	994	998	*003	*007	*012	016	*021	*025	*029
978	99 034	038	043	047	052	056	061	065	069	074
979	078	083	087	092	096	100	105	109	114	118
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

5	
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

4	
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

980–999 Tabela 1.4 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
980	99 123	127	131	136	140	145	149	154	158	162
981	167	171	176	180	185	189	193	198	202	207
982	211	216	220	224	229	233	238	242	247	251
983	255	260	264	269	273	277	282	286	291	295
984	300	304	308	313	317	322	326	330	335	339
985	344	348	352	357	361	366	370	374	379	383
986	388	392	396	401	405	410	414	419	423	427
987	432	436	441	445	449	454	458	463	467	471
988	476	480	484	489	493	498	502	506	511	515
989	520	524	528	533	537	542	546	550	555	559
990	564	568	572	577	581	585	590	594	599	603
991	607	612	616	621	625	629	634	638	642	647
992	651	656	660	664	669	673	677	682	686	691
993	695	699	704	708	712	717	721	726	730	734
994	739	743	747	752	756	760	765	769	774	778
995	782	787	791	795	800	804	808	813	817	822
996	826	830	835	839	843	848	852	856	861	865
997	870	874	878	883	887	891	896	900	904	909
998	913	917	922	926	930	935	939	944	948	952
999	957	961	965	970	974	978	983	987	991	996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P.P.

5	
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

4	
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

P.P.

Tabela 1.5. **Antilogaritmi**

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256

100 – 54 Tabela 1.5 (*continuare*)

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2225	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540

55–99 Tabela 1.5 (*continuare*)

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7214	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

Tabela 1.6 **Logaritmii naturali ai numerelor de la 1,00 pînă la 9,99**

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029

5.5—9,9

Tabela 1.6 (*continuare*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

Tabela 1.7. **Logaritmii naturali ai puterilor lui 10**

n	$\ln 10^n$	n	$\ln 10^n$	n	$\ln 10^n$	n	$\ln 10^n$
—20	$\overline{47},9482981$	—10	$\overline{24},9741491$	+ 1	2,3025851	+11	25,3284360
—19	$\overline{44},2508832$	— 9	$\overline{21},2767342$	+ 2	4,6051702	+12	27,6310211
—18	$\overline{42},5534683$	— 8	$\overline{19},5793193$	+ 3	6,9077553	+13	29,9336062
—17	$\overline{40},8560534$	— 7	$\overline{17},8819043$	+ 4	9,2103404	+14	32,2361913
—16	$\overline{37},1586385$	— 6	$\overline{14},1844894$	+ 5	11,5129255	+15	34,5387664
—15	$\overline{35},4612236$	— 5	$\overline{12},4870746$	+ 6	13,8155111	+16	36,8413615
—14	$\overline{33},7638087$	— 4	$\overline{10},7896596$	+ 7	16,1180957	+17	39,1439466
—13	$\overline{30},0663938$	— 3	$\overline{7},0922447$	+ 8	18,4206807	+18	41,4465317
—12	$\overline{28},3689789$	— 2	$\overline{5},3948398$	+ 9	20,7232658	+19	43,7491168
—11	$\overline{26},6715640$	— 1	$\overline{3},6974149$	+10	23,0258509	+20	46,0517019

Tabela 1.8. **Multiplii lui 1/M**

pentru transformarea logaritmilor zecimali în logaritmi naturali

$$\ln N = {}^1/_M \times \lg N$$

$${}^1/_M = \ln 10 = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79915$$

	Multiplii		Multiplii		Multiplii
10	23,02 585	25	57,56 463	**40**	92,10 340
11	25,32 844	26	59,86 721	41	94,40 599
12	27,63 102	27	62,16 980	42	96,70 857
13	29,93 361	28	64,47 238	43	99,01 116
14	32,23 619	29	66,77 497	44	101,31 374
15	34,53 878	**30**	69,07 755	45	103,61 633
16	36,84 136	31	71,38 014	46	105,91 891
17	39,14 395	32	73,68 272	47	108,22 150
18	41,44 653	33	75,98 531	48	110,52 408
19	43,74 912	34	78,28 789	49	112,82 667
20	46,05 170	35	80,59 048	**50**	115,12 925
21	48,35 429	36	82,89 306	51	117,43 184
22	50,65 687	37	85,19 565	52	119,73 442
23	52,95 946	38	87,49 823	53	122,03 701
24	55,26 204	39	89,80 082	54	124,33 960

Tabela 1.9 **Puteri, radicali, logaritmi naturali, valori reciproce, lungimi şi arii de cercuri**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,78 54	**1**
2	4	8	1,4142	1,2599	0,69315	500,000	6,283	3,14 16	2
3	9	27	1,7321	1,4422	1,09861	333,333	9,425	7,06 86	3
4	16	64	2,0000	1,5874	1,38629	250,000	12,566	12,56 64	4
5	25	125	2,2361	1,7100	1,60944	200,000	15,708	19,63 50	5
6	36	216	2,4495	1,8171	1,79176	166,667	18,850	28,27 43	6
7	49	343	2,6458	1,9129	1,94591	142,857	21,991	38,48 45	7
8	64	512	2,8284	2,0000	2,07944	125,000	25,133	50,26 55	8
9	81	729	3,0000	2,0801	2,19722	111,111	28,274	63,61 73	9
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	2,30259	100,000	31,416	78,53 98	**10**
11	1 21	1 331	3,3166	2,2240	2,39790	90,9091	34,558	95,03 32	11
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	2,48491	83,3333	37,699	1 13,09 7	12
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	2,56495	76,9231	40,841	1 32,73 2	13
14	1 96	2 744	3,7417	2,4101	2,63906	71,4286	43,982	1 53,93 8	14
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	2,70805	66,6667	47,124	1 76,71 5	15
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	2,77259	62,5000	50,265	2 01,06 2	16
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	2,83321	58,8235	53,407	2 26,98 0	17
18	3 24	5 832	4,2426	2,6207	2,89037	55,5556	56,549	2 54,46 9	18
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	2,94444	52,6316	59,690	2 83,52 9	19
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	2,99573	50,0000	62,832	3 14,15 9	**20**
21	4 41	9 261	4,5826	2,7589	3,04452	47,6190	65,973	3 46,36 1	21
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	3,09104	45,4545	69,115	3 80,13 3	22
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	3,13549	43,4783	72,257	4 15,47 6	23
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	3,17805	41,6667	75,398	4 52,38 9	24
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	3,21888	40,0000	78,540	4 90,87 4	25
26	6 76	17 576	5,0990	2,9625	3,25810	38,4615	81,681	5 30,92 9	26
27	7 29	19 683	5,1962	3,0000	3,29584	37,0370	84,823	5 72,55 5	27
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	3,33220	35,7143	87,965	6 15,75 2	28
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	3,36730	34,4828	91,106	6 60,52 0	29
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	3,40120	33,3333	94,248	7 06,85 8	**30**
31	9 61	29 791	5,5678	3,1414	3,43399	32,2581	97,389	7 54,76 8	31
32	10 24	32 768	5,6569	3,1748	3,46574	31,2500	100,531	8 04,24 8	32
33	10 89	35 937	5,7446	3,2075	3,49651	30,3030	103,673	8 55,29 9	33
34	11 56	39 304	5,8310	3,2396	3,52636	29,4118	106,814	9 07,92 0	34
35	12 25	42 875	5,9161	3,2711	3,55535	28,5714	109,956	9 62,11 3	35
36	12 96	46 656	6,0000	3,3019	3,58352	27,7778	113,097	10 17, 88	36
37	13 69	50 653	6,0828	3,3322	3,61092	27,0270	116,239	10 75, 21	37
38	14 44	54 872	6,1644	3,3620	3,63759	26,3158	119,381	11 34, 11	38
39	15 21	59 319	6,2450	3,3912	3,66356	25,6410	122,522	11 94, 59	39
40	16 00	64 000	6,3246	3,4200	3,68888	25,0000	125,66	12 56, 64	**40**
41	16 81	68 921	6,4031	3,4482	3,71357	24,3902	128,81	13 20, 25	41
42	17 64	74 088	6,4807	3,4760	3,73767	23,8095	131,95	13 85, 44	42
43	18 49	79 507	6,5574	3,5034	3,76120	23,2558	135,09	14 52, 20	43
44	19 36	85 184	6,6332	3,5303	3,78419	22,7273	138,23	15 20, 53	44
45	20 25	91 125	6,7082	3,5569	3,80666	22,2222	141,37	15 90, 43	45
46	21 16	97 336	6,7823	3,5830	3,82864	21,7391	144,51	16 61, 90	46
47	22 09	103 823	6,8557	3,6088	3,85015	21,2766	147,65	17 34, 94	47
48	23 04	110 592	6,9282	3,6342	3,87120	20,8333	150,80	18 09, 56	48
49	24 01	117 649	7,0000	3,6593	3,89182	20,4082	153,94	18 85, 74	49
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	3,91202	20,0000	157,08	19 63, 50	**50**

50—100 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	3,91202	20,0000	157,08	19 63,50	**50**
51	26 01	132 651	7,1414	3,7084	3,93183	19,6078	160,22	20 42,82	51
52	27 04	140 608	7,2111	3,7325	3,95124	19,2308	163,36	21 23,72	52
53	28 09	148 877	7,2801	3,7563	3,97029	18,8679	166,50	22 06,18	53
54	29 16	157 464	7,3485	3,7798	3,98898	18,5185	169,65	22 90,22	54
55	30 25	166 375	7,4162	3,8030	4,00733	18,1818	172,79	23 75,83	55
56	31 36	175 616	7,4833	3,8259	4,02535	17,8571	175,93	24 63,01	56
57	32 49	185 193	7,5498	3,8485	4,04305	17,5439	179,07	25 51,76	57
58	33 64	195 112	7,6158	3,8709	4,06044	17,2414	182,21	26 42,08	58
59	34 81	205 379	7,6811	3,8930	4,07754	16,9492	185,35	27 33,97	59
60	36 00	216 000	7,7460	3,9149	4,09434	16,6667	188,50	28 27,43	**60**
61	37 21	226 981	7,8102	3,9365	4,11087	16,3934	191,64	29 22,47	61
62	38 44	238 328	7,8740	3,9579	4,12713	16,1290	194,78	30 19,07	62
63	39 69	250 047	7,9373	3,9791	4,14313	15,8730	197,92	31 17,25	63
64	40 96	262 144	8,0000	4,0000	4,15888	15,6250	201,06	32 16,99	64
65	42 25	274 625	8,0623	4,0207	4,17439	15,3846	204,20	33 18,31	65
66	43 56	287 496	8,1240	4,0412	4,18965	15,1515	207,35	34 21,19	66
67	44 89	300 763	8,1854	4,0615	4,20469	14,9254	210,49	35 25,65	67
68	46 24	314 432	8,2462	4,0817	4,21951	14,7059	213,63	36 31,68	68
69	47 61	328 509	8,3066	4,1016	4,23411	14,4928	216,77	37 39,28	69
70	49 00	343 000	8,3666	4,1213	4,24850	14,2857	219,91	38 48,45	**70**
71	50 41	357 911	8,4261	4,1408	4,26268	14,0845	223,05	39 59,19	71
72	51 84	373 248	8,4853	4,1602	4,27667	13,8889	226,19	40 71,50	72
73	53 29	389 017	8,5440	4,1793	4,29046	13,6986	229,34	41 85,29	73
74	54 76	405 224	8,6023	4,1983	4,30407	13,5135	232,48	43 00,84	74
75	56 25	421 875	8,6603	4,2172	4,31749	13,3333	235,62	44 17,86	75
76	57 76	438 976	8,7178	4,2358	4,33073	13,1579	238,76	45 36,46	76
77	59 29	456 533	8,7750	4,2543	4,34381	12,9870	241,90	46 56,63	77
78	60 84	474 552	8,8318	4,2727	4,35671	12,8205	245,04	47 78,36	78
79	62 41	493 039	8,8882	4,2908	4,36945	12,6582	248,19	49 01,67	79
80	64 00	512 000	8,9443	4,3089	4,38203	12,5000	251,33	50 26,55	**80**
81	65 61	531 441	9,0000	4,3267	4,39445	12,3457	254,47	51 53,00	81
82	67 24	551 368	9,0554	4,3445	4,40672	12,1951	257,61	52 81,02	82
83	68 89	571 787	9,1104	4,3621	4,41884	12,0482	260,75	54 10,61	83
84	70 56	592 704	9,1652	4,3795	4,43082	11,9048	263,89	55 41,77	84
85	72 25	614 125	9,2195	4,3968	4,44265	11,7647	267,04	56 74,50	85
86	73 96	636 056	9,2736	4,4140	4,45435	11,6279	270,18	58 08,80	86
87	75 69	658 503	9,3274	4,4310	4,46591	11,4943	273,32	59 44,68	87
88	77 44	681 472	9,3808	4,4480	4,47734	11,3636	276,46	60 82,12	88
89	79 21	704 969	9,4340	4,4647	4,48864	11,2360	279,60	62 21,14	89
90	81 00	729 000	9,4868	4,4814	4,49981	11,1111	282,74	63 61,73	**90**
91	82 81	753 571	9,5394	4,4979	4,51086	10,9890	285,88	65 03,88	91
92	84 64	778 688	9,5917	4,5144	4,52179	10,8696	289,03	66 47,61	92
93	86 49	804 357	9,6437	4,5307	4,53260	10,7527	292,17	67 92,91	93
94	88 36	830 584	9,6954	4,5468	4,54329	10,6383	295,31	69 39,78	94
95	90 25	857 375	9,7468	4,5629	4,55388	10,5263	298,45	70 88,22	95
96	92 16	884 736	9,7980	4,5789	4,56435	10,4167	301,59	72 38,23	96
97	94 09	912 673	9,8489	4,5947	4,57471	10,3093	304,73	73 89,81	97
98	96 04	941 192	9,8995	4,6104	4,58497	10,2041	307,88	75 42,96	98
99	98 01	970 299	9,9499	4,6261	4,59512	10,1010	311,02	76 97,69	99
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	4,60517	10,0000	314,16	78 53,98	**100**

100–150 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	4,60517	10,0000	314,16	78 53,98	100
101	1 02 01	1 030 301	10 0499	4,6570	4,61512	9,90099	317,30	80 11,85	101
102	1 04 04	1 061 208	10,0995	4,6723	4,62497	9,80392	320,44	81 71,28	102
103	1 06 09	1 092 727	10,1489	4,6875	4,63473	9,70874	323,58	83 32,29	103
104	1 08 16	1 124 864	10,1980	4,7027	4,64439	9,61538	326,73	84 94,87	104
105	1 10 25	1 157 625	10,2470	4,7177	4,65396	9,52381	329,87	86 59,01	105
106	1 12 36	1 191 016	10,2956	4,7326	4,66344	9,43396	333,01	88 24,73	106
107	1 14 49	1 225 043	10,3441	4,7475	4,67283	9,34579	336,15	89 92,02	107
108	1 16 64	1 259 712	10,3923	4,7622	4,68213	9,25926	339,29	91 60,88	108
109	1 18 81	1 295 029	10,4403	4,7769	4,69135	9,17431	342,43	93 31,32	109
110	1 21 00	1 331 000	10,4881	4,7914	4,70048	9,09091	345,58	95 03,32	110
111	1 23 21	1 367 631	10,5357	4,8059	4,70953	9,00901	348,72	96 76,89	111
112	1 25 44	1 404 928	10,5830	4,8203	4,71850	8,92857	351,86	98 52,03	112
113	1 27 69	1 442 897	10,6301	4,8346	4,72739	8,84956	355,00	1 00 28,7	113
114	1 29 96	1 481 544	10,6771	4,8488	4,73620	8,77193	358,14	1 02 07,0	114
115	1 32 25	1 520 875	10,7238	4,8629	4,74493	8,69565	361,28	1 03 86,9	115
116	1 34 56	1 560 896	10,7703	4,8770	4,75359	8,62069	364,42	1 05 68,3	116
117	1 36 89	1 601 613	10'8167	4,8910	4,76217	8,54701	367,57	1 07 51,3	117
118	1 39 24	1 643 032	10,8628	4,9049	4,77068	8,47458	370,71	1 09 35,9	118
119	1 41 61	1 685 159	10,9087	4,9187	4,77912	8,40336	373,85	1 11 22,0	119
120	1 44 00	1 728 000	10,9545	4,9324	4,78749	8,33333	376,99	1 13 09,7	120
121	1 46 41	1 771 561	11,0000	4,9461	4,79579	8,26446	380,13	1 14 99,0	121
122	1 48 84	1 815 848	11,0454	4,9597	4,80402	8,19672	383,27	1 16 89,9	122
123	1 51 29	1 860 867	11,0905	4,9732	4,81218	8,13008	386,42	1 18 82,3	123
124	1 53 76	1 906 624	11,1355	4,9866	4,82028	8,06452	389,56	1 20 76,3	124
125	1 56 25	1 953 125	11,1803	5,0000	4,82831	8,00000	392,70	1 22 71,8	125
126	1 58 76	2 000 376	11,2250	5,0133	4,83628	7,93651	395,84	1 24 69,0	126
127	1 61 29	2 048 383	11,2694	5,0265	4,84419	7,87402	398,98	1 26 67,7	127
128	1 63 84	2 097 152	11,3137	5,0397	4,85203	7,81250	402,12	1 28 68,0	128
129	1 66 41	2 146 689	11,3578	5,0528	4,85981	7,75194	405,27	1 30 69,8	129
130	1 69 00	2 197 000	11,4018	5,0658	4,86753	7,69231	408,41	1 32 73,2	130
131	1 71 61	2 248 091	11,4455	5,0788	4,87520	7,63359	411,55	1 34 78,2	131
132	1 74 24	2 299 968	11,4891	5,0916	4,88280	7,57576	414,69	1 36 84,8	132
133	1 76 89	2 352 637	11,5326	5,1045	4,89035	7,51880	417,83	1 38 92,9	133
134	1 79 56	2 406 104	11,5758	5,1172	4,89784	7,46269	420,97	1 41 02,6	134
135	1 82 25	2 460 375	11,6190	5,1299	4,90527	7,40741	424,12	1 43 13,9	135
136	1 84 96	2 515 456	11,6619	5,1426	4,91265	7,35294	427,26	1 45 26,7	136
137	1 87 69	2 571 353	11,7047	5,1551	4,91998	7,29927	430,40	1 47 41,1	137
138	1 90 44	2 628 072	11,7473	5,1676	4,92725	7,24638	433,54	1 49 57,1	138
139	1 93 21	2 685 619	11,7898	5,1801	4,93447	7,19424	436,68	1 51 74,7	139
140	1 96 00	2 744 000	11,8322	5,1925	4,94164	7,14286	439,82	1 53 93,8	140
141	1 98 81	2 803 221	11,8743	5,2048	4,94876	7,09220	442,96	1 56 14,5	141
142	2 01 64	2 863 288	11,9164	5,2171	4,95583	7,04225	446,11	1 58 36,8	142
143	2 04 49	2 924 207	11,9583	5,2293	4,96284	6,99301	449,25	1 60 60,6	143
144	2 07 36	2 985 984	12,0000	5,2415	4,96981	6,94444	452,39	1 62 86,0	144
145	2 10 25	3 048 625	12,0416	5,2536	4,97673	6,89655	455,53	1 65 13,0	145
146	2 13 16	3 112 136	12,0830	5,2656	4,98361	6,84932	458,67	1 67 41,5	146
147	2 16 09	3 176 523	12,1244	5,2776	4,99043	6,80272	461,81	1 69 71,7	147
148	2 19 04	3 241 792	12,1655	5,2896	4,99721	6,75676	464,96	1 72 03,4	148
149	2 22 01	3 307 949	12,2066	5,3015	5,00395	6,71141	468,10	1 74 36,6	149
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	5,01064	6,66667	471,24	1 76 71,5	150

150–200 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	5,01064	6,66667	471,24	1 76 71,5	150
151	2 28 01	3 442 951	12,2882	5,3251	5,01728	6,62252	474,38	1 79 07,9	151
152	2 31 04	3 511 808	12,3288	5,3368	5,02388	6,57895	477,52	1 81 45,8	152
153	2 34 09	3 581 577	12,3693	5,3485	5,03044	6,53595	480,66	1 83 85,4	153
154	2 37 16	3 652 264	12,4097	5,3601	5,03695	6,49351	483,81	1 86 26,5	154
155	2 40 25	3 723 875	12,4499	5,3717	5,04343	6,45161	486,95	1 88 69,2	155
156	2 43 36	3 796 416	12,4900	5,3832	5,04986	6,41026	490,09	1 91 13,4	156
157	2 46 49	3 869 893	12,5300	5,3947	5,05625	6,36943	493,23	1 93 59,3	157
158	2 49 64	3 944 312	12,5698	5,4061	5,06260	6,32911	496,37	1 96 06,7	158
159	2 52 81	4 019 679	12,6095	5,4175	5,06890	6,28931	499,51	1 98 55,7	159
160	2 56 00	4 096 000	12,6491	5,4288	5,07517	6,25000	502,65	2 01 06,2	160
161	2 59 21	4 173 281	12,6886	5,4401	5,08140	6,21118	505,80	2 03 58,3	161
162	2 62 44	4 251 528	12,7279	5,4514	5,08760	6,17284	508,94	2 06 12,0	162
163	2 65 69	4 330 747	12,7671	5,4626	5,09375	6,13497	512,08	2 08 67,2	163
164	2 68 96	4 410 944	12,8062	5,4737	5,09987	6,09756	515,22	2 11 24,1	164
165	2 72 25	4 492 125	12,8452	5,4848	5,10595	6,06061	518,36	2 13 82,5	165
166	2 75 56	4 574 296	12,8841	5,4959	5,11199	6,02410	521,50	2 16 42,4	166
167	2 78 89	4 657 463	12,9228	5,5069	5,11799	5,98802	524,65	2 19 04,0	167
168	2 82 24	4 741 632	12,9615	5,5178	5,12396	5,95238	527,79	2 21 67,1	168
169	2 85 61	4 826 809	13,0000	5,5288	5,12990	5,91716	530,93	2 24 31,3	169
170	2 89 00	4 913 000	13,0384	5,5397	5,13580	5,88235	534,07	2 26 98,0	170
171	2 92 41	5 000 211	13,0767	5,5505	5,14166	5,84795	537,21	2 29 65,8	171
172	2 95 84	5 088 448	13,1149	5,5613	5,14749	5,81395	540,35	2 32 35,2	172
173	2 99 29	5 177 717	13,1529	5,5721	5,15329	5,78035	543,50	2 35 06,2	173
174	3 02 76	5 268 024	13,1909	5,5828	5,15906	5,74713	546,64	2 37 78,7	174
175	3 06 25	5 359 375	13,2288	5,5934	5,16479	5,71429	549,78	2 40 52,8	175
176	3 09 76	5 451 776	13,2665	5,6041	5,17048	5,68182	552,92	2 43 28,5	176
177	3 13 29	5 545 233	13,3041	5,6147	5,17615	5,64972	556,06	2 46 05,7	177
178	3 16 84	5 639 752	13,3417	5,6252	5,18178	5,61798	559,20	2 48 84,0	178
179	3 20 41	5 735 339	13,3791	5,6357	5,18739	5,58659	562,35	2 51 64,9	179
180	3 24 00	5 832 000	13,4164	5,6462	5,19296	5,55556	565,49	2 54 46,9	180
181	3 27 61	5 929 741	13,4536	5,6567	5,19850	5,52486	568,63	2 57 30,4	181
182	3 31 24	6 028 568	13,4907	5,6671	5,20401	5,49451	571,77	2 60 15,5	182
183	3 34 89	6 128 487	13,5277	5,6774	5,20949	5,46448	574,91	2 63 02,2	183
184	3 38 56	6 229 504	13,5647	5,6877	5,21494	5,43478	578,05	2 65 90,4	184
185	3 42 25	6 331 625	13,6015	5,6980	5,22036	5,40541	581,19	2 68 80,3	185
186	3 45 96	6 434 856	13,6382	5,7083	5,22575	5,37634	584,34	2 71 71,6	186
187	3 49 69	6 539 203	13,6748	5,7185	5,23111	5,34759	587,48	2 74 64,6	187
188	3 53 44	6 644 672	13,7113	5,7287	5,23644	5,31915	590,62	2 77 59,1	188
189	3 57 21	6 751 269	13 7477	5,7388	5,24175	5,29101	593,76	2 80 55,2	189
190	3 61 00	6 859 000	13,7840	5,7489	5,24702	5,26316	596,90	2 83 52,9	190
191	3 64 81	6 967 871	13,8203	5,7590	5,25227	5,23560	600,04	2 86 52,1	191
192	3 68 64	7 077 888	13,8564	5,7690	5,25750	5,20833	603,19	2 89 52,9	192
193	3 72 49	7 189 057	13,8924	5,7790	5,26269	5,18135	606,33	2 92 55,3	193
194	3 76 36	7 301 384	13,9284	5,7890	5,26786	5,15464	609,47	2 95 59,2	194
195	3 80 25	7 414 875	13,9642	5,7989	5,27300	5,12821	612,61	2 98 64,8	195
196	3 84 16	7 529 536	14,0000	5,8088	5,27811	5,10204	615,75	3 01 71,9	196
197	3 88 09	7 645 373	14,0357	5,8186	5,28320	5,07614	618,89	3 04 80,5	197
198	3 92 04	7 762 392	14,0712	5,8285	5,28827	5,05051	622,04	3 07 90,7	198
199	3 96 01	7 880 599	14,1067	5,8383	5,29330	5,02513	625,18	3 11 02,6	199
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480	5,29832	5,00000	628,32	3 14 15,9	200

200–250 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480	5,29832	5,00000	628,32	3 14 15,9	200
201	4 04 01	8 120 601	14,1774	5,8578	5,30330	4 97512	631,46	3 17 30,9	201
202	4 08 04	8 242 408	14,2127	5,8675	5,30827	4,95050	634,60	3 20 47,4	202
203	4 12 09	8 365 427	14,2478	5,8771	5,31321	4,92611	637,74	3 23 65,5	203
204	4 16 16	8 489 664	14,2829	5,8868	5,31812	4,90196	640,88	3 26 85,1	204
205	4 20 25	8 615 125	14,3178	5,8964	5,32301	4,87805	644,03	3 30 06,4	205
206	4 24 36	8 741 816	14,3527	5,9059	5,32788	4,85437	647,17	3 33 29,2	206
207	4 28 49	8 869 743	14,3875	5,9155	5,33272	4,83092	650,31	3 36 53,5	207
208	4 32 64	8 998 912	14,4222	5,9250	5,33754	4,80769	653,45	3 39 79,5	208
209	4 36 81	9 129 329	14,4568	5,9345	5,34233	4,78469	656,59	3 43 07,0	209
210	4 41 00	9 261 000	14,4914	5,9439	5,34711	4,76190	659,73	3 46 36,1	210
211	4 45 21	9 393 931	14,5258	5,9533	5,35186	4,73934	662,88	3 49 66,7	211
212	4 49 44	9 528 128	14,5602	5,9627	5,35659	4,71698	666,02	3 52 98,9	212
213	4 53 69	9 663 597	14,5945	5,9721	5,36129	4,69484	669,16	3 56 32,7	313
214	4 57 96	9 800 344	14,6287	5,9814	5,36598	4,67290	672,30	3 59 68,1	214
215	4 62 25	9 938 375	14,6629	5,9907	5,37064	4,65116	675,44	3 63 05,0	215
216	4 66 56	10 077 696	14,6969	6,0000	5,37528	4,62963	678,58	3 66 43,5	216
217	4 70 89	10 218 313	14,7309	6,0092	5,37990	4,60829	681,73	3 69 83,6	217
218	4 75 24	10 360 232	14,7648	6,0185	5,38450	4,58716	684,87	3 73 25,3	218
219	4 79 61	10 503 459	14,7986	6,0277	5,38907	4,56621	688,01	3 76 68,5	219
220	4 84 00	10 648 000	14,8324	6,0368	5,39363	4,54545	691,15	3 80 13,3	220
221	4 88 41	10 793 861	14,8661	6,0459	5,39816	4,52489	694,29	3 83 59,5	221
222	4 92 84	10 941 048	14,8997	6,0550	5,40268	4,50450	697,43	3 87 07,6	222
223	4 97 29	11 089 567	14,9332	6,0641	5,40717	4,48430	700,58	3 90 57,1	223
224	5 01 76	11 239 424	14,9666	6,0732	5,41165	4,46429	703,72	3 94 08,1	224
225	5 06 25	11 390 625	15,0000	6,0822	5,41610	4,44444	706,86	3 97 60,8	225
226	5 10 76	11 543 176	15,0333	6,0912	5,42053	4,42478	710,00	4 01 15,0	226
227	5 15 29	11 697 083	15,0665	6,1002	5,42495	4,40529	713,14	4 04 70,8	227
228	5 19 84	11 852 352	15,0997	6,1091	5,42935	4,38596	716,28	4 08 28,1	228
229	5 24 41	12 008 989	15 1327	6,1180	5,43372	4,36681	719,42	4 11 87,1	229
230	5 29 00	12 167 000	15,1658	6,1269	5,43808	4,34783	722,57	4 15 47,6	230
231	5 36 61	12 326 391	15,1987	6,1358	5,44242	4,32900	725,71	4 19 09,6	231
232	5 38 24	12 487 168	15,2315	6,1446	5,44674	4,31034	728,85	4 22 73,3	232
233	5 42 89	12 649 337	15,2643	6,1534	5,45104	4,29185	731,99	4 26 38,5	233
234	5 47 56	12 812 904	15,2971	6,1622	5,45532	4,27350	735,13	4 30 05,3	234
235	5 52 25	12 977 875	15,3297	6,1710	5,45959	4,25532	738,27	4 33 73,6	335
236	5 56 96	13 144 256	15,3623	6,1797	5,46383	4,23729	741,42	4 37 43,5	236
237	5 61 69	13 312 053	15,3948	6,1885	5,46806	4,21941	744,56	4 41 15,0	237
238	5 66 44	13 481 272	15,4272	6,1972	5,47227	4,20168	747,70	4 44 88,1	238
239	5 71 21	13 651 919	15,4596	6,2058	5,47646	4,18410	750,84	4 48 62,7	239
240	5 76 00	13 824 000	15,4919	6,2145	5,48064	4,16667	753,98	4 52 38,9	240
241	5 80 81	13 997 521	15,5242	6,2231	5,48480	4,14938	757,12	4 56 16,7	241
242	5 85 64	14 172 488	15,5563	6,2317	5,48894	4,13223	760,27	4 59 96,1	242
243	5 90 49	14 348 907	15,5885	6,2403	5,49306	4,11523	763,41	4 63 77,0	243
244	5 95 36	14 526 784	15 6205	6,2488	5,49717	4,09836	766,55	4 67 59,5	244
245	6 00 25	14 706 125	15,6525	6,2573	5,50126	4,08163	769,69	4 71 43,5	245
246	6 05 16	14 886 936	15,6844	6,2658	5,50533	4,06504	772,83	4 75 29,2	246
247	6 10 09	15 069 223	15,7162	6,2743	5,50939	4,04858	775,97	4 79 16,4	247
248	6 15 04	15 252 992	15,7480	6,2828	5,51343	4,03226	779,11	4 83 05,1	248
249	6 20 01	15 438 249	15,7797	6,2912	5,51745	4,01606	782,26	4 86 95,5	249
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	6,2996	5,52146	4,00000	785,40	4 90 87,4	250

250–300 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	6,2996	5,52146	4,00000	785,40	4 90 87,4	**250**
251	6 30 01	15 813 251	15,8430	6,3080	5,52545	3,98406	788,54	4 94 80,9	251
252	6 35 04	16 003 008	15,8745	6,3164	5,52943	3,96825	791,68	4 98 75,9	252
253	6 40 09	16 194 277	15,9060	6,3247	5,53339	3,95257	794,82	5 02 72,6	253
254	6 45 16	16 387 064	15,9374	6,3330	5,53733	3,93701	797,96	5 06 70,7	254
255	6 50 25	16 581 375	15,9687	6,3413	5,54126	3,92157	801,11	5 10 70,5	255
256	6 55 36	16 777 216	16,0000	6,3496	5,54518	3,90625	804,25	5 14 71,9	256
257	6 60 49	16 974 593	16,0312	6,3579	5,54908	3,89105	807,39	5 18 74,8	257
258	6 65 64	17 173 512	16,0624	6,3661	5,55296	3,87597	810,53	5 22 79,2	258
259	6 70 81	17 373 979	16,0935	6,3743	5,55683	3,86100	813,67	5 26 85,3	259
260	6 76 00	17 576 000	16,1245	6,3825	5,56068	3,84615	816,81	5 30 92,9	**260**
261	6 81 21	17 779 581	16,1555	6,3907	5,56452	3,83142	819,96	5 35 02,1	261
262	6 86 44	17 984 728	16,1864	6,3988	5,56834	3,81679	823,10	5 39 12,9	262
263	6 91 69	18 191 447	16,2173	6,4070	5,57215	3,80228	826,24	5 43 25,2	263
264	6 96 96	18 399 744	16,2481	6,4151	5,57595	3,78788	829,38	5 47 39,1	264
265	7 02 25	18 609 625	16,2788	6,4232	5,57973	3,77358	832,52	5 51 54,6	265
266	7 07 56	18 821 096	16 3095	6,4312	5,58350	3,75940	835,66	5 55 71,6	266
267	7 12 89	19 034 163	16,3401	6,4393	5,58725	3,74532	838,81	5 59 90,2	267
268	7 18 24	19 248 832	16,3707	6,4473	5,59099	3,73134	841,95	5 64 10,4	268
269	7 23 61	19 465 109	16,4012	6,4553	5,59471	3,71747	845,09	5 68 32,2	269
270	7 29 00	19 683 000	16 4317	6,4633	5,59842	3,70370	848,23	5 72 55,5	**270**
271	7 34 41	19 902 511	16,4621	6,4713	5,60212	3,69004	851,37	5 76 80,4	271
272	7 39 84	20 123 648	16,4924	6,4792	5,60580	3,67647	854,51	5 81 06,9	272
273	7 45 29	20 346.417	16,5227	6,4872	5,60947	3,66300	857,65	5 85 34,9	273
274	7 50 76	20 570 824	16,5529	6,4951	5,61313	3,64964	860,80	5 89 64,6	274
275	7 56 25	20 796 875	16,5831	6,5030	5,61677	3,63636	863,94	5 93 95,7	275
276	7 61 76	21 024 576	16,6132	6,5108	5,62040	3,62319	867,08	5 98 28,5	276
277	7 67 29	21 253 933	16,6433	6,5187	5,62402	3,61011	870,22	6 02 62,8	277
278	7 72 84	21 484 952	16,6733	6,5265	5,62762	3,59712	873,36	6 06 98,7	278
279	7 78 41	21 717 639	16,7033	6,5343	5,63121	3,58423	876,50	6 11 36,2	279
280	7 84 00	21 952 000	16,7332	6,5421	5,63479	3,57143	879,65	6 15 75,2	**280**
281	7 89 61	22 188 041	16,7631	6,5499	5,63835	3,55872	882,79	6 20 15,8	281
282	7 95 24	22 425 768	16,7929	6,5577	5,64191	3,54610	885,93	6 24 58,0	282
283	8 00 89	22 665 187	16,8226	6,5654	5,64545	3,53357	889,07	6 29 01,8	283
284	8 06 56	22 906 304	16,8523	6,5731	5,64897	3,52113	892,21	6 33 47,1	284
285	8 12 25	23 149 125	16,8819	6,5808	5,65249	3,50877	895,35	6 37 94,0	285
286	8 17 96	23 393 656	16 9115	6,5885	5,65599	3,49650	898,50	6 42 42,4	286
287	8 23 69	23 639 903	16,9411	6,5962	5,65948	3,48432	901,64	6 46 92,5	287
288	8 29 44	23 887 872	16,9706	6,6039	5,66296	3,47222	904,78	6 51 44,1	288
289	8 35 21	24 137 569	17,0000	6,6115	5,66643	3,46021	907,92	6 55 97,2	289
290	8 41 00	24 389 000	17,0294	6,6191	5,66988	3,44828	911,06	6 60 52,0	**290**
291	8 46 81	24 642 171	17,0587	6,6267	5,67332	3,43643	914,20	6 65 08,3	291
292	8 52 64	24 897 088	17,0880	6,6343	5,67675	3,42466	917,35	6 69 66,2	292
293	8 58 49	25 153 757	17 1172	6,6419	5,68017	3,41297	920,49	6 74 25,6	293
294	8 64 36	25 412 184	17,1464	6,6494	5,68358	3,40136	923,63	6 78 86,7	294
295	8 70 25	25 672 375	17,1756	6,6569	5,68698	3,38983	926,77	6 83 49,3	295
296	8 76 16	25 934 336	17,2047	6,6644	5,69036	3,37838	929,91	6 88 13,4	296
297	8 82 09	26 198 073	17,2337	6,6719	5,69373	3,36700	933,05	6 92 79,2	297
298	8 88 04	26 463 592	17,2627	6,6794	5,69709	3,35570	936,19	6 97 46,5	298
299	8 94 01	26 730 899	17,2916	6,6869	5,70044	3,34448	939,34	7 02 15,4	299
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943	5,70378	3,33333	942,48	7 06 85,8	**300**

300–350 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943	5,70378	3,33333	942,48	7 06 85,8	**300**
301	9 06 01	27 270 901	17,3494	6,7018	5,70711	3,32226	945,62	7 11 57,9	301
302	9 12 04	27 543 608	17,3781	6,7092	5,71043	3,31126	948,76	7 16 31,5	302
303	9 18 09	27 818 127	17,4069	6,7166	5,71373	3,30033	951,90	7 21 06,6	303
304	9 24 16	28 094 464	17,4356	6,7240	5,71703	3,28947	955,04	7 25 83,4	304
305	9 30 25	28 372 625	17,4642	6,7313	5,72031	3,27869	958,19	7 30 61,7	305
306	9 36 36	28 652 616	17 4929	6,7387	5,72359	3,26797	961,33	7 35 41,5	306
307	9 42 49	28 934 443	17,5214	6,7460	5,72685	3,25733	964,47	7 40 23,0	307
308	9 48 64	29 218 112	17,5499	6,7533	5,73010	3,24675	967,61	7 45 06,0	308
309	9 54 81	29 503 629	17,5784	6,7606	5,73334	3,23625	970,75	7 49 90,6	309
310	9 61 00	29 791 000	17,6068	6,7679	5,73657	3,22581	973,89	7 54 76,8	**310**
311	9 67 21	30 080 231	17,6352	6,7752	5,73979	3,21543	977,04	7 59 64,5	311
312	9 73 44	30 371 328	17,6635	6,7824	5,74300	3,20513	980,18	7 64 53,8	312
313	9 79 69	30 664 297	17,6918	6,7897	5,74620	3,19489	983,32	7 69 44,7	313
314	9 85 96	30 959 144	17,7200	6,7969	5,74939	3,18471	986,46	7 74 37,1	314
315	9 92 25	31 255 875	17,7482	6,8041	5,75257	3,17460	989,60	7 79 31,1	315
316	9 98 56	31 554 496	17,7764	6,8113	5,75574	3,16456	992,74	7 84 26,7	316
317	10 04 89	31 855 013	17,8045	6,8185	5,75890	3,15457	995,88	7 89 23,9	317
318	10 11 24	32 157 432	17,8326	6,8256	5,76205	3,14465	999,03	7 94 22,6	318
319	10 17 61	32 461 759	17,8606	6,8328	5,76519	3,13480	1002,2	7 99 22,9	319
320	10 24 00	32 768 000	17,8885	6,8399	5,76832	3,12500	1005,3	8 04 24,8	**320**
321	10 30 41	33 076 161	17,9165	6,8470	5,77144	3,11526	1008,5	8 09 28,2	321
322	10 36 84	33 386 248	17,9444	6,8541	5,77455	3,10559	1011,6	8 14 33,2	322
323	10 43 29	33 698 267	17,9722	6,8612	5,77765	3,09598	1014,7	8 19 39,8	323
324	10 49 76	34 012 224	18,0000	6,8683	5,78074	3,08642	1017,9	8 24 48,0	324
325	10 56 25	34 328 125	18,0278	6,8753	5,78383	3,07692	1021,0	8 29 57,7	325
326	10 62 76	34 645 976	18,0555	6,8824	5,78690	3,06748	1024,2	8 34 69,0	326
327	10 69 29	34 965 783	18,0831	6,8894	5,78996	3,05810	1027,3	8 39 81,8	327
328	10 75 84	35 287 552	18,1108	6,8964	5,79301	3,04878	1030,4	8 44 96,3	328
329	10 82 41	35 611 289	18,1384	6,9034	5,79606	3,03951	1033,6	8 50 12,3	329
330	10 89 00	35 937 000	18,1659	6,9104	5,79909	3,03030	1036,7	8 55 29,9	**330**
331	10 95 61	36 264 691	18,1934	6,9174	5,80212	3,02115	1039,9	8 60 49,0	331
332	11 02 24	36 594 368	18,2209	6,9244	5,80513	3,01205	1043,0	8 65 69,7	332
333	11 08 89	36 926 037	18,2483	6,9313	5,80814	3,00300	1046,2	8 70 92,0	333
334	11 15 56	37 259 704	18,2757	6,9382	5,81114	2,99401	1049,3	8 76 15,9	334
335	11 22 25	37 595 375	18,3030	6,9451	5,81413	2,98507	1052,4	8 81 41,3	335
336	11 28 96	37 933 056	18,3303	6,9521	5,81711	2,97619	1055,6	8 86 68,3	336
337	11 35 69	38 272 753	18,3576	6,9589	5,82008	2,96736	1058,7	8 91 96,9	337
338	11 42 44	38 614 472	18,3848	6,9658	5,82305	2,95858	1061,9	8 97 27,0	338
339	11 49 21	38 958 219	18,4120	6,9727	5,82600	2,94985	1065,0	9 02 58,7	339
340	11 56 00	39 304 000	18,4391	6,9795	5,82895	2,94118	1068,1	9 07 92,0	**340**
341	11 62 81	39 651 821	18,4662	6,9864	5,83188	2,93225	1071,3	9 13 26,9	341
342	11 69 64	40 001 688	18,4932	6,9932	5,83481	2,92398	1074,4	9 18 63,3	342
343	11 76 49	40 353 607	18,5203	7,0000	5,83773	2,91545	1077,6	9 24 01,3	343
344	11 83 36	40 707 584	18,5472	7,0068	5,84064	2,90698	1080,7	9 29 40,9	344
345	11 90 25	41 063 625	18,5742	7,0136	5,84354	2,89855	1083,8	9,34 82,0	345
346	11 97 16	41 421 736	18,6011	7,0203	5,84644	2,89017	1087,0	9 40 24,7	346
347	12 04 09	41 781 923	18,6279	7,0271	5,84932	2,88184	1090,1	9 45 69,0	347
348	12 11 04	42 144 192	18,6548	7,0338	5,85220	2,87356	1093,3	9 51 14,9	348
349	12 18 01	42 508 549	18,6815	7,0406	5,85507	2,86533	1096,4	9 56 62,3	349
350	12 25 00	42 875 000	18,7083	7,0473	5,85793	2,85714	1099,6	9 62 11,3	**350**

350—400 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
350	12 25 00	42 875 000	18,7083	7,0473	5,85793	2,85714	1099,6	9 62 11,3	**350**
351	12 32 01	43 243 551	18,7350	7,0540	5,86079	2,84900	1102,7	9 67 61,8	351
352	12 39 04	43 614 208	18,7617	7,0607	5,86363	2,84091	1105,8	9 73 14,0	352
353	12 46 09	43 986 977	18,7883	7,0674	5,86647	2,83286	1109,0	9 78 67,7	353
354	12 53 16	44 361 864	18,8149	7,0740	5,86930	2,82486	1112,1	9 84 23,0	354
355	12 60 25	44 738 875	18,8414	7,0807	5,87212	2,81690	1115,3	9 89 79,8	355
356	12 67 36	45 118 016	18,8680	7,0873	5,87493	2,80899	1118,4	9 95 38,2	356
357	12 74 49	45 499 293	18,8944	7,0940	5,87774	2,80112	1121,5	10 00 98	357
358	12 81 64	45 882 712	18,9209	7,1006	5,88053	2,79330	1124,7	10 06 60	358
359	12 88 81	46 268 279	18,9473	7,1072	5,88332	2,78552	1127,8	10 12 23	359
360	12 96 00	46 656 000	18,9737	7,1138	5,88610	2,77778	1131,0	10 17 88	**360**
361	13 03 21	47 045 881	19,0000	7,1204	5,88888	2,77008	1134,1	10 23 54	361
362	13 10 44	47 437 928	19,0263	7,1269	5,89164	2,76243	1137,3	10 29 22	362
363	13 17 69	47 832 147	19,0526	7,1335	5,89440	2,75482	1140,4	10 34 91	363
364	13 24 96	48 228 544	19,0788	7,1400	5,89715	2,74725	1143,5	10 40 62	364
365	13 32 25	48 627 125	19,1050	7,1466	5,89990	2,73973	1146,7	10 46 35	365
366	13 39 56	49 027 896	19,1311	7,1531	5,90263	2,73224	1149,8	10 52 09	366
367	13 46 89	49 430 863	19,1572	7,1596	5,90536	2,72480	1153,0	10 57 84	367
368	13 54 24	49 836 032	19,1833	7,1661	5,90808	2,71739	1156,1	10 63 62	368
369	13 61 61	50 243 409	19,2094	7,1726	5,91080	2,71003	1159,2	10 69 41	369
370	13 69 00	50 653 000	19,2354	7,1791	5,91350	2,70270	1162,4	10 75 21	**370**
371	13 76 41	51 064 811	19,2614	7,1855	5,91620	2,69542	1165,5	10 81 03	371
372	13 83 84	51 478 848	19,2873	7,1920	5,91889	2,68817	1168,7	10 86 87	372
373	13 91 29	51 895 117	19,3132	7,1984	5,92158	2,68097	1171,8	10 92 72	373
374	13 98 76	52 313 624	19,3391	7,2048	5,92426	2,67380	1175,0	10 98 58	374
375	14 06 25	52 734 375	19,3649	7,2112	5,92693	2,66667	1178,1	11 04 47	375
376	14 13 76	53 157 376	19,3907	7,2177	5,92959	2,65957	1181,2	11 10 36	376
377	14 21 29	53 582 633	19,4165	7,2240	5,93225	2,65252	1184,4	11 16 28	377
378	14 28 84	54 010 152	19,4422	7,2304	5,93489	2,64550	1187,5	11 22 21	378
379	14 36 41	54 439 939	19,4679	7,2368	5,93754	2,63852	1190,7	11 28 15	379
380	14 44 00	54 872 000	19,4936	7,2432	5,94017	2,63158	1193,8	11 34 11	**380**
381	14 51 61	55 306 341	19,5192	7,2495	5,94280	2,62467	1196,9	11 40 09	381
382	14 59 24	55 742 968	19,5448	7,2558	5,94542	2,61780	1200,1	11 46 08	382
383	14 66 89	56 181 887	19,5704	7,2622	5,94803	2,61097	1203,2	11 52 09	383
384	14 74 56	56 623 104	19,5959	7,2685	5,95064	2,60417	1206,4	11 58 12	384
385	14 82 25	57 066 625	19,6214	7,2748	5,95324	2,59740	1209,5	11 64 16	385
386	14 89 96	57 512 456	19,6469	7,2811	5,95584	2,59067	1212,7	11 70 21	386
387	14 97 69	57 960 603	19,6723	7,2874	5,95842	2,58398	1215,8	11 76 28	387
388	15 05 44	58 411 072	19,6977	7,2936	5,96101	2,57732	1218,9	11 82 37	388
389	15 13 21	58 863 869	19,7231	7,2999	5,96358	2,57069	1222,1	11 88 47	389
390	15 21 00	59 319 000	19,7484	7,3061	5,96615	2,56410	1225,2	11 94 59	**390**
391	15 28 81	59 776 471	19,7737	7,3124	5,96871	2,55754	1228,4	12 00 72	391
392	15 36 64	60 236 288	19,7990	7,3186	5,97126	2,55102	1231,5	12 06 87	392
393	15 44 49	60 698 457	19,8242	7,3248	5,97381	2,54453	1234,6	12 13 04	393
394	15 52 36	61 162 984	19,8494	7,3310	5,97635	2,53807	1237,8	12 19 22	394
395	15 60 25	61 629 875	19,8746	7,3372	5,97889	2,53165	1240,9	12 25 42	395
396	15 68 16	62 099 136	19,8997	7,3434	5,98141	2,52525	1244,1	12 31 63	396
397	15 76 09	62 570 773	19,9249	7,3496	5,98394	2,51889	1247,2	12 37 86	397
398	15 84 04	63 044 792	19,9499	7,3558	5,98645	2,51256	1250,4	12 44 10	398
399	15 92 01	63 521 199	19,9750	7,3619	5,98896	2,50627	1253,5	12 50 36	399
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	12 56 64	**400**

400–450 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	12 56 64	400
401	16 08 01	64 481 201	20,0250	7,3742	5,99396	2,49377	1259,8	12 62 93	401
402	16 16 04	64 964 808	20,0499	7,3803	5,99645	2,48756	1262,9	12 69 23	402
403	16 24 09	65 450 827	20,0749	7,3864	5,99894	2,48139	1266,1	12 75 56	403
404	16 32 16	65 939 264	20,0998	7,3925	6,00141	2,47525	1269,2	12 81 90	404
405	16 40 25	66 430 125	20,1246	7,3986	6,00389	2,46914	1272,3	12 88 25	405
406	16 48 36	66 923 416	20,1494	7,4047	6,00635	2,46305	1275,5	12 94 62	406
407	16 56 49	67 419 143	20,1742	7,4108	6,00881	2,45700	1278,6	13 01 00	407
408	16 64 64	67 917 312	20,1990	7,4169	6,01127	2,45098	1281,8	13 07 41	408
409	16 72 81	68 417 929	20,2237	7,4229	6,01372	2,44499	1284,9	13 13 82	409
410	16 81 00	68 921 000	20,2485	7,4290	6,01616	2,43902	1288,1	13 20 25	410
411	16 89 21	69 426 531	20,2731	7,4350	6,01859	2,43309	1291,2	13 26 70	411
412	16 97 44	69 934 528	20 2978	7,4410	6,02102	2,42718	1294,3	13 33 17	412
413	17 05 69	70 444 997	20,3224	7,4470	6,02345	2,42131	1297,5	13 39 65	413
414	17 13 96	70 957 944	20,3470	7,4530	6,02587	2,41546	1300,6	13 46 41	414
415	17 22 25	71 473 375	20,3715	7,4590	6,02828	2,40964	1303,8	13 52 65	415
416	17 30 56	71 991 296	20,3961	7,4650	6,03069	2,40385	1306,9	13 59 18	416
417	17 38 89	72 511 713	20,4206	7,4710	6,03309	2,39808	1310,0	13 65 72	417
418	17 47 24	73 034 632	20,4450	7,4770	6,03548	2,39234	1313,2	13 72 28	418
419	17 55 61	73 560 059	20,4695	7,4829	6,03787	2,38663	1316,3	13 78 85	419
420	17 64 00	74 088 000	20,4939	7,4889	6,04025	2,38095	1319,5	13 85 44	420
421	17 72 41	74 618 461	20,5183	7,4948	6,04263	2,37530	1322,6	13 92 05	421
422	17 80 84	75 151 448	20,5426	7,5007	6,04501	2,36967	1325,8	13 98 67	422
423	17 89 29	75 686 967	20,5670	7,5067	6,04737	2,36407	1328,9	14 05 31	423
424	17 97 76	76 225 024	20,5913	7,5126	6,04973	2,35849	1332,0	14 11 96	424
425	18 06 25	76 765 625	20,6155	7,5185	6,05209	2,35294	1335,2	14 18 63	425
426	18 14 76	77 308 776	20,6398	7,5244	6,05444	2,34742	1338,3	14 25 31	426
427	18 23 29	77 854 483	20,6640	7,5302	6,05678	2,34192	1341,5	14 32 01	427
428	18 31 84	78 402 752	20,6882	7,5361	6,05912	2,33645	1344,6	14 38 72	428
429	18 40 41	78 953 589	20,7123	7,5420	6,06146	2,33100	1347,7	14 45 45	429
430	18 49 00	79 507 000	20,7364	7,5478	6,06379	2,32558	1350,9	14 52 20	430
431	18 57 61	80 062 991	20,7605	7,5537	6,06611	2,32019	1354,0	14 58 96	431
432	18 66 24	80 621 568	20,7846	7,5595	6,06843	2,31481	1357,2	14 65 74	432
433	18 74 89	81 182 737	20,8087	7,5654	6,07074	2,30947	1360,3	14 72 54	433
434	18 83 56	81 746 504	20,8327	7,5712	6,07304	2,30415	1363,5	14 79 34	434
435	18 92 25	82 312 875	20,8567	7,5770	6,07535	2,29885	1366,6	14 86 17	435
436	19 00 96	82 881 856	20,8806	7,5828	6,07764	2,29358	1369,7	14 93 01	436
437	19 09 69	83 453 453	20,9045	7,5886	6,07993	2,28833	1372,9	14 99 87	437
438	19 18 44	84 027 672	20,9284	7,5944	6,08222	2,28311	1376,0	15 06 74	438
439	19 27 21	84 604 519	20,9523	7,6001	6,08450	2,27790	1379,2	15 13 63	439
440	19 36 00	85 184 000	20,9762	7,6059	6,98677	2,27273	1382,3	15 20 53	440
441	19 44 81	85 766 121	21,0000	7,6117	6,08904	2,26757	1385,4	15 27 45	441
442	19 53 64	86 350 888	21,0238	7,6174	6,09131	2,26244	1388,6	15 34 39	442
443	19 62 49	86 938 307	21,0476	7,6232	6,09357	2,25734	1391,7	15 41 34	443
444	19 71 36	87 528 384	21,0713	7,6289	6,09582	2,25225	1394,9	15 48 30	444
445	19 80 25	88 121 125	21,0950	7,6346	6,09807	2,24719	1398,0	15 55 28	445
446	19 89 16	88 716 536	21,1187	7,6403	6,10032	2,24215	1401,2	15 62 28	446
447	19 98 09	89 314 623	21,1424	7,6460	6,10256	2,23714	1404,3	15 69 30	447
448	20 07 04	89 915 392	21,1660	7,6517	6,10479	2,23214	1407,4	15 76 33	448
449	20 16 01	90 518 849	21,1896	7,6574	6,10702	2,22717	1410,6	15 83 37	449
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	6,10925	2,22222	1413,7	15 90 43	450

450 – 500 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	6,10925	2,22222	1413,7	15 90 43	**450**
451	20 34 01	91 733 851	21,2368	7,6688	6,11147	2,21729	1416,9	15 97 51	451
452	20 43 04	92 345 408	21,2603	7,6744	6,11368	2,21239	1420,0	16 04 60	452
453	20 52 09	92 959 677	21,2838	7,6801	6,11589	2,20751	1423,1	16 11 71	453
454	20 61 16	93 576 664	21,3073	7,6857	6,11810	2,20264	1426,3	16 18 83	454
455	20 70 25	94 196 375	21,3307	7,6914	6,12030	2,19780	1429,4	16 25 97	455
456	20 79 36	94 818 816	21,3542	7,6970	6,12249	2,19298	1432,6	16 33 13	456
457	20 88 49	95 443 993	21,3776	7,7026	6,12468	2,18818	1435,7	16 40 30	457
458	20 97 64	96 071 912	21,4009	7,7082	6,12687	2,18341	1438,8	16 47 48	458
459	21 06 81	96 702 579	21,4243	7,7138	6,12905	2,17865	1442,0	16 54 68	459
460	21 16 00	97 336 000	21,4476	7,7194	6,13123	2,17391	1445,1	16 61 90	**460**
461	21 25 21	97 972 181	21,4709	7,7250	6,13340	2,16920	1448,3	16 69 14	461
462	21 34 44	98 611 128	21,4942	7,7306	6,13556	2,16450	1451,4	16 76 39	462
463	21 43 69	99 252 847	21,5174	7,7362	6,13773	2,15983	1454,6	16 83 65	463
464	21 52 96	99 897 344	21,5407	7,7418	6,13988	2,15517	1457,7	16 90 93	464
465	21 62 25	100 544 625	21,5639	7,7473	6,14204	2,15054	1460,8	16 98 23	465
466	21 71 56	101 194 696	21,5870	7,7529	6,14419	2,14592	1464,0	17 05 54	466
467	21 80 89	101 847 563	21,6102	7,7584	6,14633	2,14133	1467,1	17 12 87	467
468	21 90 24	102 503 232	21,6333	7,7639	6,14847	2,13675	1470,3	17 20 21	468
469	21 99 61	103 161 709	21,6564	7,7695	6,15060	2,13220	1473,4	17 27 57	469
470	22 09 00	103 823 000	21,6795	7,7750	6,15273	2,12766	1476,5	17 34 94	**470**
471	22 18 41	104 487 111	21,7025	7,7805	6,15486	2,12314	1479,7	17 42 34	471
472	22 27 84	105 154 048	21,7256	7,7860	6,15698	2,11864	1482,8	17 49 74	472
473	22 37 29	105 823 817	21,7486	7,7915	6,15910	2,11416	1486,0	17 57 16	473
474	22 46 76	106 496 424	21,7715	7,7970	6,16121	2,10970	1489,1	17 64 60	474
475	22 56 25	107 171 875	21,7945	7,8025	6,16331	2,10526	1492,3	17 72 05	475
476	22 65 76	107 850 176	21,8174	7,8079	6,16542	2,10084	1495,4	17 79 52	476
477	22 75 29	108 531 333	21,8403	7,8134	6,16752	2,09644	1498,5	17 87 01	477
478	22 84 84	109 215 352	21,8632	7,8188	6,16961	2,09205	1501,7	17 94 51	478
479	22 94 41	109 902 239	21,8861	7,8243	6,17170	2,08768	1504,8	18 02 03	479
480	23 04 00	110 592 000	21,9089	7,8297	6,17379	2,08333	1508,0	18 09 56	**480**
481	23 13 61	111 284 641	21,9317	7,8352	6,17587	2,07900	1511,1	18 17 11	481
482	23 23 24	111 980 168	21,9545	7,8406	6,17794	2,07469	1514,2	18 24 67	482
483	23 32 89	112 678 587	21,9773	7,8460	6,18002	2,07039	1517,4	18 32 25	483
484	23 42 56	113 379 904	22,0000	7,8514	6,18208	2,06612	1520,5	18 39 84	484
485	23 52 25	114 084 125	22,0227	7,8568	6,18415	2,06186	1523,7	18 47 45	485
486	23 61 96	114 791 256	22,0454	7,8622	6,18621	2,05761	1526,8	18 55 08	486
487	23 71 69	115 501 303	22,0681	7,8676	6,18826	2,05339	1530,0	18 62 72	487
488	23 81 44	116 214 272	22,0907	7,8730	6,19032	2,04918	1533,1	18 70 38	488
489	23 91 21	116 930 169	22,1133	7,8784	6,19236	2,04499	1536,2	18 78 05	489
490	24 01 00	117 649 000	22,1359	7,8837	6,19441	2,04082	1539,4	18 85 74	**490**
491	24 10 81	118 370 771	22,1585	7,8891	6,19644	2,03666	1542,5	18 93 45	491
492	24 20 64	119 095 488	22,1811	7,8944	6,19848	2,03252	1545,7	19 01 17	492
493	24 30 49	119 823 157	22,2036	7,8998	6,20051	2,02840	1548,8	19 08 90	493
494	24 40 36	120 553 784	22,2261	7,9051	6,20254	2,02429	1551,9	19 16 65	494
495	24 50 25	121 287 375	22,2486	7,9105	6,20456	2,02020	1555,1	19 24 42	495
496	24 60 16	122 023 936	22,2711	7,9158	6,20658	2,01613	1558,2	19 32 21	496
497	24 70 09	122 763 473	22,2935	7,9211	6,20859	2,01207	1561,4	19 40 00	497
498	24 80 04	123 505 992	23,3159	7,9264	6,21060	2,00803	1564,5	19 47 82	498
499	24 90 01	124 251 499	22,3383	7,9317	6,21261	2,00401	1567,7	19 55 65	499
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370	6,21461	2,00000	1570,8	19 63 50	**500**

500 – 550

Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370	6,21461	2,00000	1570,8	19 63 50	**500**
501	25 10 01	125 751 501	22,3830	7,9423	6,21661	1,99601	1573,9	19 71 36	501
502	25 20 04	126 506 008	22,4054	7,9476	6,21860	1,99203	1577,1	19 79 23	502
503	25 30 09	127 263 527	22,4277	7,9528	6,22059	1,98807	1580,2	19 87 13	503
504	25 40 16	128 024 064	22,4499	7,9581	6,22258	1,98413	1583,4	19 95 04	504
505	25 50 25	128 787 625	22,4722	7,9634	6,22456	1,98020	1586,5	20 02 96	505
506	25 60 36	129 554 216	22,4944	7,9686	6,22654	1,97628	1589,6	20 10 90	506
507	25 70 49	130 323 843	22,5167	7,9739	6,22851	1,97239	1592,8	20 18 86	507
508	25 80 64	131 096 512	22,5389	7,9791	6,23048	1,96850	1595,9	20 26 83	508
509	25 90 81	131 872 229	22,5610	7,9843	6,23245	1,96464	1599,1	20 34 82	509
510	26 01 00	132 651 000	22,5832	7,9896	6,23441	1,96078	1602,2	20 42 82	**510**
511	26 11 21	133 432 831	22,6053	7,9948	6,23637	1,95695	1605,4	20 50 84	511
512	26 21 44	134 217 728	22,6274	8,0000	6,23832	1,95312	1608,5	20 58 87	512
513	26 31 69	135 005 697	22,6495	8,0052	6,24028	1,94932	1611,6	20 66 92	513
514	26 41 96	135 796 744	22,6716	8,0104	6,24222	1,94553	1614,8	20 74 99	514
515	26 52 25	136 590 875	22,6936	8,0156	6,24417	1,94175	1617,9	20 83 07	515
516	26 62 56	137 388 096	22,7156	8,0208	6,24611	1,93798	1621,1	20 91 17	516
517	26 72 89	138 188 413	22,7376	8,0260	6,24804	1,93424	1624,2	20 99 28	517
518	26 83 24	138 991 832	22,7596	8,0311	6,24998	1,93050	1627,3	21 07 41	518
519	26 93 61	139 798 359	22,7816	8,0363	6,25190	1,92678	1630,5	21 15 56	519
520	27 04 00	140 608 000	22,8035	8,0415	6,25383	1,92308	1633,6	21 23 72	**520**
521	27 14 41	141 420 761	22,8254	8,0466	6,25575	1,91939	1636,8	21 31 89	521
522	27 24 84	142 236 648	22,8473	8,0517	6,25767	1,91571	1639,9	21 40 08	522
523	27 35 29	143 055 667	22,8692	8,0569	6,25958	1,91205	1643,1	21 48 29	523
524	27 45 76	143 877 824	22,8910	8,0620	6,26149	1,90840	1646,2	21 56 51	524
525	27 56 25	144 703 125	22,9129	8,0671	6,26340	1,90476	1649,3	21 64 75	525
526	27 66 76	145 531 576	22,9347	8,0723	6,26530	1,90114	1652,5	21 73 01	526
527	27 77 29	146 363 183	22,9565	8,0774	6,26720	1,89753	1655,6	21 81 28	527
528	27 87 84	147 197 952	22,9783	8,0825	6,26910	1,89394	1658,8	21 89 56	528
529	27 98 41	148 035 889	23,0000	8,0876	6,27099	1,89036	1661,9	21 97 87	529
530	28 09 00	148 877 000	23,0217	8,0927	6,27288	1,88679	1665,0	22 06 18	**530**
531	28 19 61	149 721 291	23,0434	8,0978	6,27476	1,88324	1668,2	22 14 52	531
532	28 30 24	150 568 768	23,0651	8,1028	6,27664	1,87970	1671,3	22 22 87	532
533	28 40 89	151 419 437	23,0868	8,1079	6,27852	1,87617	1674,5	22 31 23	533
534	28 51 56	152 273 304	23,1084	8,1130	6,28040	1,87266	1677,6	22 39 61	534
535	28 62 25	153 130 375	23,1301	8,1180	6,28227	1,86916	1680,8	22 48 01	535
536	28 72 96	153 990 656	23,1517	8,1231	6,28413	1,86567	1683,9	22 56 42	536
537	28 83 69	154 854 153	23,1733	8,1281	6,28600	1,86220	1687,0	22 64 84	537
538	28 94 44	155 720 872	23,1948	8,1332	6,28786	1,85874	1690,2	22 73 29	538
539	29 05 21	156 590 819	23,2164	8,1382	6,28972	1,85529	1693,3	22 81 75	539
540	29 16 00	157 464 000	23,2379	8,1433	6,29157	1,85185	1696,5	22 90 22	**540**
541	29 26 81	158 340 421	23,2594	8,1483	6,29342	1,84843	1699,6	22 98 71	541
542	29 37 64	159 220 088	23,2809	8,1533	6,29527	1,84502	1702,7	23 07 22	542
543	29 48 49	160 103 007	23,3024	8,1583	6,29711	1,84162	1705,9	23 15 74	543
544	29 59 36	160 989 184	23,3238	8,1633	6,29895	1,83824	1709,0	23 24 28	544
545	29 70 25	161 878 625	23,3452	8,1683	6,30079	1,83486	1712,2	23 32 83	545
546	29 81 16	162 771 336	23,3666	8,1733	6,30262	1,83150	1715,3	23 41 40	546
547	29 92 09	163 667 323	23,3880	8,1783	6,30445	1,82815	1718,5	23 49 98	547
548	30 03 04	164 566 592	23,4094	8,1833	6,30628	1,82482	1721,6	23 58 58	548
549	30 14 01	165 469 149	23,4307	8,1882	6,30810	1,82149	1724,7	23 67 20	549
550	30 25 00	166 375 000	23,4521	8,1932	6,30992	1,81818	1727,9	23 75 83	**550**

550—600 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
550	30 25 00	166 375 000	23,4521	8,1932	6,30992	1,81818	1727,9	23 75 83	**550**
551	30 36 01	167 284 151	23,4734	8,1982	6,31173	1,81488	1731,0	23 84 48	551
552	30 47 04	168 196 608	23,4947	8,2031	6,31355	1,81159	1734,2	23 93 14	552
553	30 58 09	169 112 377	23,5160	8,2081	6,31536	1,80832	1737,3	24 01 82	553
554	30 69 16	170 031 464	23,5372	8,2130	6,31716	1,80505	1740,4	24 10 51	554
555	30 80 25	170 953 875	23,5584	8,2180	6,31897	1,80180	1743,6	24 19 22	555
556	30 91 36	171 879 616	23,5797	8,2229	6,32077	1,79856	1746,7	24 27 95	556
557	31 02 49	172 808 693	23,6008	8,2278	6,32257	1,79533	1749,9	24 36 69	557
558	31 13 64	173 741 112	23,6220	8,2327	6,32436	1,79211	1753,0	24 45 45	558
559	31 24 81	174 676 879	23,6432	8,2377	6,32615	1,78891	1756,2	24 54 22	559
560	31 36 00	175 616 000	23,6643	8,2426	6,32794	1,78571	1759,3	24 63 01	**560**
561	31 47 21	176 558 481	23,6854	8,2475	6,32972	1,78253	1762,4	24 71 81	561
562	31 58 44	177 504 328	23,7065	8,2524	6,33150	1,77936	1765,6	24 80 63	562
563	31 69 69	178 453 547	23,7276	8,2573	6,33328	1,77620	1768,7	24 89 47	563
564	31 80 96	179 406 144	23,7487	8,2621	6,33505	1,77305	1771,9	24 98 32	564
565	31 92 25	180 362 125	23,7697	8,2670	6,33683	1,76991	1775,0	25 07 19	565
566	32 03 56	181 321 496	23,7908	8,2719	6,33859	1,76678	1778,1	25 16 07	566
567	32 14 89	182 284 263	23,8118	8,2768	6,34036	1,76367	1781,3	25 24 97	567
568	32 26 24	183 250 432	23,8328	8,2816	6,34212	1,76056	1784,4	25 33 88	568
569	32 37 61	184 220 009	23,8537	8,2865	6,34388	1,75747	1787,6	25 42 81	569
570	32 49 00	185 193 000	23,8747	8,2913	6,34564	1,75439	1790,7	25 51 76	**570**
571	32 60 41	186 169 411	23,8956	8,2962	6,34739	1,75131	1793,8	25 60 72	571
572	32 71 84	187 149 248	23,9165	8,3010	6,34914	1,74825	1797,0	25 69 70	572
573	32 83 29	188 132 517	23,9374	8,3059	6,35089	1,74520	1800,1	25 78 69	573
574	32 94 76	189 119 224	23,9583	8,3107	6,35263	1,74216	1803,3	25 87 70	574
575	33 06 25	190 109 375	23,9792	8,3155	6,35437	1,73913	1806,4	25 96 72	575
576	33 17 76	191 102 976	24,0000	8,3203	6,35611	1,73611	1809,6	26 05 76	576
577	33 29 29	192 100 033	24,0208	8,3251	6,35784	1,73310	1812,7	26 14 82	577
578	33 40 84	193 100 552	24 0416	8,3300	6,35957	1,73010	1815,8	26 23 89	578
579	33 52 41	194 104 539	24,0624	8,3348	6,36130	1,72712	1819,0	26 32 98	579
580	33 64 00	195 112 000	24,0832	8,3396	6,36303	1,72414	1822,1	26 42 08	**580**
581	33 75 61	196 122 941	24,1039	8,3443	6,36475	1,72117	1825,3	26 51 20	581
582	33 87 24	197 137 368	24,1247	8,3491	6,36647	1,71821	1828,4	26 60 33	582
583	33 98 89	198 155 287	24,1454	8,3539	6,36819	1,71527	1831,5	26 69 48	583
584	34 10 56	199 176 704	24,1661	8,3587	6,36990	1,71233	1834,7	26 78 65	584
585	34 22 25	200 201 625	24,1868	8,3634	6,37161	1,70940	1837,8	26 87 83	585
586	34 33 96	201 230 056	24,2074	8,3682	6,37332	1,70648	1841,0	26 97 03	586
587	34 45 69	202 262 003	24,2281	8,3730	6,37502	1,70358	1844,1	27 06 24	587
588	34 57 44	203 297 472	24,2487	8,3777	6,37673	1,70068	1847,3	27 15 47	588
589	34 69 21	204 336 469	24,2693	8,3825	6,37843	1,69779	1850,4	27 24 71	589
590	34 81 00	205 379 000	24,2899	8,3872	6,38012	1,69492	1853,5	27 33 97	**590**
591	34 92 81	206 425 071	24,3105	8,3919	6,38182	1,69205	1856,7	27 43 25	591
592	35 04 64	207 474 688	24,3311	8,3967	6,38351	1,68919	1859,8	27 52 54	592
593	35 16 49	208 527 857	24,3516	8,4014	6,38519	1,68634	1863,0	27 61 84	593
594	35 28 36	209 584 584	24,3721	8,4061	6,38688	1,68350	1866,1	27 71 17	594
595	35 40 25	210 644 875	24,3926	8,4108	6,38856	1,68067	1869,2	27 80 51	595
596	35 52 16	211 708 736	24,4131	8,4155	6,39024	1,67785	1872,4	27 89 86	596
597	35 64 09	212 776 173	24,4336	8,4202	6,39192	1,67504	1875,5	27 99 23	597
598	35 76 04	213 847 192	24,4540	8,4249	6,39359	1,67224	1878,7	28 08 62	598
599	35 88 01	214 921 799	24,4745	8,4296	6,39526	1,66945	1881,8	28 18 02	599
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	8,4343	6,39693	1,66667	1885,0	28 27 43	**600**

600 – 650 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	8,4343	6,39693	1,66667	1885,0	28 27 43	**600**
601	36 12 01	217 081 801	24,5153	8,4390	6,39859	1,66389	1888,1	28 36 87	601
602	36 24 04	218 167 208	24,5357	8,4437	6,40026	1,66113	1891,2	28 46 31	602
603	36 36 09	219 256 227	24,5561	8,4484	6,40192	1,65837	1894,4	28 55 78	603
604	36 48 16	220 348 864	24,5764	8,4530	6,40357	1,65563	1897,5	28 65 26	604
605	36 60 25	221 445 125	24,5967	8,4577	6,40523	1,65289	1900,7	28 74 75	605
606	36 72 36	222 545 016	24,6171	8,4623	6,40688	1,65017	1903,8	28 84 26	606
607	36 84 49	223 648 543	24,6374	8,4670	6,40853	1,64745	1906,9	28 93 79	607
608	36 96 64	224 755 712	24,6577	8,4716	6,41017	1,64474	1910,1	29 03 33	608
609	37 08 81	225 866 529	24,6779	8,4763	6,41182	1,64204	1913,2	29 12 89	609
610	37 21 00	226 981 000	24,6982	8,4809	6,41346	1,63934	1916,4	29 22 47	**610**
611	37 33 21	228 099 131	24,7184	8,4856	6,41510	1,63666	1919,5	29 32 06	611
612	37 45 44	229 220 928	24,7386	8,4902	6,41673	1,63399	1922,7	29 41 66	612
613	37 57 69	230 346 397	24,7588	8,4948	6,41836	1,63132	1925,8	29 51 28	613
614	37 69 96	231 475 544	24,7790	8,4994	6,41999	1,62866	1928,9	29 60 92	614
615	37 82 25	232 608 375	24,7992	8,5040	6,42162	1,62602	1932,1	29 70 57	615
616	37 94 56	233 744 896	24,8193	8,5086	6,42325	1,62338	1935,2	29 80 24	616
617	38 06 89	234 885 113	24,8395	8,5132	6,42487	1,62075	1938,4	29 89 92	617
618	38 19 24	236 029 032	24,8596	8,5178	6,42649	1,61812	1941,5	29 99 62	618
619	38 31 61	237 176 659	24,8797	8,5224	6,42811	1,61551	1944,6	30 09 34	619
620	38 44 00	238 328 000	24,8998	8,5270	6,42972	1,61290	1947,8	30 19 07	**620**
621	38 56 41	239 483 061	24,9199	8,5316	6,43133	1,61031	1950,9	30 28 82	621
622	38 68 84	240 641 848	24,9399	8,5362	6,43294	1,60772	1954,1	30 38 58	622
623	38 81 29	241 804 367	24,9600	8,5408	6,43455	1,60514	1957,2	30 48 36	623
624	38 93 76	242 970 624	24,9800	8,5453	6,43615	1,60256	1960,4	30 58 15	624
625	39 06 25	244 140 625	25,0000	8,5499	6,43775	1,60000	1963,5	30 67 96	625
626	39 18 76	245 314 376	25,0200	8,5544	6,43935	1,59744	1966,6	30 77 79	626
627	39 31 29	246 491 883	25,0400	8,5590	6,44095	1,59490	1969,8	30 87 63	627
628	39 43 84	247 673 152	25,0599	8,5635	6,44254	1,59236	1972,9	30 97 48	628
629	39 56 41	248 858 189	25,0799	8,5681	6,44413	1,58983	1976,1	31 07 36	629
630	39 69 00	250 047 000	25,0998	8,5726	6,44572	1,58730	1979,2	31 17 25	**630**
631	39 81 61	251 239 591	25,1197	8,5772	6,44731	1,58479	1982,3	31 27 15	631
632	39 94 24	252 435 968	25,1396	8,5817	6,44889	1,58228	1985,5	31 37 07	632
633	40 06 89	253 636 137	25,1595	8,5862	6,45047	1,57978	1988,6	31 47 00	633
634	40 19 56	254 840 104	25,1794	8,5907	6,45205	1,57729	1991,8	31 56 96	634
635	40 32 25	256 047 875	25,1992	8,5952	6,45362	1,57480	1994,9	31 66 92	635
636	40 44 96	257 259 456	25,2190	8,5997	6,45520	1,57233	1998,1	31 76 90	636
637	40 57 69	258 474 853	25,2389	8,6043	6,45677	1,56986	2001,2	31 86 90	637
638	40 70 44	259 694 072	25,2587	8,6088	6,45834	1,56740	2004,3	31 96 92	638
639	40 83 21	260 917 119	25,2784	8,6132	6,45990	1,56495	2007,5	32 06 95	639
640	40 96 00	262 144 000	25,2982	8,6177	6,46147	1,56250	2010,6	32 16 99	**640**
641	41 08 81	263 374 721	25,3180	8,6222	6,46303	1,56006	2013,8	32 27 05	641
642	41 21 64	264 609 288	25,3377	8,6267	6,46459	1,55763	2016,9	32 37 13	642
643	41 34 49	265 847 707	25,3574	8,6312	6,46614	1,55521	2020,0	32 47 22	643
644	41 47 36	267 089 984	25,3772	8,6357	6,46770	1,55280	2023,2	32 57 33	644
645	41 60 25	268 336 125	25,3969	8,6401	6,46925	1,55039	2026,3	32 67 45	645
646	41 73 16	269 586 136	25,4165	8,6446	6,47080	1,54799	2029,5	32 77 59	646
647	41 86 09	270 840 023	25,4362	8,6490	6,47235	1,54560	2032,6	32 87 75	647
648	41 99 04	272 097 792	25,4558	8,6535	6,47389	1,54321	2035,8	32 97 92	648
649	42 12 01	273 359 449	25,4755	8,6579	6,47543	1,54083	2038,9	33 08 10	649
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	8,6624	6,47697	1,53846	2042,0	33 18 31	**650**

650 – 700 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	8,6624	6,47697	1,53846	2042,0	33 18 31	**650**
651	42 38 01	275 894 451	25,5147	8,6668	6,47851	1,53610	2045,2	33 28 53	651
652	42 51 04	277 167 808	25,5343	8,6713	6,48004	1,53374	2048,3	33 38 76	652
653	42 64 09	278 445 077	25,5539	8,6757	6,48158	1,53139	2051,5	33 49 01	653
654	42 77 16	279 726 264	25,5734	8,6801	6,48311	1,52905	2054,6	33 59 27	654
655	42 90 25	281 011 375	25,5930	8,6845	6,48464	1,52672	2057,7	33 69 55	655
656	43 03 36	282 300 416	25,6125	8,6890	6,48616	1,52439	2060,9	33 79 85	656
657	43 16 49	283 593 393	25,6320	8,6934	6,48768	1,52207	2064,0	33 90 16	657
658	43 29 64	284 890 312	25,6515	8,6978	6,48920	1,51976	2067,2	34 00 49	658
659	43 42 81	286 191 179	25,6710	8,7022	6,49072	1,51745	2070,3	34 10 83	659
660	43 56 00	287 496 000	25,6905	8,7066	6,49224	1,51515	2073,5	34 21 19	**660**
661	43 69 21	288 804 781	25,7099	8,7110	6,49375	1,51286	2076,6	34 31 57	661
662	43 82 44	290 117 528	25,7294	8,7154	6,49527	1,51057	2079,7	34 41 96	662
663	43 95 69	291 434 247	25,7488	8,7198	6,49677	1,50830	2082,9	34 52 37	663
664	44 08 96	292 754 944	25,7682	8,7241	6,49828	1,50602	2086,0	34 62 79	664
665	44 22 25	294 079 625	25,7876	8,7285	6,49979	1,50376	2089,2	34 73 23	665
666	44 35 56	295 408 296	25,8070	8,7329	6,50129	1,50150	2092,3	34 83 68	666
667	44 48 89	296 740 963	25,8263	8,7373	6,50279	1,49925	2095,4	34 94 15	667
668	44 62 24	298 077 632	25,8457	8,7416	6,50429	1,49701	2098,6	35 04 64	668
669	44 75 61	299 418 309	25,8650	8,7460	6,50578	1,49477	2101,7	35 15 14	669
670	44 89 00	300 763 000	25,8844	8,7503	6,50728	1,49254	2104,9	35 25 65	**670**
671	45 02 41	302 111 711	25,9037	8,7547	6,50877	1,49031	2108,0	35 36 18	671
672	45 15 84	303 464 448	25,9230	8,7590	6,51026	1,48810	2111,2	35 46 73	672
673	45 29 29	304 821 217	25,9422	8,7634	6,51175	1,48588	2114,3	35 57 30	673
674	45 42 76	306 182 024	25,9615	8,7677	6,51323	1,48368	2117,4	35 67 88	674
675	45 56 25	307 546 875	25,9808	8,7721	6,51471	1,48148	2120,6	35 78 47	675
676	45 69 76	308 915 776	26,0000	8,7764	6,51619	1,47929	2123,7	35 89 08	676
677	45 83 29	310 288 733	26 0192	8,7807	6,51767	1,47710	2126,9	35 99 71	677
678	45 96 84	311 665 752	26,0384	8,7850	6,51915	1,47493	2130,0	36 10 35	678
679	46 10 41	313 046 839	26,0576	8,7893	6,52062	1,47275	2133,1	36 21 01	679
680	46 24 00	314 432 000	26,0768	8,7937	6,52209	1,47059	2136,3	36 31 68	**680**
681	46 37 61	315 821 241	26,0960	8,7980	6,52356	1,46843	2139,4	36 42 37	681
682	46 51 24	317 214 568	26,1151	8,8023	6,52503	1,46628	2142,6	36 53 08	682
683	46 64 89	318 611 987	26,1343	8,8066	6,52649	1,46413	2145,7	36 63 80	683
684	46 78 56	320 013 504	26,1534	8,8109	6,52796	1,46199	2148,8	36 74 53	684
685	46 92 25	321 419 125	26,1725	8,8152	6,52942	1,45985	2152,0	36 85 28	685
686	47 05 96	322 828 856	26,1916	8,8194	6,53088	1,45773	2155,1	36 96 05	686
687	47 19 69	324 242 703	26,2107	8,8237	6,53233	1,45560	2158,3	37 06 84	687
688	47 33 44	325 660 672	26,2298	8,8280	6,53379	1,45349	2161,4	37 17 64	688
689	47 47 21	327 082 769	26,2488	8,8323	6,53524	1,45138	2164,6	37 28 45	689
690	47 61 00	328 509 000	26,2679	8,8366	6,53669	1,44928	2167,7	37 39 28	**690**
691	47 74 81	329 939 371	26,2869	8,8408	6,53814	1,44718	2170,8	37 50 13	691
692	47 88 64	331 373 888	26,3059	8,8451	6,53959	1,44509	2174,0	37 60 99	692
693	48 02 49	332 812 557	26,3249	8,8493	6,54103	1,44300	2177,1	37 71 87	693
694	48 16 36	334 255 384	26,3439	8,8536	6,54247	1,44092	2180,3	37 82 76	694
695	48 30 25	335 702 375	26,3629	8,8578	6,54391	1,43885	2183,4	37 93 67	695
696	48 44 16	337 153 536	26,3818	8,8621	6,54535	1,43678	2186,5	38 04 59	696
697	48 58 09	338 608 873	26,4008	8,8668	6,54679	1,43472	2189,7	38 15 53	697
698	48 72 04	340 068 392	26,4197	8,8706	6,54822	1,43266	2192,8	38 26 49	698
699	48 86 01	341 532 099	26,4386	8,8748	6,54965	1,43062	2196,0	38 37 46	699
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,8790	6,55108	1,42857	2199,1	38 48 45	**700**

700—750 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,8790	6,55108	1,42857	2199,1	38 48 45	**700**
701	49 14 01	344 472 101	26,4764	8,8833	6,55251	1,42653	2202,3	38 59 45	701
702	49 28 04	345 948 408	26,4953	8,8875	6,55393	1,42450	2205,4	38 70 47	702
703	49 42 09	347 428 927	26,5141	8,8917	6,55536	1,42248	2208,5	38 81 51	703
704	49 56 16	348 913 664	26,5330	8,8959	6,55678	1,42045	2211,7	38 92 56	704
705	49 70 25	350 402 625	26,5518	8,9001	6,55820	1,41844	2214,8	39 03 63	705
706	49 84 36	351 895 816	26,5707	8,9043	6,55962	1,41643	2218,0	39 14 71	706
707	49 98 49	353 393 243	26,5895	8,9085	6,56103	1,41443	2221,1	39 25 80	707
708	50 12 64	354 894 912	26,6083	8,9127	6,56244	1,41243	2224,2	39 36 92	708
709	50 26 81	356 400 829	26,6271	8,9169	6,56386	1,41044	2227,4	39 48 05	709
710	50 41 00	357 911 000	26,6458	8,9211	6,56526	1,40845	2230,5	39 59 19	**710**
711	50 55 21	359 425 431	26,6646	8,9253	6,56667	1,40647	2233,7	39 70 35	711
712	50 69 44	360 944 128	26,6833	8,9295	6,56808	1,40449	2236,8	39 81 53	712
713	50 83 69	362 467 097	26,7021	8,9337	6,56948	1,40252	2240,0	39 92 72	713
714	50 97 96	363 994 344	26,7208	8,9378	6,57088	1,40056	2243,1	40 03 93	714
715	51 12 25	365 525 875	26,7395	8,9420	6,57228	1,39860	2246,2	40 15 15	715
716	51 26 56	367 061 696	26,7582	8,9462	6,57368	1,39665	2249,4	40 26 39	716
717	51 40 89	368 601 813	26,7769	8,9503	6,57508	1,39470	2252,5	40 37 65	717
718	51 55 24	370 146 232	26,7955	8,9545	6,57647	1,39276	2255,7	40 48 92	718
719	51 69 61	371 694 959	26,8142	8,9587	6,57786	1,39082	2258,8	40 60 20	719
720	51 84 00	373 248 000	26,8328	8,9628	6,57925	1,38889	2261,9	40 71 50	**720**
721	51 98 41	374 805 361	26,8514	8,9670	6,58064	1,38696	2265,1	40 82 82	721
722	52 12 84	376 367 048	26,8701	8,9711	6,58203	1,38504	2268,2	40 94 15	722
723	52 27 29	377 933 067	26,8887	8,9752	6,58341	1,38313	2271,4	41 05 50	723
724	52 41 76	379 503 424	26,9072	8,9794	6,58479	1,38122	2274,5	41 16 87	724
725	52 56 25	381 078 125	26,9258	8,9835	6,58617	1,37931	2277,7	41 28 25	725
726	52 70 76	382 657 176	26,9444	8,9876	6,58755	1,37741	2280,8	41 39 65	726
727	52 85 29	384 240 583	26,9629	8,9918	6,58893	1,37552	2283,9	41 51 06	727
728	52 99 84	385 828 352	26,9815	8,9959	6,59030	1,37363	2287,1	41 62 48	728
729	53 14 41	387 420 489	27,0000	9,0000	6,59167	1,37174	2290,2	41 73 93	729
730	53 29 00	389 017 000	27,0185	9,0041	6,59304	1,36986	2293,4	41 85 39	**730**
731	53 43 61	390 617 891	27,0370	9,0082	6,59441	1,36799	2296,5	41 96 86	731
732	53 58 24	392 223 168	27,0555	9,0123	6,59578	1,36612	2299,6	42 08 35	732
733	53 72 89	393 832 837	27,0740	9,0164	6,59715	1,36426	2302,8	42 19 86	733
734	53 87 56	395 446 904	27,0924	9,0205	6,59851	1,36240	2305,9	42 31 38	734
735	54 02 25	397 065 375	27,1109	9,0246	6,59987	1,36054	2309,1	42 42 92	735
736	54 16 96	398 688 256	27,1293	9,0287	6,60123	1,35870	2312,2	42 54 47	736
737	54 31 69	400 315 553	27,1477	9,0328	6,60259	1,35685	2315,4	42 66 04	737
738	54 46 44	401 947 272	27,1662	9,0369	6,60394	1,35501	2318,5	42 77 62	738
739	54 61 21	403 583 419	27,1846	9,0410	6,60530	1,35318	2321,6	42 89 22	739
740	54 76 00	405 224 000	27,2029	9,0450	6,60665	1,35135	2324,8	43 00 84	**740**
741	54 90 81	406 869 021	27,2213	9,0491	6,60800	1,34953	2327,9	43 12 47	741
742	55 05 64	408 518 488	27,2397	9,0532	6,60935	1,34771	2331,1	43 24 12	742
743	55 20 49	410 172 407	27,2580	9,0572	6,61070	1,34590	2334,2	43 35 78	743
744	55 35 36	411 830 784	27,2764	9,0613	6,61204	1,34409	2337,3	43 47 46	744
745	55 50 25	413 493 625	27,2947	9,0654	6,61338	1,34228	2340,5	43 59 16	745
746	55 65 16	415 160 936	27,3130	9,0694	6,61473	1,34048	2343,6	43 70 87	746
747	55 80 09	416 832 723	27,3313	9,0735	6,61607	1,33869	2346,8	43 82 59	747
748	55 95 04	418 508 992	27,3496	9,0775	6,61740	1,33690	2349,9	43 94 33	748
749	56 10 01	420 189 749	27,3679	9,0816	6,61874	1,33511	2353,1	44 06 09	749
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	9,0856	6,62007	1,33333	2356,2	44 17 86	**750**

750—800 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	9,0856	6,62007	1,33333	2356,2	44 17 86	750
751	56 40 01	423 564 751	27,4044	9,0896	6,62141	1,33156	2359,3	44 29 65	751
752	56 55 04	425 259 008	27,4226	9,0937	6,62274	1,32979	2362,5	44 41 46	752
753	56 70 09	426 957 777	27,4408	9,0977	6,62407	1,32802	2365,6	44 53 28	753
754	56 85 16	428 661 064	27,4591	9,1017	6,62539	1,32626	2368,8	44 65 11	754
755	57 00 25	430 368 875	27,4773	9,1057	6,62672	1,32450	2371,9	44 76 97	755
756	57 15 36	432 081 216	27,4955	9,1098	6,62804	1,32275	2375,0	44 88 83	756
757	57 30 49	433 798 093	27,5136	9,1138	6,62936	1,32100	2378,2	45 00 72	757
758	57 45 64	435 519 512	27,5318	9,1178	6,63068	1,31926	2381,3	45 12 62	758
759	57 60 81	437 245 479	27,5500	9,1218	6,63200	1,31752	2384,5	45 24 53	759
760	57 76 00	438 976 000	27,5681	9,1258	6,63332	1,31579	2387,6	45 36 46	760
761	57 91 21	440 711 081	27,5862	9,1298	6,63463	1,31406	2390,8	45 48 41	761
762	58 06 44	442 450 728	27,6043	9,1338	6,63595	1,31234	2393,9	45 60 37	762
763	58 21 69	444 194 947	27,6225	9,1378	6,63726	1,31062	2397,0	45 72 34	763
764	58 36 96	445 943 744	27,6405	9,1418	6,63857	1,30890	2400,2	45 84 34	764
765	58 52 25	447 697 125	27,6586	9,1458	6,63988	1,30719	2403,3	45 96 35	765
766	58 67 56	449 455 096	27,6767	9,1498	6,64118	1,30548	2406,5	46 08 37	766
767	58 82 89	451 217 663	27,6948	9,1537	6,64249	1,30378	2409,6	46 20 41	767
768	58 98 24	452 984 832	27,7128	9,1577	6,64379	1,30208	2412,7	46 32 47	768
769	59 13 61	454 756 609	27,7308	9,1617	6,64509	1,30039	2415,9	46 44 54	769
770	59 29 00	456 533 000	27,7489	9,1657	6,64639	1,29870	2419,0	46 56 63	770
771	59 44 41	458 314 011	27,7669	9,1696	6,64769	1,29702	2422,2	46 68 73	771
772	59 59 84	460 099 648	27,7849	9,1736	6,64898	1,29534	2425,3	46 80 85	772
773	59 75 29	461 889 917	27,8029	9,1775	6,65028	1,29366	2428,5	46 92 98	773
774	59 90 76	463 684 824	27,8209	9,1815	6,65157	1,29199	2431,6	47 05 13	774
775	60 06 25	465 484 375	27,8388	9,1855	6,65286	1,29032	2434,7	47 17 30	775
776	60 21 76	467 288 576	27,8568	9,1894	6,65415	1,28866	2437,9	47 29 48	776
777	60 37 29	469 097 433	27,8747	9,1933	6,65544	1,28700	2441,0	47 41 68	777
778	60 52 84	470 910 952	27,8927	9,1973	6,65673	1,28535	2444,2	47 53 89	778
779	60 68 41	472 729 139	27,9106	9,2012	6,65801	1,28370	2447,3	47 66 12	779
780	60 84 00	474 552 000	27,9285	9,2052	6,65929	1,28205	2450,4	47 78 36	780
781	60 99 61	476 379 541	27,9464	9,2091	6,66058	1,28041	2453,6	47 90 62	781
782	61 15 24	478 211 768	27,9643	9,2130	6,66185	1,27877	2456,7	48 02 90	782
783	61 30 89	480 048 687	27,9821	9,2170	6,66313	1,27714	2459,9	48 15 19	783
784	61 46 56	481 890 304	28,0000	9,2209	6,66441	1,27551	2463,0	48 27 50	784
785	61 62 25	483 736 625	28,0179	9,2248	6,66568	1,27389	2466,2	48 39 82	785
786	61 77 96	485 587 656	28,0357	9,2287	6,66696	1,27226	2469,3	48 52 16	786
787	61 93 69	487 443 403	28,0535	9,2326	6,66823	1,27065	2472,4	48 64 51	787
788	62 09 44	489 303 872	28,0713	9,2365	6,66950	1,26904	2475,6	48 76 88	788
789	62 25 21	491 169 069	28,0891	9,2404	6,67077	1,26743	2478,7	48 89 27	789
790	62 41 00	493 039 000	28,1069	9,2443	6,67203	1,26582	2481,9	49 01 67	790
791	62 56 81	494 913 671	28,1247	9,2482	6,67330	1,26422	2485,0	49 14 09	791
792	62 72 64	496 793 088	28,1425	9,2521	6,67456	1,26263	2488,1	49 26 52	792
793	62 88 49	498 677 257	28,1603	9,2560	6,67582	1,26103	2491,3	49 38 97	793
794	63 04 36	500 566 184	28,1780	9,2599	6,67708	1,25945	2494,4	49 51 43	794
795	63 20 25	502 459 875	28,1957	9,2638	6,67834	1,25786	2497,6	49 63 91	795
796	63 36 16	504 358 336	28,2135	9,2677	6,67960	1,25628	2500,7	49 76 41	796
797	63 52 09	506 261 573	28,2312	9,2716	6,68085	1,25471	2503,8	49 88 92	797
798	63 68 04	508 169 592	28,2489	9,2754	6,68211	1,25313	2507,0	50 01 45	798
799	63 84 01	510 082 399	28,2666	9,2793	6,68336	1,25156	2510,1	50 13 99	799
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	9,2832	6,68461	1,25000	2513,3	50 26 55	800

800–850 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1}{n} \cdot 10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	9,2832	6,68461	1,25000	2513,3	50 26 55	800
801	64 16 01	513 922 401	28,3019	9,2870	6,68586	1,24844	2516,4	50 39 12	801
802	64 32 04	515 849 608	28,3196	9,2909	6,68711	1,24688	2519,6	50 51 71	802
803	64 48 09	517 781 627	28,3373	9,2948	6,68835	1,24533	2522,7	50 64 32	803
804	64 64 16	519 718 464	28,3549	9,2986	6,68960	1,24378	2525,8	50 76 94	804
805	64 80 25	521 660 125	28,3725	9,3025	6,69084	1,24224	2529,0	50 89 58	805
806	64 96 36	523 606 616	28,3901	9,3063	6,69208	1,24069	2532,1	51 02 23	806
807	65 12 49	525 557 943	28,4077	9,3102	6,69332	1,23916	2535,3	51 14 90	807
808	65 28 64	527 514 112	28,4253	9,3140	6,69456	1,23762	2538,4	51 27 58	808
809	65 44 81	529 475 129	28,4429	9,3179	6,69580	1,23609	2541,5	51 40 28	809
810	65 61 00	531 441 000	28,4605	9,3217	6,69703	1,23457	2544,7	51 53 00	810
811	65 77 21	533 411 731	28,4781	9,3255	6,69827	1,23305	2547,8	51 65 73	811
812	65 93 44	535 387 328	28,4956	9,3294	6,69950	1,23153	2551,0	51 78 48	812
813	66 09 69	537 367 797	28,5132	9,3332	6,70073	1,23001	2554,1	51 91 24	813
814	66 25 96	539 353 144	28,5307	9,3370	6,70196	1,22850	2557,3	52 04 02	814
815	66 42 25	541 343 375	28,5482	9,3408	6,70319	1,22699	2560,4	52 16 81	815
816	66 58 56	543 338 496	28,5657	9,3447	6,70441	1,22549	2563,5	52 29 62	816
817	66 74 89	545 338 513	28,5832	9,3485	6,70564	1,22399	2566,7	52 42 45	817
818	66 91 24	547 343 432	28,6007	9,3523	6,70686	1,22249	2569,8	52 55 29	818
819	67 07 61	549 353 259	28,6182	9,3561	6,70808	1,22100	2573,0	52 68 14	819
820	67 24 00	551 368 000	28,6356	9,3599	6,70930	1,21951	2576,1	52 81 02	820
821	67 40 41	553 387 661	28,6531	9,3637	6,71052	1,21803	2579,2	52 93 91	821
822	67 56 84	555 412 248	28,6705	9,3675	6,71174	1,21655	2582,4	53 06 81	822
823	67 73 29	557 441 767	28,6880	9,3713	6,71296	1,21507	2585,5	53 19 73	823
824	67 89 76	559 476 224	28,7054	9,3751	6,71417	1,21359	2588,7	53 32 67	824
825	68 06 25	561 515 625	28,7228	9,3789	6,71538	1,21212	2591,8	53 45 62	825
826	68 22 76	563 559 976	28,7402	9,3827	6,71659	1,21065	2595,0	53 58 58	826
827	68 39 29	565 609 283	28,7576	9,3865	6,71780	1,20919	2598,1	53 71 57	827
828	68 55 84	567 663 552	28,7750	9,3902	6,71901	1,20773	2601,2	53 84 56	828
829	68 72 41	569 722 789	28,7924	9,3940	6,72022	1,20627	2604,1	53 97 58	829
830	68 89 00	571 787 000	28,8097	9,3978	6,72143	1,20482	2607,5	54 10 61	830
831	69 05 61	573 856 191	28,8271	9,4016	6,72263	1,20337	2610,7	54 23 65	831
832	69 22 24	575 930 368	28,8444	9,4053	6,72383	1,20192	2613,8	54 36 71	832
833	69 38 89	578 009 537	28,8617	9,4091	6,72503	1,20048	2616,9	54 49 79	833
834	69 55 56	580 093 704	28,8791	9,4129	6,72623	1,19904	2620,1	54 62 88	834
835	69 72 25	582 182 875	28,8964	9,4166	6,72743	1,19760	2623,2	54 75 99	835
836	69 88 96	584 277 056	28,9137	9,4204	6,72863	1,19617	2626,4	54 89 12	836
837	70 05 69	586 376 253	28,9310	9,4241	6,72982	1,19474	2629,5	55 02 26	837
838	70 22 44	588 480 472	28,9482	9,4279	6,73102	1,19332	2632,7	55 15 41	838
839	70 39 21	590 589 719	28,9655	9,4316	6,73221	1,19190	2635,8	55 28 58	839
840	70 56 00	592 704 000	28,9828	9,4354	6,73340	1,19048	2638,9	55 41 77	840
841	70 72 81	594 823 321	29,0000	9,4391	6,73459	1,18906	2642,1	55 54 97	841
842	70 89 64	596 947 688	29,0172	9,4429	6,73578	1,18765	2645,2	55 68 19	842
843	71 06 49	599 077 107	29,0345	9,4466	6,73697	1,18624	2648,4	55 81 42	843
844	71 23 36	601 211 584	29,0517	9,4503	6,73815	1,18483	2651,5	55 94 67	844
845	71 40 25	603 351 125	29,0689	9,4541	6,73934	1,18343	2654,6	56 07 94	845
846	71 57 16	605 495 736	29,0861	9,4578	6,74052	1,18203	2657,8	56 21 22	846
847	71 74 09	607 645 423	29,1033	9,4615	6,74170	1,18064	2660,9	56 34 52	847
848	71 91 04	609 800 192	29,1204	9,4652	6,74288	1,17925	2664,1	56 47 83	848
849	72 08 01	611 960 049	29,1376	9,4690	6,74406	1,17786	2667,2	56 61 16	849
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	6,74524	1,17647	2670,4	56 74 50	850

850—900 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	6,74524	1,17647	2670,4	56 74 50	850
851	72 42 01	616 295 051	29,1719	9,4764	6,74641	1,17509	2673,5	56 87 86	851
852	72 59 04	618 470 208	29,1890	9,4801	6,74759	1,17371	2676,6	57 01 24	852
853	72 76 09	620 650 477	29,2062	9,4838	6,74876	1,17233	2679,8	57 14 63	853
854	72 93 16	622 835 864	29,2233	9,4875	6,74993	1,17096	2682,9	57 28 03	854
855	73 10 25	625 026 375	29,2404	9,4912	6,75110	1,16959	2686,1	57 41 46	855
856	73 27 36	627 222 016	29,2575	9,4949	6,75227	1,16822	2689,2	57 54 90	856
857	73 44 49	629 422 793	29,2746	9,4986	6,75344	1,16686	2692,3	57 68 35	857
858	73 61 64	631 628 712	29,2916	9,5023	6,75460	1,16550	2695,5	57 81 82	858
859	73 78 81	633 839 779	29,3087	9,5060	6,75577	1,16414	2698,6	57 95 30	859
860	73 96 00	636 056 000	29,3258	9,5097	6,75693	1,16279	2701,8	58 08 80	860
861	74 13 21	638 277 381	29,3428	9,5134	6,75809	1,16144	2704,9	58 22 32	861
862	74 30 44	640 503 928	29,3598	9,5171	6,75926	1,16009	2708,1	58 35 85	862
863	74 47 69	642 735 647	29,3769	9,5207	6,76041	1,15875	2711,2	58 49 40	863
864	74 64 96	644 972 544	29,3939	9,5244	6,76157	1,15741	2714,3	58 62 97	864
865	74 82 25	647 214 625	29,4109	9,5281	6,76273	1,15607	2717,5	58 76 55	865
866	74 99 56	649 461 896	29,4279	9,5317	6,76388	1,15473	2720,6	58 90 14	866
867	75 16 89	651 714 363	29,4449	9,5354	6,76504	1,15340	2723,8	59 03 75	867
868	75 34 24	653 972 032	29,4618	9,5391	6,76619	1,15207	2726,9	59 17 38	868
869	75 51 61	656 234 909	29,4788	9,5427	6,76734	1,15075	2730,0	59 31 02	869
870	75 69 00	658 503 000	29,4958	9,5464	6,76849	1,14943	2733,2	59 44 68	870
871	75 86 41	660 776 311	29,5127	9,5501	6,76964	1,14811	2736,3	59 58 35	871
872	76 03 84	663 054 848	29,5296	9,5537	6,77079	1,14679	2739,5	59 72 04	872
873	76 21 29	665 338 617	29,5466	9,5574	6,77194	1,14548	2742,6	59 85 75	873
874	76 38 76	667 627 624	29,5635	9,5610	6,77308	1,14416	2745,8	59 99 47	874
875	76 56 25	669 921 875	29,5804	9,5647	6,77422	1,14286	2748,9	60 13 20	875
876	76 73 76	672 221 376	29,5973	9,5683	6,77537	1,14155	2752,0	60 26 96	876
877	76 91 29	674 526 133	29,6142	9,5719	6,77651	1,14025	2755,2	60 40 73	877
878	77 08 84	676 836 152	29,6311	9,5756	6,77765	1,13895	2758,3	60 54 51	878
879	77 26 41	679 151 439	29,6479	9,5792	6,77878	1,13766	2761,5	60 68 31	879
880	77 44 00	681 472 000	29 6648	9,5828	6,77992	1,13636	2764,6	60 82 12	880
881	77 61 61	683 797 841	29,6816	9,5865	6,78106	1,13507	2767,7	60 95 95	881
882	77 79 24	686 128 968	29,6985	9,5901	6,78219	1,13379	2770,9	61 09 80	882
883	77 96 89	688 465 387	29,7153	9,5937	6,78333	1,13250	2774,0	61 23 66	883
884	78 14 56	690 807 104	29,7321	9,5973	6,78446	1,13122	2777,2	61 37 54	884
885	78 32 25	693 154 125	29,7489	9,6010	6,78559	1,12994	2780,3	61 51 43	885
886	78 49 96	695 506 456	29,7658	9,6046	6,78672	1,12867	2783,5	61 65 34	886
887	78 67 69	697 864 103	29,7825	9,6082	6,78784	1,12740	2786,6	61 79 27	887
888	78 85 44	700 227 072	29,7993	9,6118	6,78897	1,12613	2789,7	61 93 21	888
889	79 03 21	702 595 369	29,8161	9,6154	6,79010	1,12486	2792,9	62 07 17	889
890	79 21 00	704 969 000	29,8329	9,6190	6,79122	1,12360	2796,0	62 21 14	890
891	79 38 81	707 347 971	29,8496	9,6226	6,79234	1,12233	2799,2	62 35 13	891
892	79 56 64	709 732 288	29,8664	9,6262	6,79347	1,12108	2802,3	62 49 13	892
893	79 74 49	712 121 957	29,8831	9,6298	6,79459	1,11982	2805,4	62 63 15	893
894	79 92 36	714 516 984	29,8998	9,6334	6,79571	1,11857	2808,6	62 77 18	894
895	80 10 25	716 917 375	29,9166	9,6370	6,79682	1,11732	2811,7	62 91 24	895
896	80 28 16	719 323 136	29,9333	9,6406	6,79794	1,11607	2814,9	63 05 80	896
897	80 46 09	721 734 273	29,9500	9,6442	6,79906	1,11483	2818,0	63 19 38	897
898	80 64 04	724 150 792	29,9666	9,6477	6,80017	1,11359	2821,2	63 33 48	898
899	80 82 01	726 572 699	29,9833	9,6513	6,80128	1,11235	2824,3	63 47 60	899
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6459	6,80239	1,11111	2827,4	63 61 73	900

900—950 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549	6,80239	1,11111	2827,4	63 61 73	900
901	81 18 01	731 432 701	30,0167	9,6585	6,80351	1,10988	2830,6	63 75 87	901
902	81 36 04	733 870 808	30,0333	9,6620	6,80461	1,10865	2833,7	63 90 03	902
903	81 54 09	736 314 327	30,0500	9,6656	6,80572	1,10742	2836,9	64 04 21	903
904	81 72 16	738 763 264	30,0666	9,6692	6,80683	1,10619	2840,0	64 18 40	904
905	81 90 25	741 217 625	30,0832	9,6727	6,80793	1,10497	2843,1	64 32 61	905
906	82 08 36	743 677 416	30,0998	9,6763	6,80904	1,10375	2846,3	64 46 83	906
907	82 26 49	746 142 643	30,1164	9,6799	6,81014	1,10254	2849,4	64 61 07	907
908	82 44 64	748 613 312	30,1330	9,6834	6,81124	1,10132	2852,6	64 75 33	908
909	82 62 81	751 089 429	30,1496	9,6870	6,81235	1,10011	2855,7	64 89 60	909
910	82 81 00	753 571 000	30,1662	9,6905	6,81344	1,09890	2858,8	65 03 88	910
911	82 99 21	756 058 031	30,1828	9,6941	6,81454	1,09769	2862,0	65 18 18	911
912	83 17 44	758 550 528	30,1993	9,6976	6,81564	1,09649	2865,1	65 32 50	912
913	83 35 69	761 048 497	30,2159	9,7012	6,81674	1,09529	2868,3	65 46 84	913
914	83 53 96	763 551 944	30,2324	9,7047	6,81783	1,09409	2871,4	65 61 18	914
915	83 72 25	766 060 875	30,2490	9,7082	6,81892	1,09290	2874,6	65 75 55	915
916	83 90 56	768 575 296	30,2655	9,7118	6,82002	1,09170	2877,7	65 89 93	916
917	84 08 89	771 095 213	30,2820	9,7153	6,82111	1,09051	2880,8	66 04 33	917
918	84 27 24	773 620 632	30,2985	9,7188	6,82220	1,08932	2884,0	66 18 74	918
919	84 45 61	776 151 559	30,3150	9,7224	6,82329	1,08814	2887,1	66 33 17	919
920	84 64 00	778 688 000	30,3315	9,7259	6,82437	1,08696	2890,3	66 47 61	920
921	84 82 41	781 229 961	30,3480	9,7294	6,82546	1,08578	2893,4	66 62 07	921
922	85 00 84	783 777 448	30,3645	9,7329	6,82655	1,08460	2896,5	66 76 54	922
923	85 19 29	786 330 467	30,3809	9,7364	6,82763	1,08342	2899,7	66 91 03	923
924	85 37 76	788 889 024	30,3974	9,7400	6,82871	1,08225	2902,8	67 05 54	924
925	85 56 25	791 453 125	30,4138	9,7435	6,82979	1,08108	2906,0	67 20 06	925
926	85 74 76	794 022 776	30,4302	9,7470	6,83087	1,07991	2909,1	67 34 60	926
927	85 93 29	796 597 983	30,4467	9,7505	6,83195	1,07875	2912,3	67 49 15	927
928	86 11 84	799 178 752	30,4631	9,7540	6,83303	1,07759	2915,4	67 63 72	928
929	86 30 41	801 765 089	30,4795	9,7575	6,83411	1,07643	2918,5	67 78 31	929
930	86 49 00	804 357 000	30,4959	9,7610	6,83518	1,07527	2921,7	67 92 91	930
931	86 67 61	806 954 491	30,5123	9,7645	6,83626	1,07411	2924,8	68 07 52	931
932	86 86 24	809 557 568	30,5287	9,7680	6,83733	1,07296	2928,0	68 22 16	932
933	87 04 89	812 166 237	30,5450	9,7715	6,83841	1,07181	2931,1	68 36 80	933
934	87 23 56	814 780 504	30,5614	9,7750	6,83948	1,07066	2934,2	68 51 47	934
935	87 42 25	817 400 375	30,5778	9,7785	6,84055	1,06952	2937,4	68 66 15	935
936	87 60 96	820 025 856	30,5941	9,7819	6,84162	1,06838	2940,5	68 80 84	936
937	87 79 69	822 656 953	30,6105	9,7854	6,84268	1,06724	2943,7	68 95 55	937
938	87 98 44	825 293 672	30,6268	9,7889	6,84375	1,06610	2946,8	69 10 28	938
939	88 17 21	827 936 019	30,6431	9,7924	6,84482	1,06496	2950,0	69 25 02	939
940	88 36 00	830 584 000	30,6594	9,7959	6,84588	1,06383	2953,1	69 39 78	940
941	88 54 81	833 237 621	30,6757	9,7993	6,84694	1,06270	2956,2	69 54 55	941
942	88 73 64	835 896 888	30,6920	9,8028	6,84801	1,06157	2959,4	69 69 34	942
943	88 92 49	838 561 807	30,7083	9,8063	6,84907	1,06045	2962,5	69 84 15	943
944	89 11 36	841 232 384	30,7246	9,8097	6,85013	1,05932	2965,7	69 98 97	944
945	89 30 25	843 908 625	30,7409	9,8132	6,85118	1,05820	2968,8	70 13 80	945
946	89 49 16	846 590 536	30,7571	9,8167	6,85224	1,05708	2971,9	70 28 65	946
947	89 68 09	849 278 123	30,7734	9,8201	6,85330	1,05597	2975,1	70 43 52	947
948	89 87 04	851 971 392	30,7896	9,8236	6,85435	1,05485	2978,2	70 58 40	948
949	90 06 01	854 670 349	30,8058	9,8270	6,85541	1,05374	2981,4	70 73 30	949
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	9,8305	6,85646	1,05263	2984,5	70 88 22	950

950 – 1 000 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	9,8305	6,85646	1,05263	2984,5	70 88 22	**950**
951	90 44 01	860 085 351	30,8383	9,8339	6,85751	1,05152	2987,7	71 03 15	951
952	90 63 04	862 801 408	30,8545	9,8374	6,85857	1,05042	2990,8	71 18 09	952
953	90 82 09	865 523 177	30,8707	9,8408	6,85961	1,04932	2993,9	71 33 06	953
954	91 01 16	868 250 664	30,8869	9,8443	6,86066	1,04822	2997,1	71 48 03	954
955	91 20 25	870 983 875	30,9031	9,8477	6,86171	1,04712	3000,2	71 63 03	955
956	91 39 36	873 722 816	30,9192	9,8511	6,86276	1,04603	3003,4	71 78 04	956
957	91 58 49	876 467 493	30,9354	9,8546	6,86380	1,04493	3006,5	71 93 06	957
958	91 77 64	879 217 912	30,9516	9,8580	6,86485	1,04384	3009,6	72 08 10	958
959	91 96 81	881 974 079	30,9677	9,8614	6,86589	1,04275	3012,8	72 23 16	959
960	92 16 00	884 736 000	30,9839	9,8648	6,86693	1,04167	3015,9	72 38 23	**960**
961	92 35 21	887 503 681	31,0000	9,8683	6,86797	1,04058	3019,1	72 53 32	961
962	92 54 44	890 277 128	31,0161	9,8717	6,86901	1,03950	3022,2	72 68 42	962
963	92 73 69	893 056 347	31,0322	9,8751	6,87005	1,03842	3025,4	72 83 54	963
964	92 92 96	895 841 344	31,0483	9,8785	6,87109	1,03734	3028,5	72 98 67	964
965	93 12 25	898 632 125	31,0644	9,8819	6,87213	1,03627	3031,6	73 13 82	965
966	93 31 56	901 428 696	31,0805	9,8854	6,87316	1,03520	3034,8	73 28 99	966
967	93 50 89	904 231 063	31,0966	9,8888	6,87420	1,03413	3037,9	73 44 17	967
968	93 70 24	907 039 232	31,1127	9,8922	6,87523	1,03306	3041,1	73 59 37	968
969	93 89 61	909 853 209	31,1288	9,8956	6,87626	1,03199	3044,2	73 74 58	969
970	94 09 00	912 673 000	31,1448	9,8990	6,87730	1,03093	3047,3	73 89 81	**970**
971	94 28 41	915 498 611	31,1609	9,9024	6,87833	1,02987	3050,5	74 05 06	971
972	94 47 84	918 330 048	31,1769	9,9058	6,87936	1,02881	3053,6	74 20 32	972
973	94 67 29	921 167 317	31,1929	9,9092	6,88038	1,02775	3056,8	74 35 59	973
974	94 86 76	924 010 424	31,2090	9,9126	6,88141	1,02669	3059,9	74 50 88	974
975	95 06 25	926 859 375	31,2250	9,9160	6,88244	1,02564	3063,1	74 66 19	975
976	95 25 76	929 714 176	31,2410	9,9194	6,88346	1,02459	3066,2	74 81 51	976
977	95 45 29	932 574 833	31,2570	9,9227	6,88449	1,02354	3069,3	74 96 85	977
978	95 64 84	935 441 352	31,2730	9,9261	6,88551	1,02249	3072,5	75 12 21	978
979	95 84 41	938 313 739	31,2890	9,9295	6,88653	1,02145	3075,6	75 27 58	979
980	96 04 00	941 192 000	31,3050	9,9329	6,88755	1,02041	3078,8	75 42 96	**980**
981	96 23 61	944 076 141	31,3209	9,9363	6,88857	1,01937	3081,9	75 58 37	981
982	96 43 24	946 966 168	31,3369	9,9396	6,88959	1,01833	3085,0	75 73 78	982
983	96 62 89	949 862 087	31,3528	9,9430	6,89061	1,01729	3088,2	75 89 22	983
984	96 82 56	952 763 904	31,3688	9,9464	6,89163	1,01626	3091,3	76 04 66	984
985	97 02 25	955 671 625	31,3847	9,9497	6,89264	1,01523	3094,5	76 20 13	985
986	97 21 96	958 585 256	31,4006	9,9531	6,89366	1,01420	3097,6	76 35 61	986
987	97 41 69	961 504 803	31,4166	9,9565	6,89467	1,01317	3100,8	76 51 11	987
988	97 61 44	964 430 272	31,4325	9,9598	6,89568	1,01215	3103,9	76 66 62	988
989	97 81 21	967 361 669	31,4484	9,9632	6,89669	1,01112	3107,0	76 82 14	989
990	98 01 00	970 299 000	31,4643	9,9666	6,89770	1,01010	3110,2	76 97 69	**990**
991	98 20 81	973 242 271	31,4802	9,9699	6,89871	1,00908	3113,3	77 13 25	991
992	98 40 64	976 191 488	31,4960	9,9733	6,89972	1,00806	3116,5	77 28 82	992
993	98 60 49	979 146 657	31,5119	9,9766	6,90073	1,00705	3119,6	77 44 41	993
994	98 80 36	982 107 784	31,5278	9,9800	6,90174	1,00604	3122,7	77 60 02	994
995	99 00 25	985 074 875	31,5436	9,9833	6,90274	1,00503	3125,9	77 75 64	995
996	99 20 16	988 047 936	31,5595	9,9866	6,90375	1,00402	3129,0	77 91 28	996
997	99 40 09	991 026 973	31,5753	9,9900	6,90475	1,00301	3132,2	78 06 93	997
998	99 60 04	994 011 992	31,5911	9,9933	6,90575	1,00200	3135,3	78 22 60	998
999	99 80 01	997 002 999	31,6070	9,9967	6,90675	1,00100	3138,5	78 38 28	999
1000	100 00 00	1000 000 000	31,6228	10,0000	6,90776	1,00000	3141,6	78 53 98	**1000**

1 000–1 050 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1000	1 000 000	1 000 000 000	31,6228	10,0000	6,90776	1,00000	3141,6	78 53 98	**1000**
1001	1 002 001	1 003 003 001	31,6386	10,0033	6,90875	0,99900	3144,7	78 69 70	1001
1002	1 004 004	1 006 012 008	31,6544	10,0067	6,90975	0,99800	3147,9	78 85 43	1002
1003	1 006 009	1 009 027 027	31,6702	10,0100	6,91075	0,99701	3151,0	79 01 18	1003
1004	1 008 016	1 012 048 064	31,6860	10,0133	6,91175	0,99602	3154,2	79 16 94	1004
1005	1 010 025	1 015 075 125	31,7017	10,0166	6,91274	0,99502	3157,3	79 32 72	1005
1006	1 012 036	1 018 108 216	31,7175	10,0200	6,91374	0,99404	3160,4	79 48 51	1006
1007	1 014 049	1 021 147 343	31,7333	10,0233	6,91473	0,99305	3163,6	79 64 32	1007
1008	1 016 064	1 024 192 512	31,7490	10,0266	6,91572	0,99206	3166,7	79 80 15	1008
1009	1 018 081	1 027 243 729	31,7648	10,0299	6,91672	0,99108	3169,9	79 95 99	1009
1010	1 020 100	1 030 301 000	31,7805	10,0332	6,91771	0,99010	3173,0	80 11 85	**1010**
1011	1 022 121	1 033 364 331	31,7962	10,0365	6,91870	0,98912	3176,2	80 27 72	1011
1012	1 024 144	1 036 433 728	31,8119	10,0398	6,91968	0,98814	3179,3	80 43 61	1012
1013	1 026 169	1 039 509 197	31,8277	10,0431	6,92067	0,98717	3182,4	80 59 51	1013
1014	1 028 196	1 042 590 744	31,8434	10,0465	6,92166	0,98619	3185,6	80 75 43	1014
1015	1 030 225	1 045 678 375	31,8591	10,0498	6,92264	0,98522	3188,7	80 91 37	1015
1016	1 032 256	1 048 772 096	31,8748	10,0531	6,92363	0,98425	3191,9	81 07 32	1016
1017	1 034 289	1 051 871 913	31,8904	10,0563	6,92461	0,98328	3195,0	81 23 29	1017
1018	1 036 324	1 054 977 832	31,9061	10,0596	6,92560	0,98232	3198,1	81 39 27	1018
1019	1 038 361	1 058 089 859	31,9218	10,0629	6,92658	0,98135	3201,3	81 55 27	1019
1020	1 040 400	1 061 208 000	31,9374	10,0662	6,92756	0,98039	3204,4	81 71 28	**1020**
1021	1 042 441	1 064 332 261	31,9531	10,0695	6,92854	0,97943	3207,6	81 87 31	1021
1022	1 044 484	1 067 462 648	31,9687	10,0728	6,92952	0,97847	3210,7	82 03 36	1022
1023	1 046 529	1 070 599 167	31,9844	10,0761	6,93049	0,97752	3213,8	82 19 42	1023
1024	1 048 576	1 073 741 824	32,0000	10,0794	6,93147	0,97656	3217,0	82 35 50	1024
1025	1 050 625	1 076 890 625	32,0156	10,0826	6,93245	0,97561	3220,1	82 51 59	1025
1026	1 052 676	1 080 045 576	32,0312	10,0859	6,93342	0,97466	3223,3	82 67 70	1026
1027	1 054 729	1 083 206 683	32,0468	10,0892	6,93440	0,97371	3226,4	82 83 82	1027
1028	1 056 784	1 086 373 952	32,0624	10,0925	6,93537	0,97276	3229,6	82 99 96	1028
1029	1 058 841	1 089 547 389	32,0780	10,0957	6,93634	0,97182	3232,7	83 16 12	1029
1030	1 060 900	1 092 727 000	32,0936	10,0990	6,93731	0,97087	3235,8	83 32 29	**1030**
1031	1 062 961	1 095 912 791	32,1092	10,1023	6,93828	0,96993	3239,0	83 48 48	1031
1032	1 065 024	1 099 104 768	32,1248	10,1055	6,93925	0,96899	3242,1	83 64 68	1032
1033	1 067 089	1 102 302 937	32,1403	10,1088	6,94022	0,96805	3245,3	83 80 90	1033
1034	1 069 156	1 105 507 304	32,1559	10,1121	6,94119	0,96712	3248,4	83 97 13	1034
1035	1 071 225	1 108 717 875	32,1714	10,1153	6,94216	0,96618	3251,5	84 13 38	1035
1036	1 073 296	1 111 934 656	32,1870	10,1186	6,94312	0,96525	3254,7	84 29 65	1036
1037	1 075 369	1 115 157 653	32,2025	10,1218	6,94409	0,96432	3257,8	84 45 93	1037
1038	1 077 444	1 118 386 872	32,2180	10,1251	6,94505	0,96339	3261,0	84 62 23	1038
1039	1 079 521	1 121 622 319	32,2335	10,1283	6,94601	0,96246	3264,1	84 78 54	1039
1040	1 081 600	1 124 864 000	32,2490	10,1316	6,94698	0,96154	3267,3	84 94 87	**1040**
1041	1 083 681	1 128 111 921	32,2645	10,1348	6,94794	0,96061	3270,4	85 11 21	1041
1042	1 085 764	1 131 366 088	32,2800	10,1381	6,94890	0,95969	3273,5	85 27 57	1042
1043	1 087 849	1 134 626 507	32,2955	10,1413	6,94986	0,95877	3276,7	85 43 95	1043
1044	1 089 936	1 137 893 184	32,3110	10,1446	6,95081	0,95785	3279,8	85 60 34	1044
1045	1 092 025	1 141 166 125	32,3265	10,1478	6,95177	0,95694	3283,0	85 76 74	1045
1046	1 094 116	1 144 445 336	32,3419	10,1510	6,95273	0,95602	3286,1	85 93 17	1046
1047	1 096 209	1 147 730 823	32,3574	10,1543	6,95368	0,95511	3289,2	86 09 61	1047
1048	1 098 304	1 151 022 592	32,3728	10,1575	6,95464	0,95420	3292,4	86 26 06	1048
1049	1 100 401	1 154 320 649	32,3883	10,1607	6,95559	0,95329	3295,5	86 42 53	1049
1050	1 102 500	1 157 625 000	32,4037	10,1640	6,95655	0,95238	3298,7	86 59 01	**1050**

1 050 – 1 100 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1050	1 102 500	1 157 625 000	32,4037	10,1640	6,95655	0,95238	3298,7	86 59 01	**1050**
1051	1 104 601	1 160 935 651	32,4191	10,1672	6,95750	0,95147	3301,8	86 75 52	1051
1052	1 106 704	1 164 252 608	32,4345	10,1704	6,95845	0,95057	3305,0	86 92 03	1052
1053	1 108 809	1 167 575 877	32,4500	10,1736	6,95940	0,94967	3308,1	87 08 57	1053
1054	1 110 916	1 170 905 464	32,4654	10,1769	6,96035	0,94877	3311,2	87 25 11	1054
1055	1 113 025	1 174 241 375	32,4808	10,1801	6,96130	0,94787	3314,4	87 41 68	1055
1056	1 115 136	1 177 583 616	32,4962	10,1833	6,96224	0,94697	3317,5	87 58 26	1056
1057	1 117 249	1 180 932 193	32,5115	10,1865	6,96319	0,94607	3320,7	87 74 85	1057
1058	1 119 364	1 184 287 112	32,5269	10,1897	6,96414	0,94518	3323,8	87 91 46	1058
1059	1 121 481	1 187 648 379	32,5423	10,1929	6,96508	0,94429	3326,9	88 08 09	1059
1060	1 123 600	1 191 016 000	32,5576	10,1961	6,96602	0,94340	3330,1	88 24 73	**1060**
1061	1 125 721	1 194 389 981	32,5730	10,1993	6,96697	0,94251	3333,2	88 41 39	1061
1062	1 127 844	1 197 770 328	32,5883	10,2025	6,96791	0,94162	3336,4	88 58 07	1062
1063	1 129 969	1 201 157 047	32,6037	10,2057	6,96885	0,94073	3339,5	88 74 76	1063
1064	1 132 096	1 204 550 144	32,6190	10,2089	6,96979	0,93985	3342,7	88 91 46	1064
1065	1 134 225	1 207 949 625	32,6343	10,2121	6,97073	0,93897	3345,8	89 08 18	1065
1066	1 136 356	1 211 355 496	32,6497	10,2153	6,97167	0,93809	3348,9	89 24 92	1066
1067	1 138 489	1 214 767 763	32,6650	10,2185	6,97261	0,93721	3352,1	89 41 67	1067
1068	1 140 624	1 218 186 432	32,6803	10,2217	6,97354	0,93633	3355,2	89 58 44	1068
1069	1 142 761	1 221 611 509	32,6956	10,2249	6,97448	0,93545	3358,4	89 75 22	1069
1070	1 144 900	1 225 043 000	32,7109	10,2281	6,97541	0,93458	3361,5	89 92 02	**1070**
1071	1 147 041	1 228 480 911	32,7261	10,2313	6,97635	0,93371	3364,6	90 08 84	1071
1072	1 149 184	1 231 925 248	32,7414	10,2345	6,97728	0,93284	3367,8	90 25 67	1072
1073	1 151 329	1 235 376 017	32,7567	10,2376	6,97821	0,93197	3370,9	90 42 52	1073
1074	1 153 476	1 238 833 224	32,7719	10,2408	6,97915	0,93110	3374,1	90 59 38	1074
1075	1 155 625	1 242 296 875	32,7872	10,2440	6,98008	0,93023	3377,2	90 76 26	1075
1076	1 157 776	1 245 766 976	32,8024	10,2472	6,98101	0,92937	3380,4	90 93 15	1076
1077	1 159 929	1 249 243 533	32,8177	10,2503	6,98193	0,92851	3383,5	91 10 06	1077
1078	1 162 084	1 252 726 552	32,8329	10,2535	6,98286	0,92764	3386,6	91 26 99	1078
1079	1 164 241	1 256 216 039	32,8481	10,2567	6,98379	0,92678	3389,8	91 43 93	1079
1080	1 166 400	1 259 712 000	32,8634	10,2599	6,98472	0,92593	3392,9	91 60 88	**1080**
1081	1 168 561	1 263 214 441	32,8786	10,2630	6,98564	0,92507	3396,1	91 77 86	1081
1082	1 170 724	1 266 723 368	32,8938	10,2662	6,98657	0,92421	3399,2	91 94 84	1082
1083	1 172 889	1 270 238 787	32,9090	10,2693	6,98749	0,92336	3402,3	92 11 85	1083
1084	1 175 056	1 273 760 704	32,9242	10,2725	6,98841	0,92251	3405,5	92 28 87	1084
1085	1 177 225	1 277 289 125	32,9393	10,2757	6,98934	0,92166	3408,6	92 45 90	1085
1086	1 179 396	1 280 824 056	32,9545	10,2788	6,99026	0,92081	3411,8	92 62 95	1086
1087	1 181 569	1 284 365 503	32,9697	10,2820	6,99118	0,91996	3414,9	92 80 02	1087
1088	1 183 744	1 287 913 472	32,9848	10,2851	6,99210	0,91912	3418,1	92 97 10	1088
1089	1 185 921	1 291 467 969	33,0000	10,2883	6,99302	0,91827	3421,2	93 14 20	1089
1090	1 188 100	1 295 029 000	33,0151	10,2914	6,99393	0,91743	3424,3	93 31 32	**1090**
1091	1 190 281	1 298 596 571	33,0303	10,2946	6,99485	0,91659	3427,5	93 48 45	1091
1092	1 192 464	1 302 170 688	33,0454	10,2977	6,99577	0,91575	3430,6	93 65 59	1092
1093	1 194 649	1 305 751 357	33,0606	10,3009	6,99668	0,91491	3433,8	93 82 75	1093
1094	1 196 836	1 309 338 584	33,0757	10,3040	6,99760	0,91408	3436,9	93 99 93	1094
1095	1 199 025	1 312 932 375	33,0908	10,3071	6,99851	0,91324	3440,0	94 17 12	1095
1096	1 201 216	1 316 532 736	33,1059	10,3103	6,99942	0,91240	3443,2	94 34 33	1096
1097	1 203 409	1 320 139 673	33,1210	10,3134	7,00033	0,91158	3446,3	94 51 55	1097
1098	1 205 604	1 323 753 192	33,1361	10,3165	7,00125	0,91075	3449,5	94 68 79	1098
1099	1 207 801	1 327 373 299	33,1512	10,3197	7,00216	0,90992	3452,6	94 86 05	1099
1100	1 210 000	1 331 000 000	33,1662	10,3228	7,00307	0,90909	3455,8	95 03 32	**1100**

1 100–1 150 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1100	1 210 000	1 331 000 000	33,1662	10,3228	7,00307	0,90909	3455,8	95 03 32	**1100**
1101	1 212 201	1 334 633 301	33,1813	10,3259	7,00397	0,90827	3458,9	95 20 60	1101
1102	1 214 404	1 338 273 208	33,1964	10,3291	7,00488	0,90744	3462,0	95 37 91	1102
1103	1 216 609	1 341 919 727	33,2115	10,3322	7,00579	0,90662	3465,2	95 55 22	1103
1104	1 218 816	1 345 572 864	33,2265	10,3353	7,00670	0,90580	3468,3	95 72 56	1104
1105	1 221 025	1 349 232 625	33,2415	10,3384	7,00760	0,90498	3471,5	95 89 91	1105
1106	1 223 236	1 352 899 016	33,2566	10,3415	7,00851	0,90416	3474,6	96 07 27	1106
1107	1 225 449	1 356 572 043	33,2716	10,3447	7,00941	0,90334	3477,7	96 24 65	1107
1108	1 227 664	1 360 251 712	33,2866	10,3478	7,01031	0,90253	3480,9	96 42 05	1108
1109	1 229 881	1 363 938 029	33,3017	10,3509	7,01121	0,90171	3484,0	96 59 46	1109
1110	1 232 100	1 367 631 000	33,3167	10,3540	7,01212	0,90090	3487,2	96 76 89	**1110**
1111	1 234 321	1 371 330 631	33,3317	10,3571	7,01302	0,90009	3490,3	96 94 33	1111
1112	1 236 544	1 375 036 928	33,3467	10,3602	7,01392	0,89928	3493,5	97 11 79	1112
1113	1 238 769	1 378 749 897	33,3617	10,3633	7,01481	0,89847	3496,6	97 29 27	1113
1114	1 240 996	1 382 469 544	33,3767	10,3664	7,01571	0,89767	3499,7	97 46 76	1114
1115	1 243 225	1 386 195 875	33,3917	10,3695	7,01661	0,89686	3502,9	97 64 27	1115
1116	1 245 456	1 389 928 896	33,4066	10,3726	7,01751	0,89606	3506,0	97 81 79	1116
1117	1 247 689	1 393 668 613	33,4216	10,3757	7,01840	0,89526	3509,2	97 99 33	1117
1118	1 249 924	1 397 415 032	33,4365	10,3788	7,01930	0,89445	3512,3	98 16 88	1118
1119	1 252 161	1 401 168 159	33,4515	10,3819	7,02019	0,89366	3515,4	98 34 45	1119
1120	1 254 400	1 404 928 000	33,4664	10,3850	7,02108	0,89286	3518,6	98 52 03	**1120**
1121	1 256 641	1 408 694 561	33,4814	10,3881	7,02198	0,89206	3521,7	98 69 64	1121
1122	1 258 884	1 412 467 848	33,4963	10,3912	7,02287	0,89127	3524,9	98 87 25	1122
1123	1 261 129	1 416 247 867	33,5112	10,3942	7,02376	0,89047	3528,0	99 04 88	1123
1124	1 263 376	1 420 034 624	33,5261	10,3973	7,02465	0,88968	3531,2	99 22 53	1124
1125	1 265 625	1 423 828 125	33,5410	10,4004	7,02554	0,88889	3534,3	99 40 20	1125
1126	1 267 876	1 427 628 376	33,5559	10,4034	7,02643	0,88810	3537,4	99 57 87	1126
1127	1 270 129	1 431 435 383	33,5708	10,4066	7,02731	0,88731	3540,6	99 75 57	1127
1128	1 272 384	1 435 249 152	33,5857	10,4096	7,02820	0,88652	3543,7	99 93 28	1128
1129	1 274 641	1 439 069 689	33,6006	10,4127	7,02909	0,88574	3546,9	1 00 11 01	1129
1130	1 276 900	1 442 897 000	33,6155	10,4158	7,02997	0,88496	3550,0	1 00 28 75	**1130**
1131	1 279 161	1 446 731 091	33,6303	10,4189	7,03086	0,88417	3553,1	1 00 46 51	1131
1132	1 281 424	1 450 571 968	33,6452	10,4220	7,03174	0,88339	3556,3	1 00 64 28	1132
1133	1 283 689	1 454 419 637	33,6601	10,4250	7,03262	0,88261	3559,4	1 00 82 07	1133
1134	1 285 956	1 458 274 104	33,6749	10,4281	7,03351	0,88183	3562,6	1 00 99 87	1134
1135	1 288 225	1 462 135 375	33,6898	10,4311	703439	0,88106	3565,7	1 01 17 70	1135
1136	1 290 496	1 466 003 456	33,7046	10,4342	7,03527	0,88028	3568,8	1 01 35 53	1136
1137	1 292 769	1 469 878 353	33,7194	10,4373	7,03615	0,87951	3572,0	1 01 53 38	1137
1138	1 295 044	1 473 760 072	33,7342	10,4403	7,03703	0,87874	3575,1	1 01 71 25	1138
1139	1 297 321	1 477 648 619	33,7491	10,4434	7,03791	0,87796	3578,3	1 01 89 14	1139
1140	1 299 600	1 481 544 000	33,7639	10,4464	7,03878	0,87719	3581,4	1 02 07 03	**1140**
1141	1 301 881	1 485 446 221	33,7787	10,4495	7,03966	0,87642	3584,6	1 02 24 95	1141
1142	1 304 164	1 489 355 288	33,7935	10,4525	7,04054	0,87566	3587,7	1 02 42 88	1142
1143	1 306 449	1 493 271 207	33,8083	10,4556	7,04141	0,87489	3590,8	1 02 60 83	1143
1144	1 308 736	1 497 193 984	33,8231	10,4586	7,04229	0,87413	3594,0	1 02 78 79	1144
1145	1 311 025	1 501 123 625	33,8378	10,4617	7,04316	0,87336	3597,1	1 02 96 77	1145
1146	1 313 316	1 505 060 136	33,8527	10,4647	7,04403	0,87260	3600,3	1 03 14 76	1146
1147	1 315 609	1 509 003 523	33,8673	10,4678	7,04491	0,87184	3603,4	1 03 32 77	1147
1148	1 317 904	1 512 953 792	33,8822	10,4708	7,04578	0,87108	3606,5	1 03 50 79	1148
1149	1 320 201	1 516 910 949	33,8969	10,4739	7,04665	0,87032	3609,7	1 03 68 83	1149
1150	1 322 500	1 520 875 000	33,9117	10,4769	7,04752	0,86956	3612,8	1 03 86 89	**1150**

1 150 – 1 200 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1150	1 322 500	1 520 875 000	33,9117	10,4769	7,04752	0,86956	3612,8	1 03 86 89	**1150**
1151	1 324 801	1 524 845 951	33,9264	10,4799	7,04839	0,86881	3616,0	1 04 04 96	1151
1152	1 327 104	1 528 823 808	33,9411	10,4830	7,04925	0,86806	3619,1	1 04 23 05	1152
1153	1 329 409	1 532 808 577	33,9558	10,4860	7,05012	0,86730	3622,3	1 04 41 15	1153
1154	1 331 716	1 536 800 264	33,9706	10,4890	7,05099	0,86655	3625,4	1 04 59 27	1154
1155	1 334 025	1 540 798 875	33,9853	10,4921	7,05186	0,86580	3628,5	1 04 77 41	1155
1156	1 336 336	1 544 804 416	34,0000	10,4951	7,05272	0,86505	3631,7	1 04 95 56	1156
1157	1 338 649	1 548 816 893	34,0146	10,4981	7,05359	0,86430	3634,8	1 05 13 72	1157
1158	1 340 964	1 552 836 312	34,0294	10,5011	7,05445	0,86356	3638,0	1 05 31 91	1158
1159	1 343 281	1 556 862 679	34,0440	10,5041	7,05531	0,86281	3641,1	1 05 50 10	1159
1160	1 345 600	1 560 896 000	34,0588	10,5072	7,05618	0,86207	3644,2	1 05 68 32	**1160**
1161	1 347 921	1 564 936 281	34,0735	10,5102	7,05704	0,86133	3647,4	1 05 86 55	1161
1162	1 350 244	1 568 983 528	34,0881	10,5132	7,05790	0,86059	3650,5	1 06 04 79	1162
1163	1 352 569	1 573 037 747	34,1028	10,5162	7,05876	0,85984	3653,7	1 06 23 05	1163
1164	1 354 896	1 577 098 944	34,1174	10,5192	7,05962	0,85911	3656,8	1 06 41 33	1164
1165	1 357 225	1 581 167 125	34,1321	10,5223	7,06048	0,85837	3660,0	1 06 59 62	1165
1166	1 359 556	1 585 242 296	34,1467	10,5253	7,06133	0,85763	3663,1	1 06 77 93	1166
1167	1 361 889	1 589 324 463	34 1614	10,5283	7,06219	0,85690	3666,2	1 06 96 25	1167
1168	1 364 224	1 593 413 632	34,1760	10,5313	7,06305	0,85616	3669,4	1 07 14 59	1168
1169	1 366 561	1 597 509 809	34,1907	10,5343	7,06390	0,85543	3672,5	1 07 32 94	1169
1170	1 368 900	1 601 613 000	34,2052	10,5373	7,06476	0,85470	3675,7	1 07 51 32	**1170**
1171	1 371 241	1 605 723 211	34,2199	10,5403	7,06561	0,85397	3678,8	1 07 69 70	1171
1172	1 373 584	1 609 840 448	34,2345	10,5433	7,06647	0,85324	3681,9	1 07 88 10	1172
1173	1 375 929	1 613 964 717	34,2491	10,5463	7,06732	0,85252	3685,1	1 08 06 52	1173
1174	1 378 276	1 618 096 024	34,2637	10,5493	7,06817	0,85179	3688,2	1 08 24 95	1174
1175	1 380 625	1 622 234 375	34,2783	10,5523	7,06902	0,85106	3691,4	1 08 43 40	1175
1176	1 382 976	1 626 379 776	34,2929	10,5553	7,06987	0,85034	3694,5	1 08 61 87	1176
1177	1 385 329	1 630 532 233	34,3074	10,5582	7,07072	0,84962	3697,7	1 08 80 35	1177
1178	1 387 684	1 634 691 752	34,3220	10,5612	7,07157	0,84890	3700,8	1 08 98 84	1178
1179	1 390 041	1 638 858 339	34,3366	10,5642	7,07242	0,84818	3703,9	1 09 17 36	1179
1180	1 392 400	1 643 032 000	34,3512	10,5672	7,07327	0,84746	3707,1	1 09 35 88	**1180**
1181	1 394 761	1 647 212 741	34,3657	10,5702	7,07412	0,84674	3710,2	1 09 54 43	1181
1182	1 397 124	1 651 400 568	34,3802	10,5732	7,07496	0,84602	3713,4	1 09 72 99	1182
1183	1 399 489	1 655 595 487	34,3948	10,5762	7,07581	0,84531	3716,5	1 09 91 56	1183
1184	1 401 856	1 659 797 504	34,4093	10,5791	7,07665	0,84459	3719,6	1 10 10 15	1184
1185	1 404 225	1 664 006 625	34,4238	10,5821	7,07750	0,84388	3722,8	1 10 28 76	1185
1186	1 406 596	1 668 222 856	34,4383	10,5851	7,07834	0,84317	3725,9	1 10 47 38	1186
1187	1 408 969	1 672 446 203	34,4529	10,5881	7,07918	0,84246	3729,1	1 10 66 02	1187
1188	1 411 344	1 676 676 672	34,4674	10,5910	7,08003	0,84175	3732,2	1 10 84 67	1188
1189	1 413 721	1 680 914 269	34,4819	10,5940	7,08087	0,84104	3735,4	1 11 03 34	1189
1190	1 416 100	1 685 159 000	34,4964	10,5970	7,08171	0,84034	3738,5	1 11 22 02	**1190**
1191	1 418 481	1 689 410 871	34,5108	10,6000	7,08255	0,83963	3741,6	1 11 40 72	1191
1192	1 420 864	1 693 669 888	34,5253	10,6029	7,08339	0,83893	3744,8	1 11 59 44	1192
1193	1 423 249	1 697 936 057	34,5398	10,6059	7,08423	0,83822	3747,9	1 11 78 17	1193
1194	1 425 636	1 702 209 384	34,5543	10,6089	7,08506	0,83752	3751,1	1 11 96 92	1194
1195	1 428 025	1 706 489 875	34,5688	10,6118	7,08590	0,83682	3754,2	1 12 15 68	1195
1196	1 430 416	1 710 777 536	34,5832	10,6148	7,08674	0,83612	3757,3	1 12 34 46	1196
1197	1 432 809	1 715 072 373	34,5977	10,6177	7,08757	0,83542	3760,5	1 12 53 26	1197
1198	1 435 204	1 719 374 392	34,6121	10,6207	7,08841	0,83472	3763,6	1 12 72 07	1198
1199	1 437 601	1 723 683 599	34,6266	10,6236	7,08924	0,83403	3766,8	1 12 90 89	1199
1200	1 440 000	1 728 000 000	34,6410	10,6266	7,09008	0,83333	3769,9	1 13 09 73	**1200**

1 200—1 250

Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1200	1 440 000	1 728 000 000	34,6410	10,6266	7,09008	0,83333	3769,9	1 13 09 73	**1200**
1201	1 442 401	1 732 323 601	34,6555	10,6295	7,09091	0,83264	3773,1	1 13 28 59	1201
1202	1 444 804	1 736 654 408	34,6698	10,6325	7,09174	0,83195	3776,2	1 13 47 46	1202
1203	1 447 209	1 740 992 427	34,6843	10,6354	7,09257	0,83125	3779,3	1 13 66 35	1203
1204	1 449 616	1 745 337 664	34,6987	10,6384	7,09340	0,83056	3782,5	1 13 85 26	1204
1205	1 452 025	1 749 690 125	34,7131	10,6413	7,09423	0,82988	3785,6	1 14 04 18	1205
1206	1 454 436	1 754 049 816	34,7275	10,6443	7,09506	0,82919	3788,8	1 14 23 11	1206
1207	1 456 849	1 758 416 743	34,7419	10,6472	7,09589	0,82850	3791,9	1 14 42 07	1207
1208	1 459 264	1 762 790 912	34,7563	10,6501	7,09672	0,82781	3795,0	1 14 61 03	1208
1209	1 461 681	1 767 172 329	34,7707	10,6531	7,09755	0,82713	3798,2	1 14 80 02	1209
1210	1 464 100	1 771 561 000	34,7850	10,6560	7,09838	0,82645	3801,3	1 14 99 01	**1210**
1211	1 466 521	1 775 956 931	34,7994	10,6590	7,09920	0,82576	3804,5	1 15 18 03	1211
1212	1 468 944	1 780 360 128	34,8138	10,6619	7,10003	0,82508	3807,6	1 15 37 06	1212
1213	1 471 369	1 784 770 597	34,8281	10,6648	7,10085	0,82440	3810,8	1 15 56 11	1213
1214	1 473 796	1 789 188 344	34,8425	10,6678	7,10168	0,82372	3813,9	1 15 75 17	1214
1215	1 476 225	1 793 613 375	34,8568	10,6707	7,10250	0,82305	3817,0	1 15 94 24	1215
1216	1 478 656	1 798 045 696	34,8712	10,6736	7,10332	0,82237	3820,2	1 16 13 34	1216
1217	1 481 089	1 802 485 313	34,8855	10,6765	7,10414	0,82169	3823,3	1 16 32 45	1217
1218	1 483 524	1 806 932 232	34,8999	10,6795	7,10497	0,82102	3826,5	1 16 51 57	1218
1219	1 485 961	1 811 386 459	34,9142	10,6824	7,10579	0,82034	3829,6	1 16 70 71	1219
1220	1 488 400	1 815 848 000	34,9285	10,6853	7,10661	0,81967	3832,7	1 16 89 87	**1220**
1221	1 490 841	1 820 316 861	34,9428	10,6882	7,10743	0,81900	3835,9	1 17 09 04	1221
1222	1 493 284	1 824 793 048	34,9571	10,6911	7,10824	0,81833	3839,0	1 17 28 23	1222
1223	1 495 729	1 829 276 567	34,9714	10,6940	7,10906	0,81766	3842,2	1 17 47 43	1223
1224	1 498 176	1 833 767 424	34,9857	10,6970	7,10988	0,81699	3845,3	1 17 66 65	1224
1225	1 500 625	1 838 265 625	35,0000	10,6999	7,11070	0,81633	3848,5	1 17 85 88	1225
1226	1 503 076	1 842 771 176	35,0142	10,7028	7,11151	0,81566	3851,6	1 18 05 13	1226
1227	1 505 529	1 847 284 083	35,0286	10,7057	7,11233	0,81500	3854,7	1 18 24 40	1227
1228	1 507 984	1 851 804 352	35,0428	10,7086	7,11314	0,81433	3857,9	1 18 43 68	1228
1229	1 510 441	1 856 331 989	35,0571	10,7115	7,11396	0,81367	3861,0	1 18 62 98	1229
1230	1 512 900	1 860 867 000	35,0713	10,7144	7,11477	0,81301	3864,2	1 18 82 29	**1230**
1231	1 515 361	1 865 409 391	35,0856	10,7173	7,11558	0,81235	3867,3	1 19 01 62	1231
1232	1 517 824	1 869 959 168	35,0999	10,7202	7,11639	0,81169	3870,4	1 19 20 96	1232
1233	1 520 289	1 874 516 337	35,1141	10,7231	7,11721	0,81103	3873,6	1 19 40 32	1233
1234	1 522 756	1 879 080 904	35,1283	10,7260	7,11802	0,81037	3876,7	1 19 59 70	1234
1235	1 525 225	1 883 652 875	35,1426	10,7289	7,11883	0,80972	3879,9	1 19 79 09	1235
1236	1 527 696	1 888 232 256	35,1568	10,7318	7,11964	0,80906	3883,0	1 19 98 50	1236
1237	1 530 169	1 892 819 053	35,1710	10,7347	7,12044	0,80841	3886,2	1 20 17 92	1237
1238	1 532 644	1 897 413 272	35,1852	10,7376	7,12125	0,80775	3889,3	1 20 37 36	1238
1239	1 535 121	1 902 014 919	35,1994	10,7405	7,12206	0,80710	3892,4	1 20 56 81	1239
1240	1 537 600	1 906 624 000	35,2137	10,7434	7,12287	0,80645	3895,6	1 20 76 28	**1240**
1241	1 540 081	1 911 240 521	35,2278	10,7463	7,12367	0,80580	3898,7	1 20 95 77	1241
1242	1 542 564	1 915 864 488	35,2420	10,7491	7,12448	0,80515	3901,9	1 21 15 27	1242
1243	1 545 049	1 920 495 907	35,2562	10,7520	7,12528	0,80451	3905,0	1 21 34 79	1243
1244	1 547 536	1 925 134 784	35,2704	10,7549	7,12609	0,80386	3908,1	1 21 54 32	1244
1245	1 550 025	1 929 781 125	35,2845	10,7578	7,12689	0,80321	3911,3	1 21 73 87	1245
1246	1 552 516	1 934 434 936	35,2987	10,7607	7,12769	0,80257	3914,4	1 21 93 43	1246
1247	1 555 009	1 939 096 223	35,3128	10,7635	7,12850	0,80192	3917,6	1 22 13 01	1247
1248	1 557 504	1 943 764 992	35,3270	10,7664	7,12930	0,80128	3920,7	1 22 32 61	1248
1249	1 560 001	1 948 441 249	35,3412	10,7693	7,13010	0,80064	3923,8	1 22 52 22	1249
1250	1 562 500	1 953 125 000	35,3553	10,7722	7,13090	0,80000	3927,0	1 22 71 85	**1250**

1 250–1 300 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1250	1 562 500	1 953 125 000	35,3553	10,7722	7,13090	0,80000	3927,0	1 22 71 85	**1250**
1251	1 565 001	1 957 816 251	35,3695	10,7750	7,13170	0,79936	3930,1	1 22 91 49	1251
1252	1 567 504	1 962 515 008	35,3836	10,7779	7,13250	0,79872	3933,3	1 23 11 15	1252
1253	1 570 009	1 967 221 277	35,3977	10,7808	7,13330	0,79808	3936,4	1 23 30 82	1253
1254	1 572 516	1 971 935 064	35,4119	10,7836	7,13409	0,79745	3939,6	1 23 50 51	1254
1255	1 575 025	1 976 656 375	35,4260	10,7865	7,13489	0,79681	3942,7	1 23 70 22	1255
1256	1 577 536	1 981 385 216	35,4401	10,7894	7,13569	0,79618	3945,8	1 23 89 94	1256
1257	1 580 049	1 986 121 593	35,4542	10,7922	7,13648	0,79555	3949,0	1 24 09 68	1257
1258	1 582 564	1 990 865 512	35,4683	10,7951	7,13728	0,79491	3952,1	1 24 29 43	1258
1259	1 585 081	1 995 616 979	35,4824	10,7980	7,13807	0,79428	3955,3	1 24 49 20	1259
1260	1 587 600	2 000 376 000	35,4965	10,8008	7,13887	0,79365	3958,4	1 24 68 98	**1260**
1261	1 590 121	2 005 142 581	35,5105	10,8037	7,13966	0,79302	3961,5	1 24 88 78	1261
1262	1 592 644	2 009 916 728	35,5246	10,8065	7,14045	0,79239	3964,7	1 25 08 60	1262
1263	1 595 169	2 014 698 447	35,5387	10,8094	7,14125	0,79177	3967,8	1 25 28 43	1263
1264	1 597 696	2 019 487 744	35,5528	10,8122	7,14204	0,79114	3971,0	1 25 48 28	1264
1265	1 600 225	2 024 284 625	35,5669	10,8151	7,14283	0,79051	3974,1	1 25 68 14	1265
1266	1 602 756	2 029 089 096	35,5809	10,8179	7,14362	0,78989	3977,3	1 25 88 02	1266
1267	1 605 289	2 033 901 163	35,5950	10,8208	7,14441	0,78927	3980,4	1 26 07 91	1267
1268	1 607 824	2 038 720 832	35,6090	10,8236	7,14520	0,78864	3983,5	1 26 27 82	1268
1269	1 610 361	2 043 548 109	35,6231	10,8265	7,14598	0,78802	3986,7	1 26 47 75	1269
1270	1 612 900	2 048 383 000	35,6371	10,8293	7,14677	0,78740	3989,8	1 26 67 69	**1270**
1271	1 615 441	2 053 225 511	35,6511	10,8322	7,14756	0,78678	3993,0	1 26 87 64	1271
1272	1 617 984	2 058 075 648	35,6651	10,8350	7,14835	0,78616	3996,1	1 27 07 62	1272
1273	1 620 529	2 062 933 417	35,6791	10,8378	7,14913	0,78555	3999,2	1 27 27 61	1273
1274	1 623 076	2 067 798 824	35,6931	10,8407	7,14992	0,78493	4002,4	1 27 47 61	1274
1275	1 625 625	2 072 671 875	35,7072	10,8435	7,15070	0,78431	4005,5	1 27 67 63	1275
1276	1 628 176	2 077 552 576	35,7211	10,8463	7,15149	0,78370	4008,7	1 27 87 66	1276
1277	1 630 729	2 082 440 933	35,7351	10,8491	7,15227	0,78309	4011,8	1 28 07 72	1277
1278	1 633 284	2 087 336 952	35,7491	10,8520	7,15305	0,78247	4015,0	1 28 27 78	1278
1279	1 635 841	2 092 240 639	35,7631	10,8548	7,15383	0,78186	4018,1	1 28 47 87	1279
1280	1 638 400	2 097 152 000	35,7771	10,8577	7,15462	0,78125	4021,2	1 28 67 96	**1280**
1281	1 640 961	2 102 071 041	35,7910	10,8605	7,15540	0,78064	4024,4	1 28 88 08	1281
1282	1 643 524	2 106 997 768	35,8050	10,8633	7,15618	0,78003	4027,5	1 29 08 21	1282
1283	1 646 089	2 111 932 187	35,8190	10,8661	7,15696	0,77942	4030,7	1 29 28 35	1283
1284	1 648 656	2 116 874 304	35,8330	10,8690	7,15774	0,77882	4033,8	1 29 48 51	1284
1285	1 651 225	2 121 824 125	35,8469	10,8718	7,15851	0,77821	4036,9	1 29 68 69	1285
1286	1 653 796	2 126 781 656	35,8609	10,8746	7,15929	0,77760	4040,1	1 29 88 88	1286
1287	1 656 369	2 131 746 903	35,8748	10,8774	7,16007	0,77700	4043,2	1 30 09 09	1287
1288	1 658 944	2 136 719 872	35,8888	10,8802	7,16085	0,77640	4046,4	1 30 29 32	1288
1289	1 661 521	2 141 700 569	35,9026	10,8830	7,16162	0,77580	4049,5	1 30 49 56	1289
1290	1 664 100	2 146 689 000	35,9166	10,8859	7,16240	0,77519	4052,7	1 30 69 81	**1290**
1291	1 666 681	2 151 685 171	35 9305	10,8887	7,16317	0,77459	4055,8	1 30 90 08	1291
1292	1 669 264	2 156 689 088	35,9445	10,8915	7,16395	0,77399	4058,9	1 31 10 37	1292
1293	1 671 849	2 161 700 757	35,9583	10,8943	7,16472	0,77340	4062,1	1 31 30 67	1293
1294	1 674 436	2 166 720 184	35,9722	10,8971	7,16549	0,77280	4065,2	1 31 50 99	1294
1295	1 677 025	2 171 747 375	35,9861	10,8999	7,16627	0,77220	4068,4	1 31 71 32	1295
1296	1 679 616	2 176 782 336	36,0000	10,9027	7,16704	0,77160	4071,5	1 31 91 67	1296
1297	1 682 209	2 181 825 073	36,0139	10,9055	7,16781	0,77101	4074,6	1 32 12 04	1297
1298	1 684 804	2 186 875 592	36,0278	10,9083	7,16858	0,77042	4077,8	1 32 32 42	1298
1299	1 687 401	2 191 933 899	36,0416	10,9111	7,16935	0,76982	4080,9	1 32 52 82	1299
1300	1 690 000	2 197 000 000	36,0555	10,9139	7,17012	0,76923	4084,1	1 32 73 23	**1300**

1 300–1 350 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1300	1 690 000	2 197 000 000	36,0555	10,9139	7,17012	0,76923	4084,1	1 32 73 23	**1300**
1301	1 692 601	2 202 073 901	36,0693	10,9167	7,17089	0,76864	4087,2	1 32 93 66	1301
1302	1 695 204	2 207 155 608	36,0832	10,9195	7,17166	0,76805	4090,4	1 33 14 10	1302
1303	1 697 809	2 212 245 127	36,0971	10,9223	7,17242	0,76746	4093,5	1 33 34 56	1303
1304	1 700 416	2 217 342 464	36,1109	10,9252	7,17319	0,76687	4096,6	1 33 55 04	1304
1305	1 703 025	2 222 447 625	36,1248	10,9279	7,17396	0,76628	4099,8	1 33 75 53	1305
1306	1 705 636	2 227 560 616	36,1386	10,9307	7,17472	0,76570	4102,9	1 33 96 03	1306
1307	1 708 249	2 232 681 443	36,1525	10,9335	7,17549	0,76511	4106,1	1 34 16 56	1307
1308	1 710 864	2 237 810 112	36,1663	10,9363	7,17625	0,76453	4109,2	1 34 37 09	1308
1309	1 713 481	2 242 946 629	36,1801	10,9390	7,17702	0,76394	4112,3	1 34 57 65	1309
1310	1 716 100	2 248 091 000	36,1939	10,9418	7,17778	0,76336	4115,5	1 34 78 22	**1310**
1311	1 718 721	2 253 243 231	36,2077	10,9446	7,17855	0,76278	4118,6	1 34 98 80	1311
1312	1 721 344	2 258 403 328	36,2216	10,9474	7,17931	0,76220	4121,8	1 35 19 40	1312
1313	1 723 969	2 263 571 297	36,2354	10,9502	7,18007	0,76161	4124,9	1 35 40 02	1313
1314	1 726 596	2 268 747 144	36,2491	10,9530	7,18083	0,76104	4128,1	1 35 60 65	1314
1315	1 729 225	2 273 930 875	36,2629	10,9557	7,18159	0,76046	4131,2	1 35 81 30	1315
1316	1 731 856	2 279 122 496	36,2767	10,9585	7,18235	0,75988	4134,3	1 36 01 97	1316
1317	1 734 489	2 284 322 013	36,2905	10,9613	7,18311	0,75930	4137,5	1 36 22 64	1317
1318	1 737 124	2 289 529 432	36,3043	10,9641	7,18387	0,75873	4140,6	1 36 43 34	1318
1319	1 739 761	2 294 744 759	36,3180	10,9668	7,18463	0,75815	4143,8	1 36 64 05	1319
1320	1 742 400	2 299 968 000	36,3318	10,9696	7,18539	0,75758	4146,9	1 36 84 78	**1320**
1321	1 745 041	2 305 199 161	36,3455	10,9724	7,18614	0,75700	4150,0	1 37 05 52	1321
1322	1 747 684	2 310 438 248	36,3593	10,9751	7,18690	0,75643	4153,2	1 37 26 28	1322
1323	1 750 329	2 315 685 267	36,3731	10,9779	7,18766	0,75586	4156,3	1 37 47 05	1323
1324	1 752 976	2 320 940 224	36,3868	10,9807	7,18841	0,75529	4159,5	1 37 67 84	1324
1325	1 755 625	2 326 203 125	36,4006	10,9834	7,18917	0,75472	4162,6	1 37 88 65	1325
1326	1 758 276	2 331 473 976	36,4143	10,9862	7,18992	0,75415	4165,8	1 38 09 47	1326
1327	1 760 929	2 336 752 783	36,4280	10,9890	7,19068	0,75358	4168,9	1 38 30 30	1327
1328	1 763 584	2 342 039 552	36,4417	10,9917	7,19143	0,75301	4172,0	1 38 51 16	1328
1329	1 766 241	2 347 334 289	36,4555	10,9945	7,19218	0,75245	4175,2	1 38 72 02	1329
1330	1 768 900	2 352 637 000	36,4692	10,9972	7,19293	0,75188	4178,3	1 38 92 91	**1330**
1331	1 771 561	2 357 947 691	36,4828	11,0000	7,19369	0,75131	4181,5	1 39 13 81	1331
1332	1 774 224	2 363 266 368	36,4966	11,0027	7,19444	0,75075	4184,6	1 39 34 72	1332
1333	1 776 889	2 368 593 037	36,5103	11,0055	7,19519	0,75019	4187,7	1 39 55 65	1333
1334	1 779 556	2 373 927 704	36,5240	11,0083	7,19594	0,74963	4190,9	1 39 76 60	1334
1335	1 782 225	2 379 270 375	36,5376	11,0110	7,19669	0,74906	4194,0	1 39 97 56	1335
1336	1 784 896	2 384 621 056	36,5513	11,0138	7,19744	0,74850	4197,2	1 40 18 54	1336
1337	1 787 569	2 389 979 753	36,5650	11,0165	7,19818	0,74794	4200,3	1 40 39 53	1337
1338	1 790 244	2 395 346 472	36,5787	11,0193	7,19893	0,74738	4203,5	1 40 60 54	1338
1339	1 792 921	2 400 721 219	36,5924	11,0220	7,19968	0,74683	4206,6	1 40 81 57	1339
1340	1 795 600	2 406 104 000	36,6060	11,0247	7,20042	0,74627	4209,7	1 41 02 61	**1340**
1341	1 798 281	2 411 494 821	36,6197	11,0275	7,20117	0,74571	4212,9	1 41 23 67	1341
1342	1 800 964	2 416 893 688	36,6334	11,0302	7,20192	0,74516	4216,0	1 41 44 74	1342
1343	1 803 649	2 422 300 607	36,6470	11,0330	7,20266	0,74460	4219,2	1 41 65 83	1343
1344	1 806 336	2 427 715 584	36,6606	11,0357	7,20341	0,74405	4222,3	1 41 86 93	1344
1345	1 809 025	2 433 138 625	36,6742	11,0384	7,20415	0,74349	4225,4	1 42 08 05	1345
1346	1 811 716	2 438 569 736	36,6879	11,0412	7,20489	0,74294	4228,6	1 42 29 18	1346
1347	1 814 409	2 444 008 923	36,7015	11,0439	7,20564	0,74239	4231,7	1 42 50 33	1347
1348	1 817 104	2 449 456 192	36,7151	11,0466	7,20638	0,74184	4234,9	1 42 71 50	1348
1349	1 819 801	2 454 911 549	36,7287	11,0494	7,20712	0,74129	4238,0	1 42 92 68	1349
1350	1 822 500	2 460 375 000	36,7423	11,0521	7,20786	0,74074	4241,2	1 43 13 88	**1350**

1 350–1 400 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1350	1 822 500	2 460 375 000	36,7423	11,0521	7,20786	0,74074	4241,2	1 43 13 88	**1350**
1351	1 825 201	2 465 846 551	36,7560	11,0548	7,20860	0,74019	4244,3	1 43 35 10	1351
1352	1 827 904	2 471 326 208	36,7695	11,0575	7,20934	0,73965	4247,4	1 43 56 32	1352
1353	1 830 609	2 476 813 977	36,7832	11,0603	7,21008	0,73910	4250,6	1 43 77 57	1353
1354	1 833 316	2 482 309 864	36,7968	11,0630	7,21082	0,73855	4253,7	1 43 98 83	1354
1355	1 836 025	2 487 813 875	36,8103	11,0657	7,21156	0,73801	4256,9	1 44 20 11	1355
1356	1 838 736	2 493 326 016	36,8239	11,0684	7,21229	0,73747	4260,0	1 44 41 40	1356
1357	1 841 449	2 498 846 293	36,8375	11,0712	7,21303	0,73692	4263,1	1 44 62 71	1357
1358	1 844 164	2 504 374 712	36,8511	11,0739	7,21377	0,73638	4266,3	1 44 84 03	1358
1359	1 846 881	2 509 911 279	36,8646	11,0766	7,21450	0,73584	4269,4	1 45 05 37	1359
1360	1 849 600	2 515 456 000	36,8782	11,0793	7,21524	0,73529	4272,6	1 45 26 72	**1360**
1361	1 852 321	2 521 008 881	36,8917	11,0820	7,21598	0,73475	4275,7	1 45 48 10	1361
1362	1 855 044	2 526 569 928	36,9053	11,0847	7,21671	0,73421	4278,8	1 45 69 48	1362
1363	1 857 769	2 532 139 147	36,9188	11,0875	7,21744	0,73368	4282,0	1 45 90 88	1363
1364	1 860 496	2 537 716 544	36,9323	11,0902	7,21818	0,73314	4285,1	1 46 12 30	1364
1365	1 863 225	2 543 302 125	36,9460	11,0929	7,21891	0,73260	4288,3	1 46 33 73	1365
1366	1 865 956	2 548 895 896	36,9595	11,0956	7,21964	0,73206	4291,4	1 46 55 18	1366
1367	1 868 689	2 554 497 863	36,9730	11,0983	7,22037	0,73153	4294,6	1 46 76 65	1367
1368	1 871 424	2 560 108 032	36,9865	11,1010	7,22111	0,73099	4297,7	1 46 98 13	1368
1369	1 874 161	2 565 726 409	37,0000	11,1037	7,22184	0,73046	4300,8	1 47 19 63	1369
1370	1 876 900	2 571 353 000	37,0135	11,1064	7,22257	0,72993	4304,0	1 47 41 14	**1370**
1371	1 879 641	2 576 987 811	37,0270	11,1091	7,22330	0,72939	4307,1	1 47 62 67	1371
1372	1 882 384	2 582 630 848	37,0405	11,1118	7,22402	0,72886	4310,3	1 47 84 21	1372
1373	1 885 129	2 588 282 117	37,0540	11,1145	7,22475	0,72833	4313,4	1 48 05 77	1373
1374	1 887 876	2 593 941 624	37,0675	11,1172	7,22548	0,72780	4316,5	1 48 27 34	1374
1375	1 890 625	2 599 609 375	37,0810	11,1199	7,22621	0,72727	4319,7	1 48 48 93	1375
1376	1 893 376	2 605 285 376	37,0945	11,1226	7,22694	0,72674	4322,8	1 48 70 54	1376
1377	1 896 129	2 610 969 633	37,1079	11,1253	7,22766	0,72622	4326,0	1 48 92 16	1377
1378	1 898 884	2 616 662 152	37,1214	11,1280	7,22839	0,72569	4329,1	1 49 13 80	1378
1379	1 901 641	2 622 362 939	37,1349	11,1307	7,22911	0,72516	4332,3	1 49 35 45	1379
1380	1 904 400	2 628 072 000	37,1484	11,1334	7,22984	0,72464	4335,4	1 49 57 12	**1380**
1381	1 907 161	2 633 789 341	37,1618	11,1361	7,23056	0,72411	4338,5	1 49 78 81	1381
1382	1 909 924	2 639 514 968	37,1753	11,1387	7,23129	0,72359	4341,7	1 50 00 51	1382
1383	1 912 689	2 645 248 887	37,1887	11,1414	7,23201	0,72307	4344,8	1 50 22 22	1383
1384	1 915 456	2 650 991 104	37,2022	11,1441	7,23273	0,72254	4348,0	1 50 43 96	1384
1385	1 918 225	2 656 741 625	37,2156	11,1468	7,23346	0,72202	4351,1	1 50 65 70	1385
1386	1 920 996	2 662 500 456	37,2290	11,1495	7,23418	0,72150	4354,2	1 50 87 47	1386
1387	1 923 769	2 668 267 603	37,2424	11,1522	7,23490	0,72098	4357,4	1 51 09 25	1387
1388	1 926 544	2 674 043 072	37,2559	11,1548	7,23562	0,72046	4360,5	1 51 31 04	1388
1389	1 929 321	2 679 826 869	37,2693	11,1575	7,23634	0,71994	4363,7	1 51 52 85	1389
1390	1 932 100	2 685 619 000	37,2827	11,1602	7,23706	0,71942	4366,8	1 51 74 68	**1390**
1391	1 934 881	2 691 419 471	37,2961	11,1629	7,23778	0,71891	4370,0	1 51 96 52	1391
1392	1 937 664	2 697 228 288	37,3095	11,1655	7,23850	0,71839	4373,1	1 52 18 38	1392
1393	1 940 449	2 703 045 457	37,3229	11,1682	7,23921	0,71787	4376,2	1 52 40 25	1393
1394	1 943 236	2 708 870 984	37,3363	11,1709	7,23993	0,71736	4379,4	1 52 62 14	1394
1395	1 946 025	2 714 704 875	37,3497	11,1735	7,24065	0,71685	4382,5	1 52 84 04	1395
1396	1 948 816	2 720 547 136	37,3630	11,1762	7,24137	0,71633	4385,7	1 53 05 97	1396
1397	1 951 609	2 726 397 773	37,3765	11,1789	7,24208	0,71582	4388,8	1 53 27 90	1397
1398	1 954 404	2 732 256 792	37,3899	11,1816	7,24280	0,71531	4391,9	1 53 49 85	1398
1399	1 957 201	2 738 124 199	37,4032	11,1842	7,24351	0,71480	4395,1	1 53 71 82	1399
1400	1 960 000	2 744 000 000	37,4166	11,1869	7,24423	0,71429	4398,2	1 53 93 80	**1400**

1 400—1 450 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1400	1 960 000	2 744 000 000	37,4166	11,1869	7,24423	0,71429	4398,2	1 53 93 80	**1400**
1401	1 962 801	2 749 884 201	37,4299	11,1896	7,24494	0,71378	4401,4	1 54 15 80	1401
1402	1 965 604	2 755 776 808	37,4433	11,1922	7,24566	0,71327	4404,5	1 54 37 82	1402
1403	1 968 409	2 761 677 827	37,4567	11,1949	7,24637	0,71276	4407,7	1 54 59 85	1403
1404	1 971 216	2 767 587 264	37,4700	11,1975	7,24708	0,71225	4410,8	1 54 81 89	1404
1405	1 974 025	2 773 505 125	37,4833	11,2002	7,24779	0,71174	4413,9	1 55 03 96	1405
1406	1 976 836	2 779 431 416	37,4966	11,2028	7,24850	0,71124	4417,1	1 55 26 03	1406
1407	1 979 649	2 785 366 143	37,5100	11,2055	7,24922	0,71073	4420,2	1 55 48 13	1407
1408	1 982 464	2 791 309 312	37,5233	11,2082	7,24993	0,71023	4423,4	1 55 70 24	1408
1409	1 985 281	2 797 260 929	37,5366	11,2108	7,25064	0,70972	4426,5	1 55 92 36	1409
1410	1 988 100	2 803 221 000	37,5500	11,2135	7,25134	0,70922	4429,6	1 56 14 50	**1410**
1411	1 990 921	2 809 189 531	37,5633	11,2161	7,25205	0,70872	4432,8	1 56 36 66	1411
1412	1 993 744	2 815 166 528	37,5766	11,2188	7,25276	0,70822	4435,9	1 56 58 83	1412
1413	1 996 569	2 821 151 997	37,5899	11,2214	7,25347	0,70771	4439,1	1 56 81 02	1413
1414	1 999 396	2 827 145 944	37,6032	11,2240	7,25418	0,70721	4442,2	1 57 03 22	1414
1415	2 002 225	2 833 148 375	37,6165	11,2267	7,25488	0,70671	4445,4	1 57 25 44	1415
1416	2 005 056	2 839 159 296	37,6298	11,2293	7,25559	0,70621	4448,5	1 57 47 67	1416
1417	2 007 889	2 845 178 713	37,6431	11,2320	7,25630	0,70572	4451,6	1 57 69 92	1417
1418	2 010 724	2 851 206 632	37,6563	11,2346	7,25700	0,70522	4454,8	1 57 92 19	1418
1419	2 013 561	2 857 243 059	37,6696	11,2373	7,25771	0,70472	4457,9	1 58 14 47	1419
1420	2 016 400	2 863 288 000	37,6829	11,2399	7,25841	0,70423	4461,1	1 58 36 77	**1420**
1421	2 019 241	2 869 341 461	37,6962	11,2425	7,25912	0,70373	4464,2	1 58 59 08	1421
1422	2 022 084	2 875 403 448	37,7094	11,2452	7,25982	0,70323	4467,3	1 58 81 41	1422
1423	2 024 929	2 881 473 967	37,7227	11,2478	7,26052	0,70274	4470,5	1 59 03 76	1423
1424	2 027 776	2 887 553 024	37,7359	11,2504	7,26123	0,70225	4473,6	1 59 26 12	1424
1425	2 030 625	2 893 640 625	37,7492	11,2531	7,26193	0,70175	4476,8	1 59 48 49	1425
1426	2 033 476	2 899 736 776	37,7625	11,2557	7,26263	0,70126	4479,9	1 59 70 88	1426
1427	2 036 329	2 905 841 483	37,7757	11,2584	7,26333	0,70077	4483,1	1 59 93 29	1427
1428	2 039 184	2 911 954 752	37,7889	11,2610	7,26403	0,70028	4486,2	1 60 15 71	1428
1429	2 042 041	2 918 076 589	37,8021	11,2636	7,26473	0,69979	4489,3	1 60 38 15	1429
1430	2 044 900	2 924 207 000	37,8153	11,2662	7,26543	0,69930	4492,5	1 60 60 61	**1430**
1431	2 047 761	2 930 345 991	37,8286	11,2689	7,26613	0,69881	4495,6	1 60 83 08	1431
1432	2 050 624	2 936 493 568	37,8418	11,2715	7,26683	0,69832	4498,8	1 61 05 56	1432
1433	2 053 489	2 942 649 737	37,8550	11,2741	7,26753	0,69784	4501,9	1 61 28 06	1433
1434	2 056 356	2 948 814 504	37,8682	11,2767	7,26822	0,69735	4505,0	1 61 50 58	1434
1435	2 059 225	2 954 987 875	37,8814	11,2793	7,26892	0,69686	4508,2	1 61 73 12	1435
1436	2 062 096	2 961 169 856	37,8946	11,2820	7,26962	0,69638	4511,3	1 61 95 66	1436
1437	2 064 969	2 967 360 453	37,9078	11,2846	7,27031	0,69589	4514,5	1 62 18 23	1437
1438	2 067 844	2 973 559 672	37,9210	11,2872	7,27101	0,69541	4517,6	1 62 40 81	1438
1439	2 070 721	2 979 767 519	37,9341	11,2898	7,27170	0,69493	4520,8	1 62 63 40	1439
1440	2 073 600	2 985 984 000	37,9473	11,2924	7,27240	0,69444	4523,9	1 62 86 02	**1440**
1441	2 076 481	2 992 209 121	37,9605	11,2951	7,27309	0,69396	4527,0	1 63 08 64	1441
1442	2 079 364	2 998 442 888	37,9737	11,2976	7,27379	0,69348	4530,2	1 63 31 29	1442
1443	2 082 249	3 004 685 307	37,9868	11,3002	7,27448	0,69300	4533,3	1 63 53 95	1443
1444	2 085 136	3 010 936 384	38,0000	11,3029	7,27517	0,69252	4536,5	1 63 76 62	1444
1445	2 088 025	3 017 196 125	38,0132	11,3055	7,27586	0,69204	4539,6	1 63 99 31	1445
1446	2 090 916	3 023 464 536	38,0263	11,3081	7,27656	0,69156	4542,7	1 64 22 02	1446
1447	2 093 809	3 029 741 623	38,0395	11,3107	7,27725	0,69109	4545,9	1 64 44 74	1447
1448	2 096 704	3 036 027 392	38,0526	11,3133	7,27794	0,69061	4549,0	1 64 67 47	1448
1449	2 099 601	3 042 321 849	38,0657	11,3159	7,27863	0,69013	4552,2	1 64 90 23	1449
1450	2 102 500	3 048 625 000	38,0788	11,3185	7,27932	0,68966	4555,3	1 65 13 00	**1450**

1 450 – 1 500 Tabela 1.9 (*continuare*)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1}{n}10^3$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1450	2 102 500	3 048 625 000	38,0788	11,3185	7,27932	0,68966	4555,3	1 65 13 00	**1450**
1451	2 105 401	3 054 936 851	38,0920	11,3211	7,28001	0,68918	4558,5	1 65 35 78	1451
1452	2 108 304	3 061 257 408	38,1051	11,3237	7,28070	0,68871	4561,6	1 65 58 58	1452
1453	2 111 209	3 067 586 677	38,1183	11,3263	7,28139	0,68823	4564,7	1 65 81 40	1453
1454	2 114 116	3 073 924 664	38,1313	11,3289	7,28207	0,68776	4567,9	1 66 04 23	1454
1455	2 117 025	3 080 271 375	38,1445	11,3315	7,28276	0,68729	4571,0	1 66 27 08	1455
1456	2 119 936	3 086 626 816	38,1575	11,3341	7,28345	0,68681	4574,2	1 66 49 94	1456
1457	2 122 849	3 092 990 993	38,1707	11,3367	7,28413	0,68634	4577,3	1 66 72 82	1457
1458	2 125 764	3 099 363 912	38,1838	11,3393	7,28482	0,68587	4580,4	1 66 95 71	1458
1459	2 128 681	3 105 745 579	38,1969	11,3419	7,28551	0,68540	4583,6	1 67 18 62	1459
1460	2 131 600	3 112 136 000	38,2100	11,3445	7,28619	0,68493	4586,7	1 67 41 55	**1460**
1461	2 134 521	3 118 535 181	38,2230	11,3471	7,28688	0,68446	4589,9	1 67 64 49	1461
1462	2 137 444	3 124 943 128	38,2361	11,3496	7,28756	0,68399	4593,0	1 67 87 45	1462
1463	2 140 369	3 131 359 847	38,2492	11,3522	7,28824	0,68353	4596,2	1 68 10 42	1463
1464	2 143 296	3 137 785 344	38,2622	11,3548	7,28893	0,68306	4599,3	1 68 33 41	1464
1465	2 146 225	3 144 219 625	38,2753	11,3574	7,28961	0,68259	4602,4	1 68 56 41	1465
1466	2 149 156	3 150 662 696	38,2884	11,3600	7,29029	0,68213	4605,6	1 68 79 43	1466
1467	2 152 089	3 157 114 563	38,3015	11,3626	7,29097	0,68166	4608,7	1 69 02 47	1467
1468	2 155 024	3 163 575 232	38,3145	11,3652	7,29166	0,68120	4611,9	1 69 25 52	1468
1469	2 157 961	3 170 044 709	38,3275	11,3677	7,29234	0,68074	4615,0	1 69 48 59	1469
1470	2 160 900	3 176 523 000	38,3406	11,3703	7,29302	0,68027	4618,1	1 69 71 67	**1470**
1471	2 163 841	3 183 010 111	38,3536	11,3729	7,29370	0,67981	4621,3	1 69 94 77	1471
1472	2 166 784	3 189 506 048	38,3666	11,3755	7,29438	0,67935	4624,4	1 70 17 88	1472
1473	2 169 729	3 196 010 817	38,3797	11,3780	7,29506	0,67889	4627,6	1 70 41 01	1473
1474	2 172 676	3 202 524 424	38,3927	11,3806	7,29574	0,67843	4630,7	1 70 64 16	1474
1475	2 175 625	3 209 046 875	38,4057	11,3832	7,29641	0,67797	4633,8	1 70 87 32	1475
1476	2 178 576	3 215 578 176	38,4187	11,3858	7,29709	0,67751	4637,0	1 71 10 50	1476
1477	2 181 529	3 222 118 333	38,4317	11,3883	7,29777	0,67705	4640,1	1 71 33 69	1477
1478	2 184 484	3 228 667 352	38,4447	11,3909	7,29845	0,67659	4643,3	1 71 56 90	1478
1479	2 187 441	3 235 225 239	38,4578	11,3935	7,29912	0,67613	4646,4	1 71 80 12	1479
1480	2 190 400	3 241 792 000	38,4708	11,3960	7,29980	0,67568	4649,6	1 72 03 36	**1480**
1481	2 193 361	3 248 367 641	38,4838	11,3986	7,30047	0,67522	4652,7	1 72 26 62	1481
1482	2 196 324	3 254 952 168	38,4967	11,4012	7,30115	0,67476	4655,8	1 72 49 89	1482
1483	2 199 289	3 261 545 587	38,5097	11,4037	7,30182	0,67431	4659,0	1 72 73 18	1483
1484	2 202 256	3 268 147 904	38,5227	11,4063	7,30250	0,67385	4662,1	1 72 96 48	1484
1485	2 205 225	3 274 759 125	38,5357	11,4088	7,30317	0,67340	4665,3	1 73 19 80	1485
1486	2 208 196	3 281 379 256	38,5487	11,4114	7,30384	0,67295	4668,4	1 73 43 13	1486
1487	2 211 169	3 288 008 303	38,5616	11,4140	7,30452	0,67250	4671,5	1 73 66 48	1487
1488	2 214 144	3 294 646 272	38,5746	11,4165	7,30519	0,67204	4674,7	1 73 89 85	1488
1489	2 217 121	3 301 293 169	38,5876	11,4191	7,30586	0,67159	4677,8	1 74 13 23	1489
1490	2 220 100	3 307 949 000	38,6005	11,4217	7,30653	0,67114	4681,0	1 74 36 62	**1490**
1491	2 223 081	3 314 613 771	38,6135	11,4242	7,30720	0,67069	4684,1	1 74 60 04	1491
1492	2 226 064	3 321 287 488	38,6264	11,4268	7,30787	0,67024	4687,3	1 74 83 47	1492
1493	2 229 049	3 327 970 157	38,6394	11,4293	7,30854	0,66979	4690,4	1 75 06 91	1493
1494	2 232 036	3 334 661 784	38,6523	11,4319	7,30921	0,66934	4693,5	1 75 30 37	1494
1495	2 235 025	3 341 362 375	38,6652	11,4344	7,30988	0,66890	4696,7	1 75 53 85	1495
1496	2 238 016	3 348 071 936	38,6782	11,4370	7,31055	0,66845	4699,8	1 75 77 34	1496
1497	2 241 009	3 354 790 473	38,6911	11,4395	7,31122	0,66800	4703,0	1 76 00 84	1497
1498	2 244 004	3 361 517 992	38,7040	11,4421	7,31189	0,66756	4706,1	1 76 24 37	1498
1499	2 247 001	3 368 254 499	38,7169	11,4446	7,31255	0,66711	4709,2	1 76 47 90	1499
1500	2 250 000	3 375 000 000	38,7299	11,4471	7,31322	0,66667	4712,4	1 76 71 46	**1500**

Tabela 1.10. **Puterea a 4-a şi a 5-a**

n	n^4	n^5	n	n^4	n^5
1	1	1	51	6 765 201	345 025 251
2	16	32	52	7 311 616	380 204 032
3	81	243	53	7 890 481	418 195 493
4	256	1 024	54	8 503 056	459 165 024
5	625	3 125	55	9 150 625	503 284 375
6	1 296	7 776	56	9 834 496	550 731 776
7	2 401	16 807	57	10 556 001	601 692 057
8	4 096	32 768	58	11 316 496	656 356 868
9	6 561	59 049	59	12 117 361	714 924 299
10	10 000	100 000	**60**	1 960 000	777 600 000
11	14 641	161 051	61	13 845 841	844 596 301
12	20 736	248 832	62	14 776 336	916 132 832
13	58 561	371 293	63	15 752 961	992 436 543
14	38 416	537 824	64	16 777 216	1 073 741 824
15	50 625	759 375	65	17 850 625	1 160 290 625
16	65 536	1 048 576	66	18 974 736	1 252 332 576
17	83 521	1 419 857	67	20 151 121	1 350 125 107
18	104 976	1 889 568	68	21 381 376	1 453 933 568
19	130 321	2 476 099	69	22 667 121	1 564 031 349
20	160 000	3 200 000	**70**	24 010 000	1 680 700 000
21	194 481	4 084 101	71	25 411 681	1 804 229 351
22	234 256	5 153 632	72	26 873 856	1 934 917 632
23	279 841	6 436 343	73	28 398 241	2 073 071 593
24	331 776	7 962 624	74	29 986 576	2 219 006 624
25	390 625	9 765 625	75	31 640 625	2 373 046 875
26	456 976	11 881 376	76	33 362 176	2 535 525 376
27	531 441	14 348 907	77	35 153 041	2 706 784 157
28	614 656	17 210 368	78	37 015 056	2 887 174 368
29	707 281	20 511 149	79	38 950 081	3 077 056 399
30	810 000	24 300 000	**80**	40 960 000	3 276 800 000
31	923 521	28 629 151	81	43 046 721	3 486 784 401
32	1 048 576	33 554 432	82	45 212 176	3 707 398 432
33	1 185 921	39 135 393	83	77 458 321	3 939 040 643
34	1 336 336	45 435 424	84	49 787 136	4 182 119 424
35	1 500 625	52 521 875	85	52 200 625	4 437 053 125
36	1 679 616	60 466 176	86	54 700 816	4 704 270 176
37	1 874 161	69 343 957	87	57 289 761	4 984 209 207
38	2 085 136	79 235 168	88	59 969 536	5 277 319 168
39	2 313 441	90 224 199	99	62 742 241	5 584 059 449
40	2 560 000	102 400 000	**90**	65 610 000	5 904 900 000
41	2 825 761	115 856 201	91	68 574 961	6 240 321 451
42	3 111 696	130 691 232	92	71 639 296	6 590 815 232
43	3 418 801	147 008 443	93	74 805 201	6 956 883 693
44	3 748 096	164 916 224	94	78 074 896	7 339 040 224
45	4 100 625	184 528 125	95	81 450 625	7 737 809 375
46	4 477 456	205 962 976	96	84 934 656	8 153 726 976
47	4 879 681	229 345 007	97	88 529 281	8 587 340 257
48	5 308 416	254 803 968	98	92 236 816	9 039 207 968
49	5 764 801	282 475 249	99	96 059 601	9 509 900 499
50	6 250 000	312 500 000	100	100 000 000	10 000 000 000

Tabela 1.11 **Lungimea arcului l, săgeata h. raportul l/h coarda c aria sectorului s şi a segmentului d corespunzătoare unghiului la centru α în cercul cu raza unitatea**

α	l	h	l/h	c	s	d
0	0,0000	0,0000	∞	0,0000	0,000000	0,00000
1	0,0175	0,0000	458,36	0,0175	0,008726	0,00000
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	0,017453	0,00000
3	0,0524	0,0003	152,79	0,0524	0,026180	0,00001
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	0,034907	0,00003
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	0,043633	0,00006
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	0,052360	0,00010
7	0,1222	0,0019	64,01	0,1221	0,061087	0,00015
8	0,1396	0,0024	56,01	0,1395	0,069813	0,00023
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	0,078540	0,00032
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	0,087267	0,00044
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	0,095993	0,00059
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	0,104720	0,00076
13	0,2269	0,0064	35,28	0,2264	0,113446	0,00097
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	0,122173	0,00121
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	0,130900	0,00149
16	0,2793	0,0097	28,04	0,2783	0,139626	0,00181
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	0,148353	0,00217
18	0,3142	0,0123	25,35	0,3129	0,157080	0,00257
19	0,3316	0,0137	24,17	0,3301	0,165806	0,00302
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	0,174533	0,00352
21	0,3665	0,0167	21,95	0,3645	0,183260	0,00408
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	0,191986	0,00468
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	0,200713	0,00535
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	0,209440	0,00607
25	0,4363	0,0237	18,47	0,4329	0,218166	0,00686
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	0,226893	0,00771
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	0,235620	0,00862
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	0,244346	0,00961
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	0,253073	0,01067
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	0,261800	0,01180
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	0,270526	0,01301
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	0,279253	0,01429
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	0,287979	0,01566
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	0,296706	0,01711

35—69 Tabela 1.11 (*continuare*)

α	l	h	l/h	c	s	d
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	0,305433	0,01864
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	0,314159	0,02027
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	0,322886	0,02198
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	0,331613	0,02378
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	0,340339	0,02568
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	0,349066	0,02767
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	0,357793	0,02976
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	0,366519	0,03195
43	0,7505	0,0696	10,78	0,7330	0,375246	0,03425
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	0,383973	0,03664
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	0,392699	0,03915
46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	0,401426	0,04176
47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	0,410153	0,04448
48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	0,418879	0,04731
49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	0,427606	0,05025
50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	0,436333	0,05331
51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	0,445059	0,05649
52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	0,453786	0,05978
53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	0,462512	0,06319
54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	0,471239	0,06673
55	0,9599	0,1130	8,49	0,9235	0,479966	0,07039
56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	0,488692	0,07417
57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	0,497419	0,07808
58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	0,506146	0,08212
59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	0,514872	0,08629
60	1,0472	0,1340	7,81	1,0000	0,523599	0,09059
61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	0,532326	0,09502
62	1,0821	0,1428	7,56	1,0301	0,541052	0,09958
63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	0,549779	0,10428
64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	0,558506	0,10911
65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	0,567232	0,11408
66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	0,575959	0,11919
67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	0,584686	0,12443
68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	0,593412	0,12982
69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	0,602139	0,13535

70 – 104 Tabela 1.11 (*continuare*)

α	l	h	l/h	c	s	d
70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	0,610866	0,14102
71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	0,619592	0,14683
72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	0,628319	0,15279
73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	0,637045	0,15889
74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	0,645772	0,16514
75	1,3090	0,2066	6,34	1,2175	0,654499	0,17154
76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	0,663225	0,17808
77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	0,671952	0,18477
78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	0,680679	0,19160
79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	0,689405	0,19859
80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	0,698132	0,20575
81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	0,706859	0,21301
82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	0,715585	0,22045
83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	0,724312	0,22804
84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	0,733039	0,23578
85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	0,741765	0,24367
86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	0,750492	0,25171
87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	0,759219	0,25990
88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	0,767945	0,26825
89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	0,776672	0,27675
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	0,785399	0,28540
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	0,794125	0,29420
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	0,802852	0,30316
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	0,811578	0,31226
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	0,820305	0,32152
95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	0,829032	0,33093
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	0,837758	0,34050
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	0,846485	0,35021
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	0,855212	0,36008
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	0,863938	0,37009
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	0,872665	0,38026
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	0,881392	0,39058
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	0,890118	0,40104
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	0,898845	0,41166
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	0,907572	0,42242

105–139 Tabela 1.11 (*continuare*)

α	l	h	l/h	c	s	d
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	0,916298	0,43333
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	0,925025	0,44439
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	0,933752	0,45560
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	0,942478	0,46695
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	0,951205	0,47845
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	0,959932	0,49008
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	0,968658	0,50187
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	0,977385	0,51379
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	0,986111	0,52586
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	0,994838	0,53806
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	1,003565	0,55041
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	1,012291	0,56289
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	1,021018	0,57551
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	1,029745	0,58827
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	1,038471	0,60116
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	1,047198	0,61418
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	1,055925	0,62734
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	1,064651	0,64063
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	1,073378	0,65404
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	1,082105	0,66759
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	1,090831	0,68125
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	1,099558	0,69505
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	1,108285	0,70897
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	1,117011	0,72301
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	1,125739	0,73716
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	1,134465	0,75144
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	1,143191	0,76584
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	1,151918	0,78034
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	1,160644	0,79497
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	1,169371	0,80970
135	2 3562	0,6173	3,82	1,8478	1,178098	0,82454
136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	1,186824	0,83949
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	1,195551	0,85455
138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	1,204278	0,86971
139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	1,213004	0,88497

140 – 180 Tabela 1.11 (*continuare*)

α	l	h	l/h	c	s	d
140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	1,221731	0,90034
141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	1,230458	0,91580
142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	1,239184	0,93135
143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	1,247911	0,94700
144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	1,256638	0,96274
145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	1,265364	0,97858
146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	1,274091	0,99449
147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	1,282818	1,01050
148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	1,291544	1,02658
149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	1,300271	1,04275
150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	1,308998	1,05900
151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	1,317724	1,07532
152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	1,326451	1,09171
153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	1,335177	1,10818
154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	1,343904	1,12472
155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	1,352631	1,14132
156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	1,361357	1,15799
157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	1,370084	1,17472
158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	1,378811	1,19151
159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	1,387537	1,20835
160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	1,396265	1,22525
161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	1,404992	1,24221
162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	1,413718	1,25921
163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	1,422445	1,27626
164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	1,431172	1,29335
165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	1,439898	1,31049
166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	1,448625	1,32766
167	2,9147	0,8868	3,28	1,9871	1,457352	1,34487
168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	1,466078	1,36212
169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	1,474805	1,37940
170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	1,483532	1,39671
171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	1,492258	1,41404
172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	1,500985	1,43140
173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	1,509741	1,44878
174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	1,518438	1,46617
175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	1,527165	1,48359
176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	1,535891	1,50101
177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	1,544618	1,51845
178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	1,553345	1,53589
179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	1,562071	1,55334
180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	1,570798	1,57080

Tabela 1.12. **Multiplii lui π, de la 1 pînă la 100**

$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26434\ldots$

	Multiplii		Multiplii		Multiplii
10	31,415 927	**40**	125,663 706	**70**	219,911 486
11	34,557 519	41	128,805 299	71	223,053 078
12	37,699 112	42	131,946 891	72	226,194 671
13	40,840 704	43	135,088 484	73	229,336 264
14	43,982 297	44	138,230 077	74	232,477 856
15	47,123 890	45	141,371 669	75	235,619 449
16	50,265 482	46	144,513 262	76	238,761 042
17	53,407 075	47	147,654 855	77	241,902 634
18	56,548 668	48	150,796 447	78	245,044 227
19	59,690 260	49	153,938 040	79	248,185 820
20	62,831 853	**50**	157,079 633	**80**	251,327 412
21	65,973 446	51	160,221 225	81	254,469 005
22	69,115 038	52	163,362 818	82	257,610 598
23	72,256 631	53	166,504 411	83	260,752 190
24	75,398 224	54	169,646 003	84	263,893 783
25	78,539 816	55	172,787 596	85	267,035 376
26	81,681 409	56	175,929 189	86	270,176 968
27	84,823 002	57	179,070 781	87	273,318 561
28	87,964 594	58	182,212 374	88	276,460 154
29	91,106 187	59	185,353 967	89	279,601 746
30	94,247 780	**60**	188,495 559	**90**	282,743 339
31	97,389 372	61	191,637 152	91	285,884 931
32	100,530 965	62	194,778 745	92	289,026 524
33	103,672 558	63	197,920 337	93	292,168 117
34	106,814 150	64	201,061 930	94	295,309 709
35	109,955 743	65	204,203 522	95	298,451 302
36	113,097 336	66	207,345 115	96	301,592 895
37	116,238 928	67	210,486 708	97	304,734 487
38	119,380 521	68	213,628 300	98	307,876 080
39	122,522 113	69	216,769 893	99	311,017 673

Tabela 1.13. **Multiplii lui 1/π de la 1 pînă la 100**

1 π = 0,31830 98861 83790 67153 77675

	Multiplii		Multiplii		Multiplii
10	3,183 099	**40**	12,732 395	**70**	22,281 692
11	3,501 409	41	13,050 705	71	22,600 002
12	3,819 719	42	13,369 015	72	22,918 312
13	4,138 029	43	13,687 325	73	23,236 622
14	4,456 338	44	14,005 635	74	23,554 932
15	4,774 648	45	14,323 945	75	23,873 241
16	5,092 958	46	14,642 255	76	24,191 541
17	5,411 268	47	14,960 565	77	24,509 861
18	5,729 578	48	15,276 875	78	24,828 171
19	6,047 888	49	15,597 184	79	25,146 481
20	6,366 198	**50**	15,915 494	**80**	25,464 791
21	6,684 508	51	16,233 804	81	25,783 101
22	7,002 817	52	16,552 114	82	26,101 411
23	7,321 127	53	16,870 424	83	26,419 721
24	7,639 437	54	17,188 734	84	26,738 030
25	7,957 747	55	17,507 044	85	27,056 340
26	8,276 057	56	17 825 354	86	27,374 650
27	8,594 367	57	18,143 664	87	27,692 960
28	8,912 677	58	18,461 973	88	28,011 270
29	9,230 987	59	18,780 283	89	28,329 580
30	9,549 297	**60**	19,098 593	**90**	28,647 890
31	9,867 606	61	19,416 903	91	28,966 200
32	10,185 916	62	19,735 213	92	29,284 510
33	10,504 226	63	20,053 523	93	29,602 819
34	10,822 536	64	20,371 833	94	29,921 129
35	11,140 846	65	20,690 143	95	30,239 439
36	11,459 156	66	21,008 422	96	30,557 749
37	11,777 466	67	21,326 762	97	30,876 059
38	12,095 776	68	21,645 072	98	31,194 369
39	12,414 086	69	21,963 382	99	31,512 679

Tabela 1.14. **Transformarea gradelor sexagesimale în radiani**

Secunde și minute	Radiani	Grade	Radiani	Grade	Radiani
1″	0,000005	1°	0,017453	31°	0,541052
2	0,000010	2	0,034907	32	0,558505
3	0,000015	3	0,052360	33	0,575995
4	0,000019	4	0,069813	34	0,593412
5	0,000024	5	0,087266	35	0,610865
6	0,000029	6	0,104720	36	0,628319
7	0,000034	7	0,122173	37	0,645772
8	0,000039	8	0,139626	38	0,663225
9	0,000044	9	0,157080	39	0,680678
10	0,000048	10	0,174533	40	0,698132
20	0,000097	11	0,191986	45	0,785398
30	0,000145	12	0,209440	50	0,872665
40	0,000194	13	0,226893	55	0,959931
50	0,000242	14	0,244346	60	1,047198
		15	0,261799	65	1,134464
1′	0,000291	16	0,279253	70	1,221730
2	0,000582	17	0,296706	75	1,308997
3	0,000873	18	0,314159	80	1,396263
		19	0,331613	85	1,483530
4	0,001164	20	0,349066	90	1,570796
5	0,001454	21	0,366519	100	1,745329
6	0,001745	22	0,383972	120	2,094395
7	0,002036	23	0,401426	150	2,617994
8	0,002327	24	0,418879	180	3,141593
9	0,002618	25	0,436332	200	3,490659
10	0,002909	26	0,453786	250	4,363323
20	0,005818	27	0,471239	270	4,712389
30	0,008727	28	0,488692	300	5,235988
40	0,011636	29	0,506145	360	6,283185
50	0,014544	30	0,523599	400	6,981317

Tabela 1.15. Transformarea minutelor şi secundelor centesimale în minute şi secunde sexagesimale

c	s	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s
0^c00^{cc}	0'00"	1^c02^{cc}	33	2^c01^{cc}	05	3^c02^{cc}	38*	4^c01^{cc}	2'10"	5^c00^{cc}	42	6^c02^{cc}	15	7^c01^{cc}	47	8^c02^{cc}	4'20"*	9^c01^{cc}	52
03	01	05	34	04	06	06	39	04	11	03	43	05	16	04	48	06	21	04	53
06	02	08	35	07	07	09	1'40"	07	12	06	44	08	17	07	49	09	22	07	54
09	03	11	36	10	08	12	41	10	13*	09	45	11	18	10	3'50"	12	23	10	55*
12	04	14	37	13	09	15	42	14	14	12	46	14	19	13	51	15	24	14	56
15	05	17	38	16	1'10"	18	43	17	15	15	47	17	3'20"	16	52	18	25	17	57
19	06*			19	11					19	48*			19	53				
		1^c20^{cc}	39			3^c21^{cc}	44	4^c20^{cc}	16									9^c20^{cc}	58
0^c22^{cc}	07	23	0'40"*	2^c22^{cc}	12	24	45	23	17	5^c22^{cc}	49	6^c20^{cc}	21			8^c21^{cc}	26	23	4'59"
25	08	27	41*	25	13	27	46	26	18	25	2'50"	23	22*	7^c22^{cc}	54	24	27	26	5'00"
28	09	30	42	28	14	30	47	29	19	28	51	27	23*	25	55	27	28	29	01
31	0'10"	33	43	31.	15*	33	48	32	2'20"	31	52	30	24	28	56	30	29	32	02
34	11	36	44	35	16	36	49	35	21	34	53	33	25	31	57*	33	4'30"	35	03
37	12	39	45	38	17			38	22	37	54	36	26	35	58	36	31	38	04
						3^c40^{cc}	1'50"*					39	27	38	3'59"				
0^c40^{cc}	13	1^c42^{cc}	46	2^c41^{cc}	18	43	51			5^c40^{cc}	55					8^c40^{cc}	32*	9^c41^{cc}	05
43	14	45	47	44	19	46	52	4^c41^{cc}	23	43	56	6^c42^{cc}	28	7^c41^{cc}	4'00"	43	33	44	06
46	15	48	48	47	1'20"	49	53	44	24	46	57	45	29	44	01	46	34	48	07*
49	16	51	49	50	21	52	54	48	25*	49	58	48	3'30"	47	02	49	35	51	08
52	17*	54	0'50"	53	22	55	55	51	26	52	2'59"*	51	31	50	03	52	36	54	09
56	18	57	51	56	23	58	56	54	27			54	32	53	04	55	37	57	5'10"
59	19			59	24			57	28	56	3'00"	57	33	56	05	58	38		
										59	01			59	06			9^c60^{cc}	11
						3^c61^{cc}	57											63	12
0^c62^{cc}	0'20"	1^c60^{cc}	52*	2^c62^{cc}	25	64	58	4^c60^{cc}	29	5^c62^{cc}	02	6^c60^{cc}	34*	7^c62^{cc}	07	8^c61^{cc}	39	66	13
65	21	64	53	65	26	67	1'59"	63	2'30"	65	03	64	35	65	08	64	4'40"	69	14
68	22	67	54	69	27*			66	31	68	04	67	36	69	09*	67	41	72	15
71	23	70	55	72	28	70	2'00"	69	32	71	05	70	37	72	4'10"	70	42	75	16
74	24	73	56	75	29	73	01*	72	33	74	06	73	38	75	11	73	43*	78	17
77	25	76	57	78	1'30"	77	02*	75	34	77	07	76	39	78	12	77	44*		
		79	58					78	35			79	3'40"					9^c81^{cc}	18*
																		85	19
0^c80^{cc}	26			2^c81^{cc}	31	3^c80^{cc}	03			5^c80^{cc}	08			7^c81^{cc}	13	8^c80^{cc}	45	88	5'20"
83	27	1^c82^{cc}	0'59"	84	32	83	04	4^c81^{cc}	36*	83	09	6^c82^{cc}	41	84	14	83	46	91	21
86	28	85	1'00"	87	33	86	05	85	37	86	3'10"	85	42	87	15	86	47	94	22
90	29*	88	01	90	34	89	06	88	38	90	11*	88	43	90	16	89	48		
93	0'30"	91	02	93	35	92	07	91	39	93	12	91	44	93	17	92	49	9^c97^{cc}	23
96	31	94	03	96	36	95	08	94	2'40"	96	13	94	45	96	18	95	4'50"		
99	32	98	04	99	37	98	09	97	41	99	14	98	46*	99	19	98	51	10^c00^{cc}	24

Tabela 1.16 Transformarea gradelor

Grade centesimale

I		II		III		IV		I		II		III		IV	
0g	50g	100g	150g	200g	250g	300g	350g	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
1	51	101	151	201	251	301	351	0	45	90	135	180	225	270	315
2	52	102	152	202	252	302	352	1	46	91	136	181	226	271	316
3	53	103	153	203	253	303	353	2	47	92	137	182	227	272	317
4	54	104	154	204	254	304	354	3	48	93	138	183	228	273	318
5	55	105	155	205	255	305	355	4	49	94	139	184	229	274	319
6	56	106	156	206	256	306	356	5	50	95	140	185	230	275	320
7	57	107	157	207	257	307	357	6	51	96	141	186	231	276	321
8	58	108	158	208	258	308	358	7	52	97	142	187	232	277	322
9	59	109	159	209	259	309	359	8	53	98	143	188	233	278	323
10	**60**	110	160	210	260	310	360	9	54	99	144	189	234	279	324
11	61	111	161	211	261	311	361	9	54	99	144	189	234	279	324
12	62	112	162	212	262	312	362	10	55	100	145	190	235	280	325
13	63	113	163	213	263	313	363	11	56	101	146	191	236	281	326
14	64	114	164	214	264	314	364	12	57	102	147	192	237	282	327
15	65	115	165	215	265	315	365	13	58	103	148	193	238	283	328
16	66	116	166	216	266	316	366	14	59	104	149	194	239	284	329
17	67	117	167	217	267	317	367	15	60	105	150	195	240	285	330
18	68	118	168	218	268	318	368	16	61	106	151	196	241	286	331
19	69	119	169	219	269	319	369	17	62	107	152	197	242	287	332
20	**70**	120	170	220	270	320	370	18	63	108	153	198	243	288	333
21	71	121	171	221	271	321	371	18	63	108	153	198	243	288	333
22	72	122	172	222	272	322	372	19	64	109	154	199	244	289	334
23	73	123	173	223	273	323	373	20	65	110	155	200	245	290	335
24	74	124	174	224	274	324	374	21	66	111	156	201	246	291	336
25	75	125	175	225	275	325	375	22	67	112	157	202	247	292	337
26	76	126	176	226	276	326	376	23	68	113	158	203	248	293	338
27	77	127	177	227	277	327	377	24	69	114	159	204	249	294	339
28	78	128	178	228	278	328	378	25	70	115	160	205	250	295	340
29	79	129	179	229	279	329	379	26	71	116	161	206	251	296	341
30	**80**	130	180	230	280	330	380	27	72	117	162	207	252	297	342
31	81	131	181	231	281	331	381	27	72	117	162	207	252	297	342
32	82	132	182	232	282	332	382	28	73	118	163	208	253	298	343
33	83	133	183	233	283	333	383	29	74	119	164	209	254	299	344
34	84	134	184	234	284	334	384	30	75	120	165	210	255	300	345
35	85	135	185	235	285	335	385	31	76	121	166	211	256	301	346
36	86	136	186	236	286	336	386	32	77	122	167	212	257	302	347
37	87	137	187	237	287	337	387	33	78	123	168	213	258	303	348
38	88	138	188	238	288	338	388	34	79	124	169	214	259	304	349
39	89	139	189	239	289	339	389	35	80	125	170	215	260	305	350
40	**90**	140	190	240	290	340	390	36	81	126	171	216	261	306	351
41	91	141	191	241	291	341	391	36	81	126	171	216	261	306	351
42	92	142	192	242	292	342	392	37	82	127	172	217	262	307	352
43	93	143	193	243	293	343	393	38	83	128	173	218	263	308	353
44	94	144	194	244	294	344	394	39	84	129	174	219	264	309	354
45	95	145	195	245	295	345	395	40	85	130	175	220	265	310	355
46	96	146	196	246	296	346	396	41	86	131	176	221	266	311	356
47	97	147	197	247	297	347	397	42	87	132	177	222	267	312	357
48	98	148	198	248	298	348	398	43	88	133	178	223	268	313	358
49	99	149	199	249	299	349	399	44	89	134	179	224	269	314	359
50	**100**	150	200	250	300	350	400	45	90	135	180	225	270	315	360

centesimale la grade sexagesimale şi invers

00c	10c	20c	30c	40c	50c	60c	70c	80c	90c
Grade sexagesimale									
00'00"	05'24"	10'48"	16'12"	21'36"	27'00"	32'24"	37'48"	43'12"	48'36"
54	59	*04	*10	*15	*21	*26	*31	*37	*42
48	53	58	*04	*09	*15	*20	*25	*31	*36
42	47	52	58	*03	*09	*14	*19	*25	*30
36	41	46	52	57	*03	*08	*13	*19	*24
30'00"	35'24"	40'48"	46'12"	51'36"	57'00"	*02'24"	*07'48"	*13'12"	*18'36"
24	29	34	40	45	51	56	*01	*07	*12
18	23	28	34	39	45	50	55	*01	*06
12	17	22	28	33	39	44	49	55	*00
06	11	16	22	27	33	38	43	49	54
00'00"	05'24"	10'48"	16'12"	21'36"	27'00"	32'24"	37'48"	43'12"	48'36"
54	59	*04	*10	*15	*21	*26	*31	*37	*42
48	53	58	*04	*09	*15	*20	*25	*31	*36
42	47	52	58	*03	*09	*14	*19	*25	*30
36	41	46	52	57	*03	*08	*13	*19	*24
30'00"	35'24"	40'48"	46'12"	51'36"	57'00"	*02'24"	*07'48"	*13'12"	*18'36"
24	29	34	40	45	51	56	*01	*07	*12
18	23	28	34	39	45	50	55	*01	*06
12	17	22	28	33	39	44	49	55	*00
06	11	16	22	27	33	38	43	49	54
00'00"	05'24"	10'48"	16'12"	21'36"	27'00"	32'24"	37'48"	43'12"	48'36"
54	59	*04	*10	*15	*21	*26	*31	*37	*42
48	53	58	*04	*09	*15	*20	*25	*31	*36
42	47	52	58	*03	*09	*14	*19	*25	*30
36	41	46	52	57	*03	*08	*13	*19	*24
30'00"	35'24"	40'48"	46'12"	51'36"	57'00"	*02'24"	*07'48"	*13'12"	*18'36"
24	29	34	40	45	51	56	*01	*07	*12
18	23	28	34	39	45	50	55	*01	*06
12	17	22	28	33	39	44	49	55	*00
06	11	16	22	27	33	38	43	49	54
00'00"	05'24"	10'48"	16'12"	21'36"	27'00"	32'24"	37'48"	43'12"	48'36"
54	59	*04	*10	*15	*21	*26	*31	*37	*42
48	53	58	*04	*09	*15	*20	*25	*31	*36
42	47	52	58	*03	*09	*14	*19	*25	*30
36	41	46	52	57	*03	*08	*13	*19	*24
30'00"	35'24"	40'48"	46'12"	51'36"	57'00"	*02'24"	*07'48"	*13'12"	*18'36"
24	29	34	40	45	51	56	*01	*07	*12
18	23	28	34	39	45	50	55	*01	*06
12	17	22	28	33	39	44	49	55	*00
06	11	16	22	27	33	38	43	49	54
00'00"	05'24"	10'48"	16'12"	21'36"	27'00"	32'24"	37'48"	43'12"	48'36"
54	59	*04	*10	*15	*21	*26	*31	*37	*42
48	53	58	*04	*09	*15	*20	*25	*31	*36
42	47	52	58	*03	*09	*14	*19	*25	*30
36	41	46	52	57	*03	*08	*13	*19	*24
30'00"	35'24"	40'48"	46'12"	51'36"	57'00"	*02'24"	*07'48"	*13'12"	*18'36"
24	29	34	40	45	51	56	*01	*07	*12
18	23	28	34	39	45	50	55	*01	*06
12	17	22	28	33	39	44	49	55	*00
06	11	16	22	27	33	38	43	49	54
00'00"	05'24"	10'48"	16'12"	21'36"	27'00"	32'24"	37'48"	43'12"	48'36"

Tabela 1.17. Valorile naturale ale funcţiilor

	Sinus							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0°	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89°
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44°	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45°
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	
	Cosinus							

trigonometrice ale arcelor măsurate în grade sexagesimale

	Cosinus							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0°	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0 99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0 95195	0,95106	72
18	0 95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44°	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45°
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	
	Sinus							

Tabela 1.17 (*continuare*)

	Tangenta							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0°	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89°
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44°	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45°
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	
	Cotangenta							

Tabela 1.17 (*continuare*)

	Cotangenta							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0°	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89°
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08144	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44°	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45°
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	
	Tangenta							

Tabela 1.18. **Valorile naturale ale funcţiilor**

	Sinus											
	00^c	10^c	20^c	30^c	40^c	50^c	60^c	70^c	80^c	90^c	100^c	
0^g	0,0000	0,0016	0,0031	0,0047	0,0063	0,0079	0,0094	0,0110	0,0126	0,0141	0,0157	**99^g**
1	0,0157	0,0173	0,0188	0,0204	0,0220	0,0236	0,0251	0,0267	0,0283	0,0298	0,0314	**98**
2	0,0314	0,0330	0,0346	0,0361	0,0377	0,0393	0,0408	0,0424	0,0440	0,0455	0,0471	**97**
3	0,0471	0,0487	0,0502	0,0518	0,0534	0,0550	0,0565	0,0581	0,0597	0,0612	0,0628	**96**
4	0,0628	0,0644	0,0659	0,0675	0,0691	0,0706	0,0722	0,0738	0,0753	0,0769	0,0785	**95**
5	0,0785	0,0800	0,0816	0,0832	0,0847	0,0863	0,0879	0,0894	0,0910	0,0925	0,0941	**94**
6	0,0941	0,0957	0,0972	0,0988	0,1004	0,1019	0,1035	0,1050	0,1066	0,1082	0,1097	**93**
7	0,1097	0,1113	0,1129	0,1144	0,1160	0,1175	0,1191	0,1207	0,1222	0,1238	0,1253	**92**
8	0,1253	0,1269	0,1284	0,1300	0,1316	0,1331	0,1347	0,1362	0,1378	0,1393	0,1409	**91**
9	0,1409	0,1425	0,1440	0,1456	0,1471	0,1487	0,1502	0,1518	0,1533	0,1549	0,1564	**90**
10	0,1564	0,1580	0,1595	0,1611	0,1626	0,1642	0,1657	0,1673	0,1688	0,1704	0,1719	**89**
11	0,1719	0,1735	0,1750	0,1766	0,1781	0,1797	0,1812	0,1828	0,1843	0,1858	0,1874	**88**
12	0,1874	0,1889	0,1905	0,1920	0,1935	0,1951	0,1966	0,1982	0,1997	0,2012	0,2028	**87**
13	0,2028	0,2043	0,2059	0,2074	0,2089	0,2105	0,2120	0,2135	0,2151	0,2166	0,2181	**86**
14	0,2181	0,2197	0,2212	0,2227	0,2243	0,2258	0,2273	0,2289	0,2304	0,2319	0,2334	**85**
15	0,2334	0,2350	0,2365	0,2380	0,2396	0,2411	0,2426	0,2441	0,2456	0,2472	0,2487	**84**
16	0,2487	0,2502	0,2517	0,2533	0,2548	0,2563	0,2578	0,2593	0,2608	0,2624	0,2639	**83**
17	0,2639	0,2654	0,2669	0,2684	0,2699	0,2714	0,2730	0,2745	0,2760	0,2775	0,2790	**82**
18	0,2790	0,2805	0,2820	0,2835	0,2850	0,2865	0,2880	0,2895	0,2910	0,2925	0,2940	**81**
19	0,2940	0,2955	0,2970	0,2985	0,3000	0,3015	0,3030	0,3045	0,3060	0,3075	0,3090	**80**
20	0,3090	0,3105	0,3120	0,3135	0,3150	0,3165	0,3180	0,3195	0,3209	0,3224	0,3239	**79**
21	0,3239	0,3254	0,3269	0,3284	0,3299	0,3313	0,3328	0,3343	0,3358	0,3373	0,3387	**78**
22	0,3387	0,3402	0,3417	0,3432	0,3446	0,3461	0,3476	0,3491	0,3505	0,3520	0,3535	**77**
23	0,3535	0,3549	0,3564	0,3579	0,3593	0,3608	0,3623	0,3637	0,3652	0,3667	0,3681	**76**
24	0,3681	0,3696	0,3710	0,3725	0,3740	0,3754	0,3769	0,3783	0,3798	0,3812	0,3827	**75**
25	0,3827	0,3841	0,3856	0,3870	0,3885	0,3899	0,3914	0,3928	0,3943	0,3957	0,3971	**74**
26	0,3971	0,3986	0,4000	0,4015	0,4029	0,4043	0,4058	0,4072	0,4086	0,4101	0,4115	**73**
27	0,4115	0,4129	0,4144	0,4158	0,4172	0.4187	0,4201	0,4215	0,4229	0,4244	0,4258	**72**
28	0,4258	0,4272	0,4286	0,4300	0,4315	0,4329	0,4343	0,4357	0,4371	0,4385	0,4399	**71**
29	0,4399	0,4413	0,4428	0,4442	0,4456	0,4470	0,4484	0,4498	0,4512	0,4526	0,4540	**70**
30	0,4540	0,4554	0,4568	0,4582	0,4596	0,4610	0,4624	0,4638	0,4652	0,4665	0,4679	**69**
31	0,4679	0,4693	0,4707	0,4721	0,4735	0,4749	0,4762	0,4776	0,4790	0,4804	0,4818	**68**
32	0,4818	0,4831	0,4845	0,4859	0,4873	0,4886	0,4900	0,4914	0,4927	0,4941	0,4955	**67**
33	0,4955	0,4968	0,4982	0,4995	0,5009	0,5023	0,5036	0,5050	0,5063	0,5077	0,5090	**66**
34	0,5090	0,5104	0,5117	0.5131	0,5144	0,5158	0,5171	0,5185	0,5198	0,5212	0,5225	**65**
35	0,5225	0,5238	0,5252	0,5265	0,5278	0,5292	0,5305	0,5318	0,5332	0,5345	0,5358	**64**
36	0,5358	0,5372	0,5385	0,5398	0,5411	0,5424	0,5438	0,5451	0,5464	0,5477	0,5490	**63**
37	0,5490	0,5503	0,5516	0,5530	0,5543	0,5556	0,5569	0,5582	0,5595	0,5608	0,5621	**62**
38	0,5621	0,5634	0,5647	0,5660	0,5673	0,5686	0,5699	0,5711	0,5724	0,5737	0,5750	**61**
39	0,5750	0,5763	0,5776	0,5789	0,5801	0,5814	0,5827	0,5840	0,5852	0,5865	0,5878	**60**
40	0,5878	0,5891	0,5903	0,5916	0,5929	0,5941	0,5954	0,5966	0,5979	0,5992	0,6004	**59**
41	0,6004	0,6017	0,6029	0,6042	0,6054	0,6067	0,6079	0,6092	0,6104	0,6117	0,6129	**58**
42	0,6129	0,6141	0,6154	0,6166	0,6179	0,6191	0,6203	0,6216	0,6228	0,6240	0,6252	**57**
43	0,6252	0,6265	0,6277	0,6289	0,6301	0,6314	0,6326	0,6338	0,6350	0,6362	0,6374	**56**
44	0,6374	0,6386	0,6398	0,6410	0,6423	0,6435	0,6447	0,6459	0,6471	0,6483	0,6494	**55**
45	0,6494	0,6506	0,6518	0,6530	0,6542	0,6554	0,6566	0,6578	0,6590	0,6601	0,6613	**54**
46	0,6613	0,6625	0,6637	0,6648	0,6660	0,6672	0,6684	0,6695	0,6707	0,6718	0,6730	**53**
47	0,6730	0,6742	0,6753	0,6765	0,6776	0,6788	0,6800	0,6811	0,6823	0,6834	0,6845	**52**
48	0,6845	0,6857	0,6868	0,6880	0,6891	0,6903	0,6914	0,6925	0,6937	0,6948	0,6959	**51**
49^g	0,6959	0,6970	0,6982	0,6993	0,7004	0,7015	0,7026	0,7038	0,7049	0,7060	0,7071	**50^g**
	100^c	90^c	80^c	70^c	60^c	50^c	40^c	30^c	20^c	10^c	00^c	
	Cosinus											

trigonometrice ale arcelor măsurate în grade centesimale

	Cosinus											
	00c	10c	20c	30c	40c	50c	60c	70c	80c	90c	100c	
0g	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	99g
1	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9996	0,9996	0,9995	98
2	0,9995	0,9995	0,9994	0,9993	0,9993	0,9992	0,9992	0,9991	0,9990	0,9990	0,9989	97
3	0,9989	0,9988	0,9987	0,9987	0,9986	0,9985	0,9984	0,9983	0,9982	0,9981	0,9980	96
4	0,9980	0,9979	0,9978	0,9977	0,9976	0,9975	0,9974	0,9973	0,9972	0,9970	0,9969	95
5	0,9969	0,9968	0,9967	0,9965	0,9964	0,9963	0,9961	0,9960	0,9959	0,9957	0,9956	94
6	0,9956	0,9954	0,9953	0,9951	0,9950	0,9948	0,9946	0,9945	0,9943	0,9941	0,9940	93
7	0,9940	0,9938	0,9936	0,9934	0,9933	0,9931	0,9929	0,9927	0,9925	0,9923	0,9921	92
8	0,9921	0,9919	0,9917	0,9915	0,9913	0,9911	0,9909	0,9907	0,9905	0,9902	0,9900	91
9	0,9900	0,9898	0,9896	0,9893	0,9891	0,9889	0,9887	0,9884	0,9882	0,9879	0,9877	90
10	0,9877	0,9874	0,9872	0,9869	0,9867	0,9864	0,9862	0,9859	0,9856	0,9854	0,9851	89
11	0,9851	0,9848	0,9846	0,9843	0,9840	0,9837	0,9834	0,9832	0,9829	0,9826	0,9823	88
12	0,9823	0,9820	0,9817	0,9814	0,9811	0,9808	0,9805	0,9802	0,9799	0,9795	0,9792	87
13	0,9792	0,9789	0,9786	0,9783	0,9779	0,9776	0,9773	0,9769	0,9766	0,9763	0,9759	86
14	0,9759	0,9756	0,9752	0,9749	0,9745	0,9742	0,9738	0,9735	0,9731	0,9727	0,9724	85
15	0,9724	0,9720	0,9716	0,9713	0,9709	0,9705	0,9701	0,9697	0,9694	0,9690	0,9686	84
16	0,9686	0,9682	0,9678	0,9674	0,9670	0,9666	0,9662	0,9658	0,9654	0,9650	0,9646	83
17	0,9646	0,9641	0,9637	0,9633	0,9629	0,9625	0,9620	0,9616	0,9612	0,9607	0,9603	82
18	0,9603	0,9599	0,9594	0,9590	0,9585	0,9581	0,9576	0,9572	0,9567	0,9563	0,9558	81
19	0,9558	0,9553	0,9549	0,9544	0,9539	0,9535	0,9530	0,9525	0,9520	0,9515	0,9511	80
20	0,9511	0,9506	0,9501	0,9496	0,9491	0,9486	0,9481	0,9476	0,9471	0,9466	0,9461	79
21	0,9461	0,9456	0,9451	0,9445	0,9440	0,9435	0,9430	0,9425	0,9419	0,9414	0,9409	78
22	0,9409	0,9403	0,9398	0,9393	0,9387	0,9382	0,9376	0,9371	0,9365	0,9360	0,9354	77
23	0,9354	0,9349	0,9343	0,9338	0,9332	0,9326	0,9321	0,9315	0,9309	0,9304	0,9298	76
24	0,9298	0,9292	0,9286	0,9280	0,9274	0,9269	0,9263	0,9257	0,9251	0,9245	0,9239	75
25	0,9239	0,9233	0,9227	0,9221	0,9215	0,9208	0,9202	0,9196	0,9190	0,9184	0,9178	74
26	0,9178	0,9171	0,9165	0,9159	0,9152	0,9146	0,9140	0,9133	0,9127	0,9120	0,9114	73
27	0,9114	0,9108	0,9101	0,9095	0,9088	0,9081	0,9075	0,9068	0,9062	0,9055	0,9048	72
28	0,9048	0,9042	0,9035	0,9028	0,9021	0,9015	0,9008	0,9001	0,8994	0,8987	0,8980	71
29	0,8980	0,8973	0,8966	0,8959	0,8952	0,8945	0,8938	0,8931	0,8924	0,8917	0,8910	70
30	0,8910	0,8903	0,8896	0,8889	0,8881	0,8874	0,8867	0,8860	0,8852	0,8845	0,8838	69
31	0,8838	0,8830	0,8823	0,8816	0,8808	0,8801	0,8793	0,8786	0,8778	0,8771	0,8763	68
32	0,8763	0,8755	0,8748	0,8740	0,8733	0,8725	0,8717	0,8710	0,8702	0,8694	0,8686	67
33	0,8686	0,8679	0,8671	0,8663	0,8655	0,8647	0,8639	0,8631	0,8623	0,8615	0,8607	66
34	0,8607	0,8599	0,8591	0,8583	0,8575	0,8567	0,8559	0,8551	0,8543	0,8535	0,8526	65
35	0,8526	0,8518	0,8510	0,8502	0,8493	0,8485	0,8477	0,8468	0,8460	0,8452	0,8443	64
36	0,8443	0,8435	0,8426	0,8418	0,8409	0,8401	0,8392	0,8384	0,8375	0,8367	0,8358	63
37	0,8358	0,8349	0,8341	0,8332	0,8323	0,8315	0,8306	0,8297	0,8288	0,8280	0,8271	62
38	0,8271	0,8262	0,8253	0,8244	0,8235	0,8226	0,8217	0,8209	0,8200	0,8191	0,8181	61
39	0,8181	0,8172	0,8163	0,8154	0,8145	0,8136	0,8127	0,8118	0,8109	0,8099	0,8090	60
40	0,8090	0,8081	0,8072	0,8062	0,8053	0,8044	0,8034	0,8025	0,8016	0,8006	0,7997	59
41	0,7997	0,7987	0,7978	0,7968	0,7959	0,7949	0,7940	0,7930	0,7921	0,7911	0,7902	58
42	0,7902	0,7892	0,7882	0,7873	0,7863	0,7853	0,7843	0,7834	0,7824	0,7814	0,7804	57
43	0,7804	0,7794	0,7785	0,7775	0,7765	0,7755	0,7745	0,7735	0,7725	0,7715	0,7705	56
44	0,7705	0,7695	0,7685	0,7675	0,7665	0,7655	0,7645	0,7635	0,7624	0,7614	0,7604	55
45	0,7604	0,7594	0,7584	0,7573	0,7563	0,7553	0,7543	0,7532	0,7522	0,7511	0,7501	54
46	0,7501	0,7491	0,7480	0,7470	0,7459	0,7449	0,7438	0,7428	0,7417	0,7407	0,7396	53
47	0,7396	0,7386	0,7375	0,7365	0,7354	0,7343	0,7333	0,7322	0,7311	0,7300	0,7290	52
48	0,7290	0,7279	0,7268	0,7257	0,7247	0,7236	0,7225	0,7214	0,7203	0,7192	0,7181	51g
49g	0,7181	0,7170	0,7159	0,7148	0,7137	0,7126	0,7115	0,7104	0,7093	0,7082	0,7071	50g
	100c	90c	80c	70c	60c	50c	40c	30c	20c	10c	00c	
	Sinus											

Tabela 1.18. (*continuare*)

	Tangenta											
	00^c	10^c	20^c	30^c	40^c	50^c	60^c	70^c	80^c	90^c	100^c	
0^g	0,0000	0,0016	0,0031	0,0047	0,0063	0,0079	0,0094	0,0110	0,0126	0,0141	0,0157	99^g
1	0,0157	0,0173	0,0189	0,0204	0,0220	0,0236	0,0251	0,0267	0,0283	0,0299	0,0314	98
2	0,0314	0,0330	0,0346	0,0361	0,0377	0,0393	0,0409	0,0424	0,0440	0,0456	0,0472	97
3	0,0472	0,0487	0,0503	0,0519	0,0535	0,0550	0,0566	0,0582	0,0598	0,0613	0,0629	96
4	0,0629	0,0645	0,0661	0,0676	0,0692	0,0708	0,0724	0,0740	0,0755	0,0771	0,0787	95
5	0,0787	0,0803	0,0819	0,0834	0,0850	0,0866	0,0882	0,0898	0,0914	0,0929	0,0945	94
6	0,0945	0,0961	0,0977	0,0993	0,1009	0,1025	0,1040	0,1056	0,1072	0,1088	0,1104	93
7	0,1104	0,1120	0,1136	0,1152	0,1168	0,1184	0,1200	0,1215	0,1231	0,1247	0,1263	92
8	0,1263	0,1279	0,1295	0,1311	0,1327	0,1343	0,1359	0,1375	0,1391	0,1407	0,1423	91
9	0,1423	0,1439	0,1455	0,1471	0,1487	0,1503	0,1519	0,1536	0,1552	0,1568	0,1584	**90**
10	0,1584	0,1600	0,1616	0,1632	0,1648	0,1664	0,1681	0,1697	0,1713	0,1729	0,1745	89
11	0,1745	0,1761	0,1778	0,1794	0,1810	0,1826	0,1843	0,1859	0,1875	0,1891	0,1908	88
12	0,1908	0,1924	0,1940	0,1956	0,1973	0,1989	0,2005	0,2022	0,2038	0,2055	0,2071	87
13	0,2071	0,2087	0,2104	0,2120	0,2137	0,2153	0,2169	0,2186	0,2202	0,2219	0,2235	86
14	0,2235	0,2252	0,2268	0,2285	0,2301	0,2318	0,2334	0,2351	0,2368	0,2384	0,2401	85
15	0,2401	0,2417	0,2434	0,2451	0,2467	0,2484	0,2501	0,2517	0,2534	0,2551	0,2568	84
16	0,2568	0,2584	0,2601	0,2618	0,2635	0,2651	0,2668	0,2685	0,2702	0,2719	0,2736	83
17	0,2736	0,2753	0,2769	0,2786	0,2803	0,2820	0,2837	0,2854	0,2871	0,2888	0,2905	82
18	0,2905	0,2922	0,2939	0,2956	0,2974	0,2991	0,3008	0,3025	0,3042	0,3059	0,3076	81
19	0,3076	0,3094	0,3111	0,3128	0,3145	0,3163	0,3180	0,3197	0,3214	0,3232	0,3249	**80**
20	0,3249	0,3267	0,3284	0,3301	0,3319	0,3336	0,3354	0,3371	0,3389	0,3406	0,3424	79
21	0,3424	0,3441	0,3459	0,3476	0,3494	0,3512	0,3529	0,3547	0,3565	0,3582	0,3600	78
22	0,3600	0,3618	0,3636	0,3654	0,3671	0,3689	0,3707	0,3725	0,3743	0,3761	0,3779	77
23	0,3779	0,3797	0,3815	0,3833	0,3851	0,3869	0,3887	0,3905	0,3923	0,3941	0,3959	76
24	0,3959	0,3977	0,3996	0,4014	0,4032	0,4050	0,4069	0,4087	0,4105	0,4124	0,4142	75
25	0,4142	0,4161	0,4179	0,4197	0,4216	0,4234	0,4253	0,4272	0,4290	0,4309	0,4327	74
26	0,4327	0,4346	0,4365	0,4383	0,4402	0,4421	0,4440	0,4459	0,4477	0,4496	0,4515	73
27	0,4515	0,4534	0,4553	0,4572	0,4591	0,4610	0,4629	0,4648	0,4667	0,4686	0,4706	72
28	0,4706	0,4725	0,4744	0,4763	0,4783	0,4802	0,4821	0,4841	0,4860	0,4879	0,4899	71
29	0,4899	0,4918	0,4938	0,4958	0,4977	0,4997	0,5016	0,5036	0,5056	0,5075	0,5095	**70**
30	0,5095	0,5115	0,5135	0,5155	0,5175	0,5195	0,5215	0,5235	0,5255	0,5275	0,5295	69
31	0,5295	0,5315	0,5335	0,5355	0,5375	0,5396	0,5416	0,5436	0,5457	0,5477	0,5498	68
32	0,5498	0,5518	0,5539	0,5559	0,5580	0,5600	0,5621	0,5642	0,5662	0,5683	0,5704	67
33	0,5704	0,5725	0,5746	0,5767	0,5787	0,5808	0,5829	0,5851	0,5872	0,5893	0,5914	66
34	0,5914	0,5935	0,5956	0,5978	0,5999	0,6020	0,6042	0,6063	0,6085	0,6106	0,6128	65
35	0,6128	0,6150	0,6171	0,6193	0,6215	0,6237	0,6258	0,6280	0,6302	0,6324	0,6346	64
36	0,6346	0,6368	0,6390	0,6412	0,6435	0,6457	0,6479	0,6502	0,6524	0,6546	0,6569	63
37	0,6569	0,6591	0,6614	0,6636	0,6659	0,6682	0,6705	0,6727	0,6750	0,6773	0,6796	62
38	0,6796	0,6819	0,6842	0,6865	0,6888	0,6911	0,6935	0,6958	0,6981	0,7005	0,7028	61
39	0,7028	0,7052	0,7075	0,7099	0,7122	0,7146	0,7170	0,7194	0,7218	0,7241	0,7265	**60**
40	0,7265	0,7289	0,7314	0,7338	0,7362	0,7386	0,7410	0,7435	0,7459	0,7484	0,7508	59
41	0,7508	0,7533	0,7557	0,7582	0,7607	0,7632	0,7657	0,7682	0,7707	0,7732	0,7757	58
42	0,7757	0,7782	0,7807	0,7833	0,7858	0,7883	0,7909	0,7934	0,7960	0,7986	0,8012	57
43	0,8012	0,8037	0,8063	0,8089	0,8115	0,8141	0,8167	0,8194	0,8220	0,8246	0,8273	56
44	0,8273	0,8299	0,8326	0,8352	0,8379	0,8406	0,8433	0,8460	0,8487	0,8514	0,8541	55
45	0,8541	0,8568	0,8595	0,8623	0,8650	0,8678	0,8705	0,8733	0,8761	0,8788	0,8816	54
46	0,8816	0,8844	0,8872	0,8900	0,8928	0,8957	0,8985	0,9014	0,9042	0,9071	0,9099	53
47	0,9099	0,9128	0,9157	0,9186	0,9215	0,9244	0,9273	0,9302	0,9332	0,9361	0,9391	52
48	0,9391	0,9420	0,9450	0,9480	0,9510	0,9540	0,9570	0,9600	0,9630	0,9660	0,9691	51
49^g	0,9691	0,9721	0,9752	0,9782	0,9813	0,9844	0,9875	0,9906	0,9937	0,9969	1,0000	**50^g**
	100^c	90^c	80^c	70^c	60^c	50^c	40^c	30^c	20^c	10^c	00^c	
	Cotangenta											

Tabela 1.18 (*continuare*)

	Cotangenta											
	00^c	10^c	20^c	30^c	40^c	50^c	60^c	70^c	80^c	90^c	100^c	
0^g	∞	636,62	318,31	212,21	159,15	127,32	106,10	90,942	79,573	70,731	63,657	99^g
1	63,657	57,869	53,045	48,964	45,466	42,433	39,780	37,439	35,358	33,496	31,821	98
2	31,821	30,304	28,926	27,667	26,513	25,452	24,472	23,564	22,722	21,937	21,205	97
3	21,205	20,520	19,878	19,274	18,706	18,171	17,665	17,187	16,733	16,303	15,895	96
4	15,895	15,506	15,136	14,783	14,446	14,124	13,815	13,520	13,238	12,967	12,706	95
5	12,706	12,456	12,215	11,984	11,761	11,546	11,339	11,139	10,946	10,759	10,579	94
6	10,579	10,404	10,236	10,072	9,9137	9,7601	9,6112	9,4667	9,3264	9,1902	9,0579	93
7	9,0579	8,9293	8,8042	8,6826	8,5642	8,4490	8,3367	8,2274	8,1209	8,0171	7,9158	92
8	7,9158	7,8170	7,7207	7,6266	7,5348	7,4451	7,3575	7,2719	7,1882	7,1064	7,0264	91
9	7,0264	6,9481	6,8715	6,7966	6,7233	6,6514	6,5811	6,5122	6,4447	6,3786	6,3138	**90**
10	6,3138	6,2502	6,1879	6,1267	6,0668	6,0080	5,9502	5,8936	5,8380	5,7834	5,7297	89
11	5,7297	5,6771	5,6253	5,5745	5,5246	5,4755	5,4272	5,3798	5,3332	5,2873	5,2422	88
12	5,2422	5,1978	5,1542	5,1112	5,0689	5,0273	4,9864	4,9461	4,9064	4,8673	4,8288	87
13	4,8288	4,7909	4,7536	4,7168	4,6805	4,6448	4,6096	4,5749	4,5407	4,5070	4,4737	86
14	4,4737	4,4410	4,4086	4,3768	4,3453	4,3143	4,2837	4,2535	4,2237	4,1943	4,1653	85
15	4,1653	4,1367	4,1084	4,0805	4,0529	4,0257	3,9989	3,9724	3,9462	3,9203	3,8947	84
16	3,8947	3,8695	3,8446	3,8199	3,7956	3,7715	3,7477	3,7242	3,7010	3,6781	3,6554	83
17	3,6554	3,6330	3,6108	3,5889	3,5672	3,5457	3,5245	3,5036	3,4828	3,4623	3,4420	82
18	3,4420	3,4220	3,4021	3,3824	3,3630	3,3438	3,3247	3,3059	3,2873	3,2688	3,2506	81
19	3,2506	3,2325	3,2146	3,1969	3,1793	3,1620	3,1448	3,1278	3,1109	3,0942	3,0777	**80**
20	3,0777	3,0613	3,0451	3,0290	3,0131	2,9974	2,9818	2,9663	2,9510	2,9358	2,9208	79
21	2,9208	2,9059	2,8911	2,8765	2,8620	2,8476	2,8333	2,8192	2,8052	2,7914	2,7776	78
22	2,7776	2,7640	2,7505	2,7371	2,7238	2,7106	2,6976	2,6846	2,6718	2,6590	2,6464	77
23	2,6464	2,6339	2,6215	2,6092	2,5970	2,5848	2,5728	2,5609	2,5491	2,5373	2,5257	76
24	2,5257	2,5142	2,5027	2,4913	2,4801	2,4689	2,4578	2,4468	2,4358	2,4250	2,4142	75
25	2,4142	2,4035	2,3929	2,3824	2,3719	2,3616	2,3513	2,3411	2,3309	2,3209	2,3109	74
26	2,3109	2,3009	2,2911	2,2813	2,2716	2,2620	2,2524	2,2429	2,2334	2,2241	2,2148	73
27	2,2148	2,2055	2,1963	2,1872	2,1782	2,1692	2,1602	2,1514	2,1426	2,1338	2,1251	72
28	2,1251	2,1165	2,1079	2,0994	2,0909	2,0825	2,0741	2,0658	2,0576	2,0494	2,0413	71
29	2,0413	2,0332	2,0251	2,0171	2,0092	2,0013	1,9935	1,9857	1,9779	1,9703	1,9626	**70**
30	1,9626	1,9550	1,9475	1,9400	1,9325	1,9251	1,9177	1,9104	1,9031	1,8959	1,8887	69
31	1,8887	1,8815	1,8744	1,8673	1,8603	1,8533	1,8464	1,8395	1,8326	1,8258	1,8190	68
32	1,8190	1,8122	1,8055	1,7989	1,7922	1,7856	1,7791	1,7725	1,7661	1,7596	1,7532	67
33	1,7532	1,7468	1,7405	1,7341	1,7279	1,7216	1,7154	1,7092	1,7031	1,6970	1,6909	66
34	1,6909	1,6849	1,6788	1,6729	1,6669	1,6610	1,6551	1,6492	1,6434	1,6376	1,6319	65
35	1,6319	1,6261	1,6204	1,6147	1,6091	1,6034	1,5979	1,5923	1,5867	1,5812	1,5757	64
36	1,5757	1,5703	1,5649	1,5595	1,5541	1,5487	1,5434	1,5381	1,5328	1,5276	1,5224	63
37	1,5224	1,5172	1,5120	1,5068	1,5017	1,4966	1,4915	1,4865	1,4814	1,4764	1,4715	62
38	1,4715	1,4665	1,4616	1,4566	1,4517	1,4469	1,4420	1,4372	1,4324	1,4276	1,4229	61
39	1,4229	1,4181	1,4134	1,4087	1,4040	1,3994	1,3947	1,3901	1,3855	1,3809	1,3764	**60**
40	1,3764	1,3718	1,3673	1,3628	1,3584	1,3539	1,3495	1,3450	1,3406	1,3362	1,3319	59
41	1,3319	1,3275	1,3232	1,3189	1,3146	1,3103	1,3061	1,3018	1,2976	1,2934	1,2892	58
42	1,2892	1,2850	1,2809	1,2767	1,2726	1,2685	1,2644	1,2603	1,2563	1,2522	1,2482	57
43	1,2482	1,2442	1,2402	1,2362	1,2323	1,2283	1,2244	1,2205	1,2166	1,2127	1,2088	56
44	1,2088	1,2049	1,2011	1,1973	1,1934	1,1896	1,1859	1,1821	1,1783	1,1746	1,1708	55
45	1,1708	1,1671	1,1634	1,1597	1,1561	1,1524	1,1487	1,1415	1,1415	1,1379	1,1343	54
46	1,1343	1,1307	1,1271	1,1236	1,1200	1,1165	1,1130	1,1094	1,1059	1,1025	1,0990	53
47	1,0990	1,0955	1,0921	1,0886	1,0852	1,0818	1,0784	1,0750	1,0716	1,0682	1,0649	52
48	1,0649	1,0615	1,0582	1,0549	1,0516	1,0483	1,0450	1,0417	1,0384	1,0352	1,0319	51
49^g	1,0319	1,0287	1,0255	1,0222	1,0190	1,0158	1,0126	1,0095	1,0063	1,0031	1,0000	**50^g**
	100^c	90^c	80^c	70^c	60^c	50^c	40^c	30^c	20^c	10^c	00^c	
	Tangenta											

Tabela 1.19. **Logaritmii cu cinci zecimale ai funcţiilor trigo-**

0°

0°	lg sin	+ d 1″	lg cos	− d 1″	lg tg	+ d 1″	lg cotg	− d 1″	
0′	−∞		0,00 000	0,00	−∞		+∞		60′
1	$\overline{4}$,46 373	501,72	00 000	00	$\overline{4}$,46 373	501,72	3,53 627	501,72	59
2	76 476	293,48	00 000	00	76 476	293,48	23 524	293,48	58
3	94 085	208,23	00 000	00	94 085	208,23	05 915	208,23	57
4	$\overline{3}$,06 579	161,52	00 000	0,00	$\overline{3}$,06 579	161,52	2,93 421	161,52	56
5	16 270	131,97	00 000	00	16 270	131,97	83 730	131,97	55
6	24 188	111,57	00 000	00	24 188	111,57	75 812	111,57	54
7	30 882	96,67	00 000	00	30 882	96,67	69 118	96,67	53
8	36 682	85,25	00 000	00	36 682	85,25	63 318	85,25	52
9	41 797	76,27	00 000	0,00	41 797	76,27	58 203	76,27	51
10′	$\overline{3}$,46 373	68,98	0,00 000	00	$\overline{3}$,46 373	68,98	2,53 627	68,98	50′
11	50 512	62,98	00 000	00	50 512	62,98	49 488	62,98	49
12	54 291	57,93	00 000	00	54 291	57,93	45 709	57,93	48
13	57 767	53,63	00 000	00	57 767	53,65	42 233	53,65	47
14	60 985	49,95	00 000	0,00	60 986	49,93	39 014	49,93	46
15	63 982	46,70	00 000	00	63 982	46,72	36 018	46,72	45
16	66 784	43,88	00 000	02	66 785	43,88	33 215	43,88	44
17	69 417	41,38	$\overline{1}$,99 999	00	69 418	41,37	30 582	41,37	43
18	71 900	39,13	99 999	00	71 900	39,13	28 100	39,13	42
19	74 248	37,12	99 999	0,00	74 248	37,13	25 752	37,13	41
20′	$\overline{3}$,76 475	35,32	$\overline{1}$,99 999	00	$\overline{3}$,76 476	35,32	2,23 524	35,32	40′
21	78 594	33,68	99 999	00	78 595	33,67	21 405	33,67	39
22	80 615	32,17	99 999	00	80 615	32,18	19 385	32,18	38
23	82 545	30,80	99 999	00	82 546	30,80	17 454	30,80	37
24	84 393	29,55	99 999	0,00	84 394	29,55	15 606	29,55	36
25	86 166	28,40	99 999	00	86 167	28,40	13 833	28,40	35
26	87 870	27,32	99 999	00	87 871	27,32	12 129	27,32	34
27	89 509	26,32	99 999	00	89 510	26,32	10 490	26,32	33
28	91 088	25,40	99 999	02	91 089	25,40	08 911	25,40	32
29	92 612	24,53	99 998	0,00	92 613	24,55	07 387	24,55	31
30′	$\overline{3}$,94 084		$\overline{1}$,99 998		$\overline{3}$,94 086		2,05 914		30′
	lg cos	− d 1″	lg sin	+ d 1″	lg cotg	− d 1″	lg tg	+ d 1″	89°

0°	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68
	0	0	558	557	10	600	557	558	20	1200	557	558
	1	60	558	557	11	660	557	558	21	1260	557	558
	2	120	558	557	12	720	557	558	22	1320	557	558
	3	180	558	557	13	780	557	558	23	1380	557	558
	4	240	558	557	14	840	557	558	24	1440	557	558
	5	300	557	558	15	900	557	558	25	1500	557	558
	6	360	557	558	16	960	557	558	26	1560	557	558
	7	420	557	558	17	1020	557	558	27	1620	557	558
	8	480	557	558	18	1080	557	558	28	1680	557	558
	9	540	557	558	19	1140	557	558	29	1740	557	558

89°

nometrice ale arcelor de la 0 pînă la 90 din minut în minut

0°

0°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{3}$,94 084	23,73	$\overline{1}$,99 998	0,00	$\overline{3}$,94 086	23,73	2,05 914	23,73	**30′**
31	95 508	22,98	99 998	00	95 510	22,98	04 490	22,98	**29**
32	96 887	22,27	99 998	00	96 889	22,27	03 111	22,27	**28**
33	98 223	21,62	99 998	00	98 225	21,62	01 775	21,62	**27**
34	99 520	20,98	99 998	0,00	99 522	20,98	00 478	20,98	**26**
35	$\overline{2}$,00 779	20,38	99 998	0,00	$\overline{2}$,00 781	20,38	1,99 219	20,38	**25**
36	02 002	19,83	99 998	02	02 004	19,83	97 996	19,83	**24**
37	03 192	19,30	99 997	00	03 194	19,32	96 806	19,32	**23**
38	04 350	18,80	99 997	00	04 353	18,80	95 647	18,80	**22**
39	05 478	18,33	99 997	0,00	05 481	18,33	94 519	18,33	**21**
40′	$\overline{2}$,06 578	17,87	$\overline{1}$,99 997	00	$\overline{2}$,06 581	17,87	1,93 419	17,87	**20′**
41	07 650	17,43	99 997	00	07 653	17,45	92 347	17,45	**19**
42	08 696	17,03	99 997	00	08 700	17,03	91 300	17,03	**18**
43	09 718	16,65	99 997	02	09 722	16,63	90 278	16,63	**17**
44	10 717	16,27	99 996	0,00	10 720	16,27	89 280	16,27	**16**
45	11 693	15,90	99 996	00	11 696	15,92	88 304	15,92	**15**
46	12 647	15,57	99 996	00	12 651	15,57	87 349	15,57	**14**
47	13 581	15,23	99 996	00	13 585	15,25	86 415	15,25	**13**
48	14 495	14,93	99 996	00	14 500	14,92	85 500	14,92	**12**
49	15 391	14,62	99 996	0,02	15 395	14,63	84 605	14,63	**11**
50′	$\overline{2}$,16 268	14,33	$\overline{1}$,99 995	00	$\overline{2}$,16 273	14,33	1,83 727	14,33	**10′**
51	17 128	14,05	99 995	00	17 133	14,05	82 867	14,05	**9**
52	17 971	13,78	99 995	00	17 976	13,80	82 024	13,80	**8**
53	18 798	13,53	99 995	00	18 804	13,53	81 196	13,53	**7**
54	19 610	13,28	99 995	0,02	19 616	13,28	80 384	13,28	**6**
55	20 407	13,03	99 994	00	20 413	13,03	79 587	13,03	**5**
56	21 189	12,82	99 994	00	21 195	12,82	78 805	12,82	**4**
57	21 958	12,58	99 994	00	21 964	12,60	78 036	12,60	**3**
58	22 713	12,38	99 994	00	22 720	12,37	77 280	12,37	**2**
59	23 456	12,17	99 994	0,02	23 462	12,17	76 538	12,17	**1**
60′	$\overline{2}$,24 186		$\overline{1}$,99 993		$\overline{2}$,24 192		1,75 808		**0′**
	lg cos	−d1″	lg sin	+d1″	lg cotg	−d1″	lg tg	+d1″	**89°**

0° ′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,69	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68
30	1800	557	559	**40**	2400	557	559	**50**	3000	556	561
31	1860	557	559	**41**	2460	556	560	**51**	3060	556	561
32	1920	557	559	**42**	2520	556	560	**52**	3120	556	561
33	1980	557	559	**43**	2580	556	560	**53**	3180	556	561
34	2040	557	559	**44**	2640	556	560	**54**	3240	556	561
35	2100	557	559	**45**	2700	556	560	**55**	3300	556	561
36	2160	557	559	**46**	2760	556	560	**56**	3360	556	561
37	2220	557	559	**47**	2820	556	560	**57**	3420	556	562
38	2280	557	559	**48**	2880	556	560	**58**	3480	555	562
39	2340	557	559	**49**	2940	556	560	**59**	3540	555	562

89°

1°

0°	lg sin	+ d 1″	lg cos	— d 1″	lg tg	+ d 1″	lg cotg	— d 1″	
0′	$\overline{2}$,24 186	11,95	$\overline{1}$,99 993	0,00	$\overline{2}$,24 192	11,97	1,75 808	11,97	60′
1	24 903	77	99 993	00	24 910	77	75 090	77	59
2	25 609	58	99 993	00	25 616	60	74 384	60	58
3	26 304	40	99 993	02	26 312	40	73 688	40	57
4	26 988	11,22	99 992	0,00	26 996	11,22	73 004	11,22	56
5	27 661	05	99 992	00	27 669	05	72 331	05	55
6	28 324	10,88	99 992	00	28 332	10,90	71 668	10,90	54
7	28 977	73	99 992	00	28 986	72	71 014	72	53
8	29 621	57	99 992	02	29 629	57	70 371	57	52
9	30 255	10,40	99 991	0,00	30 263	10,42	69 737	10,42	51
10′	$\overline{2}$,30 879	27	$\overline{1}$,99 991	00	$\overline{2}$,30 888	28	1,69 112	28	50′
11	31 495	13	99 991	02	31 505	12	68 495	12	49
12	32 103	9,98	99 990	00	32 112	9,98	67 888	9,98	48
13	32 702	83	99 990	00	32 711	85	67 289	85	47
14	33 292	9,72	99 990	0,00	33 302	9,73	66 698	9,73	46
15	33 875	58	99 990	02	33 886	58	66 114	58	45
16	34 450	47	99 989	00	34 461	47	65 539	47	44
17	35 018	33	99 989	00	35 029	35	64 971	35	43
18	35 578	22	99 989	00	35 590	22	64 410	22	42
19	36 131	9,12	99 989	0,02	36 143	9,10	63 857	9,10	41
20′	$\overline{2}$,36 678	8,98	$\overline{1}$,99 988	00	$\overline{2}$,36 689	00	1,63 311	00	40′
21	37 217	88	99 988	00	37 229	8,88	62 771	8,88	39
22	37 750	77	99 988	02	37 762	78	62 238	78	38
23	38 276	67	99 987	00	38 289	67	61 711	67	37
24	38 796	8,57	99 987	0,00	38 809	8,57	61 191	8,57	36
25	39 310	47	99 987	02	39 323	48	60 677	48	35
26	39 818	37	99 986	00	39 832	37	60 168	37	34
27	40 320	27	99 986	00	40 334	27	59 666	27	33
28	40 816	18	99 986	02	40 830	18	59 170	18	32
29	41 307	8,08	99 985	0,00	41 321	8,10	58 679	8,10	31
30′	$\overline{2}$,41 792		$\overline{1}$,99 985		$\overline{2}$,41 807		1,58 193		30′
	lg cos	— d 1″	lg sin	+ d 1″	lg cotg	— d 1″	lg tg	+ d 1″	88°

1°	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68
	0	3600	555	562	10	4200	555	564	20	4800	554	565
	1	3660	555	562	11	4260	554	564	21	4860	554	566
	2	3720	555	562	12	4320	554	564	22	4920	553	566
	3	3780	555	562	13	4380	554	564	23	4980	353	566
	4	3840	555	563	14	4440	554	564	24	5040	553	566
	5	3900	555	563	15	4500	554	564	25	5100	553	566
	6	3960	555	563	16	4560	554	565	26	5160	553	567
	7	4020	555	563	17	4620	554	565	27	5220	553	567
	8	4080	555	563	18	4680	554	565	28	5280	553	567
	9	4140	555	563	19	4740	554	565	29	5340	553	567

88°

1°

1°	lg sin	+ d 1"	lg cos	— d 1"	lg tg	+ d 1"	lg cotg	— d 1"	
30'	$\overline{2}$,41 792	8,00	$\overline{1}$,99 985	0,00	$\overline{2}$,41 807	8,00	1,58 193	8,00	30'
31	42 272	7,90	99 985	02	42 287	7,92	57 713	7,92	29
32	42 746	83	99 984	00	42 762	83	57 238	83	28
33	43 216	73	99 984	00	43 232	73	56 768	73	27
34	43 680	7,65	99 984	0,02	43 696	7,67	56 304	7,67	26
35	44 139	58	99 983	00	44 156	58	55 844	58	25
36	44 594	50	99 983	00	44 611	50	55 389	50	24
37	45 044	42	99 983	02	45 061	43	54 939	43	23
38	45 489	35	99 982	00	45 507	35	54 493	35	22
39	45 930	7,27	99 982	0,00	45 948	7,28	54 052	7,28	21
40'	$\overline{2}$,46 366	22	$\overline{1}$,99 982	02	$\overline{2}$,46 385	20	$\overline{1}$,53 615	20	20'
41	46 799	12	99 981	00	46 817	13	53 183	13	19
42	47 226	07	99 981	00	47 245	07	52 755	07	18
43	47 650	6,98	99 981	02	47 669	00	52 331	00	17
44	48 069	6,93	99 980	0,00	48 089	6,93	51 911	6,93	16
45	48 485	85	99 980	02	48 505	87	51 495	87	15
46	48 896	80	99 979	00	48 917	80	51 083	80	14
47	49 304	73	99 979	00	49 325	73	50 675	73	13
48	49 708	67	99 979	02	49 729	68	50 271	68	12
49	50 108	6,60	99 978	0,00	50 130	6,62	49 870	6,62	11
50'	$\overline{2}$,50 504	65	$\overline{1}$,99 978	02	$\overline{2}$,50 527	55	1,49 473	55	10'
51	50 897	50	99 977	00	50 920	50	49 080	50	9
52	51 287	43	99 977	00	51 310	43	48 690	43	8
53	51 673	37	99 977	02	51 696	38	48 304	38	7
54	52 055	6,32	99 976	0,00	52 079	6,33	47 921	6,33	6
55	52 434	27	99 976	02	52 459	27	47 541	27	5
56	52 810	22	99 975	00	52 835	22	47 165	22	4
57	53 183	15	99 975	02	53 208	17	46 792	17	3
58	53 552	12	99 974	00	53 578	12	46 422	12	2
59	53 919	6,05	99 974	0.00	53 945	6,05	46 055	6,05	1
60'	$\overline{2}$,54 282		$\overline{1}$,99 974		$\overline{2}$,54 308		1,45 692		0'
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	88°

1° '	"	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	'	"	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	'	"	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68
30	5400	553	567	40	6000	551	570	50	6600	550	572
31	5460	552	568	41	6060	551	570	51	6660	550	573
32	5520	552	568	42	6120	551	570	52	6720	550	573
33	5580	552	568	43	6180	551	571	53	6780	550	573
34	5640	552	568	44	6240	551	571	54	6840	550	573
35	5700	552	569	45	6300	551	571	55	6900	549	574
36	5760	552	569	46	6360	551	571	56	6960	549	574
37	5820	552	569	47	6420	551	572	57	7020	549	574
38	5880	552	569	48	6480	550	572	58	7080	549	575
39	5940	552	570	49	6540	550	572	59	7140	549	575

88°

2°

2°	lg sin	+ d 1″	lg cos	— d 1″	lg tg	+ d 1″	lg cotg	— d 1″	
0′	$\overline{2}$,54 282	6,00	$\overline{1}$,99 974	0,02	$\overline{2}$,54 308	6,02	1,45 692	6,02	60′
1	54 642	5,95	99 973	00	54 669	5,97	45 331	5,97	59
2	54 999	92	99 973	02	55 027	92	44 973	92	58
3	55 354	85	99 972	00	55 382	87	44 618	87	57
4	55 705	5,82	99 972	0,02	55 734	5,82	44 266	5,82	56
5	56 054	77	99 971	00	56 083	77	43 917	77	55
6	56 400	72	99 971	02	56 429	73	43 571	73	54
7	56 743	68	99 970	00	56 773	68	43 227	68	53
8	57 084	62	99 970	02	57 114	63	42 886	63	52
9	57 421	5,60	99 969	0,00	57 452	5,60	42 548	5,60	51
10′	$\overline{2}$,57 757	53	$\overline{1}$,99 969	02	$\overline{2}$,57 788	55	1,42 212	55	50′
11	58 089	50	99 968	00	58 121	50	41 879	50	49
12	58 419	47	99 968	02	58 451	47	41 549	47	48
13	58 747	42	99 967	00	58 779	43	41 221	43	47
14	59 072	5,38	99 967	0,00	59 105	5,38	40 895	5,38	46
15	59 395	33	99 967	02	59 428	35	40 572	35	45
16	59 715	30	99 966	00	59 749	32	40 251	32	44
17	60 033	27	99 966	02	60 068	27	39 932	27	43
18	60 349	22	99 965	02	60 384	23	39 616	23	42
19	60 662	5,18	99 964	0,00	60 698	5,18	39 302	5,18	41
20′	$\overline{2}$,60 973	15	$\overline{1}$,99 964	02	$\overline{2}$,61 009	17	1,38 991	17	40′
21	61 282	12	99 963	00	61 319	12	38 681	12	39
22	61 589	08	99 963	02	61 626	08	38 374	08	38
23	61 894	03	99 962	00	61 931	05	38 069	05	37
24	62 196	5,02	99 962	0,02	62 234	5,02	37 766	5,02	36
25	62 497	4,97	99 961	00	62 535	4,98	37 465	4,98	35
26	62 795	93	99 961	02	62 834	95	37 166	95	34
27	63 091	90	99 960	00	63 131	92	36 869	92	33
28	63 385	88	99 960	02	63 426	87	36 574	87	32
29	63 678	4,83	99 959	0,00	63 718	4,85	36 282	4,85	31
30′	$\overline{2}$,63 968		$\overline{1}$,99 959		$\overline{2}$,64 009		1,35 991		30′
	lg cos	— 1 d″	lg sin	+ d 1″	lg cotg	— d 1″	lg tg	+ d 1″	87°

2°	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68
	0	7200	549	575	10	7800	547	578	20	8400	546	582
	1	7260	549	575	11	7860	547	579	21	8460	545	582
	2	7320	548	576	12	7920	547	579	22	8520	545	582
	3	7380	548	576	13	7980	547	579	23	8580	545	583
	4	7440	548	576	14	8040	547	580	24	8640	545	583
	5	7500	548	577	15	8100	546	580	25	8700	545	583
	6	7560	548	577	16	8160	546	580	26	8760	544	584
	7	7620	548	577	17	8220	546	581	27	8820	544	584
	8	7680	548	578	18	8280	546	581	28	8880	544	584
	9	7740	547	578	19	8340	546	581	29	8940	544	585

87°

P. P.

d 1″	0,02	4,83	4,85	4,87	4,88	4,90	4,92	4,93	4,95	4,97
6″	0,1	29,0	29,1	29,2	29,3	29,4	29,5	29,6	29,7	29,8
7	0'1	33,8	34,0	34,1	34,2	34,3	34,4	34,5	34,7	34,8
8	0,1	38,7	38,8	38,9	39,1	39,2	39,3	39,5	39,6	39,7
9	0,2	43,5	43,7	43,8	44,0	44,1	44,3	44,4	44,6	44,7
10	0,2	48,3	48,5	48,7	48,8	49,0	49,2	49,3	49,5	49,7
20	0.3	96,7	97,0	97,3	97,7	98,0	98,3	98,7	99,0	99,3
30	0,5	145,0	145,5	146,0	146,5	147,0	147,5	148,0	148,5	149,0
40	0,7	193,3	194,0	194,7	195,3	196,0	196,7	197,3	198,0	198,7
50	0,8	241,7	242,5	243,3	244,2	245,0	245,8	246.7	247,5	248,3

d 1″	4,98	5,02	5,03	5,05	5,08	5,12	5,15	5,17	5,18	5,22
6″	29.9	30,1	30,2	30,3	30,5	30,7	30,9	31,0	31,1	31,3
7	34,9	35,1	35,2	35,4	35,6	35,8	36,1	36,2	36,3	36,5
8	39,9	40,1	40,3	40,4	40,7	40,9	41,2	41,3	41,5	41,7
9	44,9	45,2	45,3	45,5	45,8	46,1	46.4	46,5	46,7	47,0
10	49,8	50,2	50,3	50,5	50,8	51,2	51,5	51,7	51,8	52,2
20	99.7	100,3	100,7	101,0	101,7	102,3	103,0	103,3	103,7	104,3
30	149.5	150,5	151,0	151,5	152,5	153,5	154,5	155,0	155,5	156,5
40	199,3	200,7	201,3	202,0	203,3	204,7	206,0	206,7	207,3	208,7
50	249,2	250,8	251,7	252,5	254,2	255,8	257,5	258,3	259,2	260,8

d 1″	5,23	5,27	5,30	5,32	5,33	5,35	5,38	5,42	5,43	5,47
6″	31,4	31,6	31,8	31,9	32,0	32,1	32,3	32,5	32,6	32,8
7	36,6	36,9	37,1	37,2	37,3	37,5	37,7	37,9	38,0	38,3
8	41,9	42,1	42,4	42,5	42.7	42,8	43,1	43,3	43,5	43,7
9	47,1	47,4	47,7	47,9	48,0	48,2	48,5	48,8	48,9	49,2
10	52,3	52,7	53'0	53,2	53,3	53,5	53,8	54,2	54,3	54,7
20	104,7	105,3	106,0	106,3	106,7	107,0	107,7	108,3	108,7	109,3
30	157,0	158,0	159,0	159,5	160,0	160,5	161,5	162,5	163,0	164,0
40	209,3	210,7	212,0	212,7	213,3	214,0	215,3	216,7	217,3	218,7
50	261,7	262,3	265,0	265,8	266,7	267,5	269,2	270,8	271,7	273,3

d 1″	5,50	5,53	5,55	5,60	5,62	5,63	5,68	5,72	5,73	5,77
6″	33,0	33,2	33,3	33,6	33,7	33,8	34,1	34,3	34,4	34,6
7	38,5	38,7	38,9	39,2	39,3	39,4	39,8	40,0	40,1	40,4
8	44,0	44,3	44,4	44,8	44,9	45,1	45,5	45,7	45,9	46,1
9	49,5	49,8	50,0	50,4	50,6	50,7	51,2	51,5	51,6	51,9
10	55,0	55,3	55,5	56,0	56,2	56,3	56,8	57,2	57,3	57,7
20	110,0	110,7	111,0	112,0	112,3	112,7	113,7	114,3	114,7	115,3
30	165,0	166,0	166,5	168,0	168,5	169,0	170,5	171,5	172,0	173,0
40	220,0	221,3	222,0	224,0	224,7	225,3	227,3	228,7	229,3	230,7
50	275,0	276,7	277,5	280,0	280,8	281,7	284,2	285,8	286,7	288,3

d 1″	5,82	5,85	5,87	5,92	5,95	5,97	6,00	6,02
6″	34,9	35,1	35,2	35,5	35,7	35,8	36,0	36,1
7	40,7	41,0	41,1	41,4	41,7	41,8	42,0	42,1
8	46,5	46,8	46,9	47,3	47,6	47,7	48,0	48,1
9	52,4	52,7	52,8	53,3	53,6	53,7	54,0	54,2
10	58,2	58,5	58,7	59,2	59,5	59,7	60,0	60,2
20	116,3	117,0	117,3	118,3	119,0	119,3	120,0	120,3
30	174,5	175,5	176,0	177,5	178,5	179,0	180,0	180,5
40	232,7	243,0	234,7	236,7	238,0	238,7	240,0	240,7
50	290,8	292,5	293,3	295,8	297,5	298,3	300,0	300,8

2°

2°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\overline{2}$,63 968	4,80	$\overline{1}$,99 959	0,02	$\overline{2}$,64 009	4,82	1,35 991	4,82	30′
31	64 256	78	99 958	00	64 298	78	35 702	78	29
32	64 543	73	99 958	02	64 585	75	35 415	75	28
33	64 827	72	99 957	02	64 870	73	35 130	73	27
34	65 110	4,68	99 956	0,00	65 154	4,68	34 846	4,68	26
35	65 391	65	99 956	02	65 435	67	34 565	67	25
36	65 670	62	99 955	00	65 715	63	34 285	63	24
37	65 947	60	99 955	02	65 993	60	34 007	60	23
38	66 223	57	99 954	00	66 269	57	33 731	57	22
39	66 497	4,53	99 954	0,02	66 543	4,55	33 457	4,55	21
40′	$\overline{2}$,66 769	50	$\overline{1}$,99 953	02	$\overline{2}$,66 816	52	1,33 184	52	20′
41	67 039	48	99 952	00	67 087	48	32 913	48	19
42	67 308	45	99 952	02	67 356	47	32 644	47	18
43	67 575	43	99 951	00	67 624	43	32 376	43	17
44	67 841	4,38	99 951	0,02	67 890	4,40	32 110	4,40	16
45	68 104	38	99 950	02	68 154	38	31 846	38	15
46	68 367	33	99 949	00	68 117	35	31 583	35	14
47	68 627	32	99 949	02	68 678	33	31 322	33	13
48	68 886	30	99 948	00	68 938	30	31 062	30	12
49	69 144	4,27	99 948	0,02	69 196	4,28	30 804	4,28	11
50′	$\overline{2}$,69 400	23	$\overline{1}$,99 947	02	$\overline{2}$,69 453	25	1,30 547	25	10′
51	69 654	22	99 946	00	69 708	23	30 292	23	9
52	69 907	20	99 946	02	69 962	20	30 038	20	8
53	70 159	17	99 945	02	70 214	18	29 786	18	7
54	70 409	4,15	99 944	0,00	70 465	4,15	29 535	4,15	6
55	70 658	12	99 944	02	70 714	13	29 286	13	5
56	70 905	10	99 943	02	70 962	10	29 038	10	4
57	71 151	07	99 942	00	71 208	08	28 792	08	3
58	71 395	05	99 942	02	71 453	07	28 547	07	2
59	71 638	4,03	99 941	0,02	71 697	4,05	28 303	4,05	1
60′	$\overline{2}$,71 880		$\overline{1}$,99 940		$\overline{2}$,71 940		1,28 060		0′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	87°

2° ′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68	′	″	S:$\overline{6}$,68	T:$\overline{6}$,68
30	9000	544	585	40	9600	542	589	50	10200	540	593
31	9060	544	585	41	9660	542	589	51	10260	540	593
32	9120	543	586	42	9720	541	590	52	10320	539	594
33	9180	543	586	43	9780	541	590	53	10380	539	594
34	9240	543	587	44	9840	541	591	54	10440	539	595
35	9300	543	587	45	9900	541	591	55	10500	539	595
36	9360	543	587	46	9960	541	591	56	10560	539	596
37	9420	542	588	47	10020	540	592	57	10620	538	596
38	9480	542	588	48	10080	540	592	58	10680	538	596
39	9540	542	589	49	10140	540	593	59	10740	538	597

87°

P.P.

d 1"	0,02	4,03	4,05	4,07	4,08	4,10	4,12	4,13	4,15
6"	0,1	24,2	24,3	24,4	24,5	24,6	24,7	24,8	24,9
7	0,1	28,2	28,4	28,5	28,6	28,7	28,8	28,9	29,1
8	0,1	32,3	32,4	32,5	32,7	32,8	32,9	33,1	33,2
9	0,2	36,3	36,5	36,6	36,8	36,9	37,1	37,2	37,4
10	0,2	40,3	40,5	40,7	40,8	41,0	41,2	41,3	41,5
20	0,3	80,7	81,0	81,3	81,7	82,0	82,3	82,7	83,0
30	0,5	121,0	121,5	122,0	122,5	123,0	123,5	124,0	124,5
40	0,7	161,3	162,0	162,7	163,3	164,0	164,7	165,3	166,0
50	0,8	201,7	202,5	203,3	204,2	205,0	205,8	206,7	207,5

d 1"	4,17	4,18	4,20	4,22	4,23	4,25	4,27	4,28	4,30
6"	25,0	25,1	25,2	25,3	25,4	25,5	25,6	25,7	25,8
7	29,2	29,3	29,4	29,5	29,6	29,8	29,9	30,0	30,1
8	33,3	33,5	33,6	33,7	33,9	34,0	34,1	34,3	34,4
9	37,5	37,7	37,8	38,0	38,1	38,3	38,4	38,6	38,7
10	41,7	41,8	42,0	42,2	42,3	42,5	42,7	42,8	43,0
20	83,3	83,7	84,0	84,3	84,7	85,0	85,3	85,7	86,0
30	125,0	125,5	126,0	126,5	127,0	127,5	128,0	128,5	129,0
40	166,7	167,3	168,0	168,7	169,3	170,0	170,7	171,3	172,0
50	208,3	209,2	210,0	210,8	211,7	212,5	213,3	214,2	215,0

d 1"	4,32	4,33	4,35	4,38	4,40	4,43	4,45	4,47	4,48
6"	25,9	26,0	26,1	26,3	26,4	26,6	26,7	26,8	26,9
7	30,2	30,3	30,5	30,7	30,8	31,0	31,2	31,3	31,4
8	34,5	34,7	34,8	35,1	35,2	35,5	35,6	35,7	35,9
9	38,9	39,0	39,2	39,5	39,6	39,9	40,1	40,2	40,4
10	43,2	43,3	43,5	43,8	44,0	44,3	44,5	44,7	44,8
20	86,3	86,7	87,0	87,7	88,0	48,7	89,0	89,3	89,7
30	129,5	130,0	130,5	131,5	132,0	133,0	133,5	134,0	134,5
40	172,7	173,3	174,0	175,3	176,0	177,3	178,0	178,7	179,3
50	215,8	216,7	217,5	219,2	220,0	221,7	222,5	223,3	224,2

d 1"	4,50	4,52	4,53	4,55	4,57	4,60	4,62	4,63	4,65
6"	27,0	27,1	27,2	27,3	27,4	27,6	27,7	27,8	27,9
7	31,5	31,6	31,7	31,9	32,0	32,2	32,3	32,4	32,6
8	36,0	36,1	36,3	36,4	36,5	36,8	36,9	37,1	37,2
9	40,5	40,7	40,8	41,0	41,1	41,4	41,6	41,7	41,9
10	45,0	45,2	45,3	45,5	45,7	46,0	46,2	46,3	46,5
20	90,0	90,3	90,7	91,0	91,3	92,0	92,3	92,7	93,0
30	135,0	135,5	136,0	136,5	137,0	138,0	138,5	139,0	139,5
40	180,0	180,7	181,3	182,0	182,7	184,0	184,7	185,3	186,0
50	225,0	225,8	226,7	227,5	228,3	230,0	230,8	231,7	232,5

d 1"	4,67	4,68	4,72	4,73	4,75	4,78	4,80	4,82
6"	28,0	28,1	28,3	28,4	28,5	28,7	28,8	28,9
7	32,7	32,8	33,0	33,1	33,3	33,5	33,6	33,7
8	37,3	37,5	37,7	37,9	38,0	38,3	38,4	38,5
9	42,0	42,2	42,5	42,6	42,8	43,1	43,2	43,4
10	46,7	46,8	47,2	47,3	47,5	47,8	48,0	48,2
20	93,3	93,7	94,3	94,7	95,0	95,7	96,0	96,3
30	140,0	140,5	141,5	142,0	142,5	143,5	144,0	144,5
40	186,7	187,3	188,7	189,3	191,0	191,3	192,0	192,7
50	233,3	234,2	235,8	236,7	237,5	239,2	240,0	240,8

3°

3°	lg sin	+ d 1″	lg cos	− d 1″	lg tg	+ d 1″	lg cotg	− d 1″	
0′	$\bar{2}$,71 880	4,00	$\bar{1}$,99 940	0,00	$\bar{2}$,71 940	4,02	1,28 060	4,02	60′
1	72 120	3,98	99 940	02	72 181	3,98	27 819	3,98	59
2	72 359	97	99 939	02	72 420	98	27 580	98	58
3	72 597	95	99 938	00	72 659	95	27 341	95	57
4	72 834		99 938		72 896		27 104		56
—	—	3,92	—	0,02	—	3,93	—	3,93	
5	73 069	90	99 937	02	73 132	90	26 868	90	55
6	73 303	87	99 936	00	73 366	90	26 634	90	54
7	73 535	87	99 936	02	73 600	87	26 400	87	53
8	73 767	83	99 935	02	73 832	85	26 168	85	52
9	73 997		99 934		74 063		25 937		51
—	—	3,82	—	0,00	—	3,82	—	3,82	—
10′	$\bar{2}$,74 226	80	$\bar{1}$,99 934	02	$\bar{2}$,74 292	82	1,25 708	82	50′
11	74 454	77	99 933	02	74 521	78	25 479	78	49
12	74 680	77	99 932	00	74 748	77	25 252	77	48
13	74 906	73	99 932	02	74 974	75	25 026	75	47
14	75 130		99 931		75 199		24 801		46
	—	3,72	—	0,02	—	3,73	—	3,73	
15	75 353	70	99 930	02	75 423	70	24 577	70	45
16	75 575	67	99 929	00	75 645	70	24 355	70	44
17	75 795	67	99 929	02	75 867	67	24 133	67	43
18	76 015	65	99 928	02	76 087	65	23 913	65	42
19	76 234		99 927		76 306		23 694		41
—	—	3,62	—	0,02	—	3,65	—	3,65	—
20′	$\bar{2}$,76 451	60	$\bar{1}$,99 926	00	$\bar{2}$,76 525	62	1,23 475	62	40′
21	76 667	60	99 926	02	76 742	60	23 258	60	39
22	76 883	57	99 925	02	76 958	58	23 042	58	38
23	77 097	55	99 924	02	77 173	57	22 827	57	37
24	77 310		99 923		77 387		22 613		36
	—	3,53	—	0,00	—	3,55	—	3,55	
25	77 522	52	99 923	02	77 600	52	22 400	52	35
26	77 733	50	99 922	02	77 811	52	22 189	52	34
27	77 943	48	99 921	02	78 022	50	21 978	50	33
28	78 152	47	99 920	00	78 232	48	21 768	48	32
29	78 360		99 920		78 441		21 559		31
—	—	3,47	—	0,02	—	3,47	—	3,47	—
30′	$\bar{2}$,78 568		$\bar{1}$,99 919		$\bar{2}$,78 649		1,21 351		30′
	lg cos	− d 1″	lg sin	+ d 1″	lg cotg	− d 1″	lg tg	+ d 1″	86°

86°

P.P.

d 1″	0,02	3,47	3,48	3,50	3,52	3,53	3,55
6″	0,1	20,8	20,9	21,0	21,1	21,2	21,3
7	0,1	24,3	24,4	24,5	24,6	24,7	24,9
8	0,1	27,7	27,9	28,0	28,1	28,3	28,4
9	0,2	31,2	31,4	31,5	31,7	31,8	32,0
10	0,2	34,7	34,8	35,0	35,2	35,3	35,5
20	0,3	69,3	69,7	70,0	70,3	70,7	71,0
30	0,5	104,0	104,5	105,0	105,5	106,0	106,5
40	0,7	138,7	139,3	140,0	140,7	141,3	142,0
50	0,8	173,3	174,2	175,0	175,8	176,7	177,5

d 1″	3,57	3,58	3,60	3,62	3,65	3,67	3,70
6″	21,4	21,5	21,6	21,7	21,9	22,0	22,2
7	25,0	25,1	25,2	25,3	25,6	25,7	25,9
8	28,5	28,7	28,8	28,9	29,2	29,3	29,6
9	32,1	32,3	32,4	32,6	32,9	33,0	33,3
10	35,7	35,8	36,0	36,2	36,5	36,7	37,0
20	71,3	71,7	72,0	72,3	73,0	73,3	74,0
30	107,0	107,5	108,0	108,5	109,5	110,0	111,0
40	142,7	143,3	144,0	144,7	146,0	146,7	148,0
50	178,3	179,2	180,0	180,8	182,5	183,3	185,0

d 1″	3,72	3,73	3,75	3,77	3,78	3,80	3,82
6″	22,3	22,4	22,5	22,6	22,7	22,8	22,9
7	26,0	26,1	26,3	26,4	26,5	26,6	26,7
8	29,7	29,9	30,0	30,1	30,3	30,4	30,5
9	33,5	33,6	33,8	33,9	34,1	34,2	34,4
10	37,2	37,3	37,5	37,7	37,8	38,0	38,2
20	74,3	74,7	75,0	75,3	75,7	76,0	76,3
30	111,5	112,0	112,5	113,0	113,5	114,0	114,5
40	148,7	149,3	150,0	150,7	151,3	152,0	152,7
50	185,8	186,7	187,5	188,3	189,2	190,0	190,8

d 1″	3,83	3,85	3,87	3,90	3,92	3,93	3,95
6″	23,0	23,1	23,2	23,4	23,5	23,6	23,7
7	26,8	27,0	27,1	27,3	27,4	27,5	27,7
8	30,7	30,8	30,9	31,2	31,3	31,5	31,6
9	34,5	34,7	34,8	35,1	35,3	35,4	35,6
10	38,3	38,5	38,7	39,0	39,2	39,3	39,5
20	76,7	77,0	77,3	78,0	78,3	78,7	79,0
30	115,0	115,5	116,0	117,0	117,5	118,0	118,5
40	153,3	154,0	154,7	156,0	156,7	157,3	158,0
50	191,7	192,5	193,3	195,0	195,8	196,7	197,5

d 1″	3,97	3,98	4,00	4,02	d 1″	3,97	3,98	4,00	4,02
6″	23,8	23,9	24,0	24,1	20	79,3	79,7	80,0	80,3
7	27,8	27,9	28,0	28,1	30	119,0	119,5	120,0	120,5
8	31,7	31,9	32,0	32,1	40	158,7	159,3	160,0	160,7
9	35,7	35,9	36,0	36,2	50	198,3	199,2	200,0	200,8
10	39,7	39,8	40,0	40,2					

3°

3°	lg sin	+d1″	lg cos	−d1″	lg tg	+d1″	lg cotg	−d1″	
30′	$\overline{2}$,78 568	3,43	$\overline{1}$,99 919	0,02	$\overline{2}$,78 649	3,43	1,21 351	3,43	30′
31	78 774	42	99 918	02	78 855	43	21 145	43	29
32	78 979	40	99 917	00	79 061	42	20 939	42	28
33	79 183	38	99 917	02	79 266	40	20 734	40	27
34	79 386		99 916		79 470		20 530		26
		3,37		0,02		3,38		3,38	
35	79 588	35	99 915	02	79 673	37	20 327	37	25
36	79 789	35	99 914	02	79 875	35	20 125	35	24
37	79 990	32	99 913	00	80 076	35	19 924	35	23
38	80 189	32	99 913	02	80 277	32	19 723	32	22
39	80 388		99 912		80 476		19 524		21
		3,28		0,02		3,30		3,30	
40′	$\overline{2}$,80 585	28	$\overline{1}$,99 911	02	$\overline{2}$,80 674	30	1,19 326	30	20′
41	80 782	27	99 910	02	80 872	27	19 128	27	19
42	80 978	25	99 909	00	81 068	27	18 932	27	18
43	81 173	23	99 909	02	81 264	25	18 736	25	17
44	81 367		99 908		81 459		18 541		16
		3,22		0,02		3,23		3,23	
45	81 560	20	99 907	02	81 653	22	18 347	22	15
46	81 752	20	99 906	02	81 846	20	18 154	20	14
47	81 944	17	99 905	02	82 038	20	17 962	20	13
48	82 134	17	99 904	00	82 230	17	17 770	17	12
49	82 324		99 904		82 420		17 580		11
		3,15		0,02		3,17		3,17	
50′	$\overline{2}$,82 513	13	$\overline{1}$,99 903	02	$\overline{2}$,82 610	15	1,17 390	15	10′
51	82 701	12	99 902	02	82 799	13	17 201	13	9
52	82 888	12	99 901	02	82 987	13	17 013	13	8
53	83 075	10	99 900	02	83 175	10	16 825	10	7
54	83 261		99 899		83 361		16 639		6
		3,08		0,02		3,10		3,10	
55	83 446	07	99 898	00	83 547	08	16 453	08	5
56	83 630	05	99 898	02	83 732	07	16 268	07	4
57	83 813	05	99 897	02	83 916	07	16 084	07	3
58	83 996	02	99 896	02	84 100	03	15 900	03	2
59	84 177		99 895		84 282		15 718		1
		3,02		0,02		3,03		0,03	
60′	$\overline{2}$,84 358		$\overline{1}$,99 894		$\overline{2}$,84 464		1,15 536		0′
	lg cos	−d1″	lg sin	+d1″	lg cotg	−d1″	lg tg	+d1″	86°

86°

P. P.

d.1″	0,02	3,02	3,03	3,05	3,07	3,08	3,10
6″	0,1	18,1	18,2	18,3	18,4	18,5	18,6
7	0,1	21,1	21,2	21,4	21,5	21,6	21,7
8	0,1	24,1	24,3	24,4	24,5	24,7	24,8
9	0,2	27,2	27,3	27,5	27,6	27,8	27,9
10	0,2	30,2	30,3	30,5	30,7	30,8	31,0
20	0,3	60,3	60,7	61,0	61,3	61,7	62,0
30	0,5	90,5	91,0	91,5	92,0	92,5	93,0
40	0,7	120,7	121,3	122,0	122,7	123,3	124,0
50	0,8	150,8	151,7	152,5	153,3	154,2	155,0

d 1″	3,12	3,13	3,15	3,17	3,20	3,22	3,23
6″	18,7	18,8	18,9	19,0	19,2	19,3	19,4
7	21,8	21,9	22,1	22,2	22,4	22,5	22,6
8	24,9	25,1	25,2	25,3	25,6	25,7	25,9
9	28,1	28,2	28,4	28,5	28,8	29,0	29,1
10	31,2	31,3	31,5	31,7	32,0	32,2	32,3
20	62,3	62,7	63,0	63,3	64,0	64,3	64,7
30	93,5	94,0	94,5	95,0	96,0	96,5	97,0
40	124,7	125,3	126,0	126,7	128,0	128,7	129,3
50	155,8	156,7	157,5	158,3	160,0	160,8	161,7

d 1″	3,25	3,27	3,28	3,30	3,32	3,35	3,37
6″	19,5	19,6	19,7	19,8	19,9	20,1	20,2
7	22,8	22,9	23,0	23,1	23,2	23,5	23,6
8	26,0	26,1	26,3	26,4	26,5	26,8	26,9
9	29,3	29,4	29,6	29,7	29,9	30,2	30,3
10	32,5	32,7	32,8	33,0	33,2	33,5	33,7
20	65,0	65,3	65,7	66,0	66,3	67,0	67,3
30	97,5	98,0	98,5	99,0	99,5	100,5	101,0
40	130,0	130,7	131,3	132,0	132,7	134,0	134,7
50	162,5	163,3	164,2	165,0	165,8	167,5	168,3

d 1″	3,38	3,40	3,42	3,43
6″	20,3	20,4	20,5	20,6
7	23,7	23,8	23,9	24,0
8	27,1	27,2	27,3	27,5
9	30,5	30,6	30,8	30,9
10	33,8	34,0	34,2	34,3
20	67,7	68,0	68,3	68,7
30	101,5	102,0	102,5	103,0
40	135,3	136,0	136,7	137,3
50	169,2	170,0	170,8	171,7

4°

4°	lg sin	+ d 1″	lg cos	— d 1″	lg tg	+ d 1″	lg cotg	— d 1″	
0′	$\overline{2}$,84 358	3,02	$\overline{1}$,99 894	0,02	$\overline{2}$,84 464	3,03	1,15 536	3,03	**60′**
1	84 539	2,98	99 893	02	84 646	00	15 354	00	**59**
2	84 718	98	99 892	02	84 826	00	15 174	00	**58**
3	84 897	97	99 891	00	85 006	2,98	14 994	2,98	**57**
4	85 075		99 891		85 185		14 815		**56**
		2,95		0,02		2,97		2,97	
5	85 252	95	99 890	02	85 363	95	14 637	95	**55**
6	85 429	93	99 889	02	85 540	95	14 460	95	**54**
7	85 605	92	99 888	02	85 717	93	14 283	93	**53**
8	85 780	92	99 887	02	85 893	93	14 107	93	**52**
9	85 955		99 886		86 069		13 931		**51**
		2,88		0,02		2,90		2,90	
10′	$\overline{2}$,86 128	88	$\overline{1}$,99 885	02	$\overline{2}$,86 243	90	1,13 757	90	**50′**
11	86 301	88	99 884	02	86 417	90	13 583	90	**49**
12	86 474	85	99 883	02	86 591	87	13 409	87	**48**
13	86 645	85	99 882	02	86 763	87	13 237	87	**47**
14	86 816		99 881		86 935		13 065		**46**
		2,85		0,02		2,85		2,85	
15	86 987	82	99 880	02	87 106	85	12 894	85	**45**
16	87 156	82	99 879	00	87 277	83	12 723	83	**44**
17	87 325	82	99 879	02	87 447	82	12 553	82	**43**
18	87 494	78	99 878	02	87 616	82	12 384	82	**42**
19	87 661		99 877		87 785		12 215		**41**
		2,80		0,02		2,80		2,80	
20′	$\overline{2}$,87 829	77	$\overline{1}$,99 876	02	$\overline{2}$,87 953	78	1,12 047	78	**40′**
21	87 995	77	99 875	02	88 120	78	11 880	78	**39**
22	88 161	75	99 874	02	88 287	77	11 713	77	**38**
23	88 326	73	99 873	02	88 453	75	11 547	75	**37**
24	88 490		99 872		88 618		11 382		**36**
		2,73		0,02		2,75		2,75	
25	88 654	72	99 871	02	88 783	75	11 217	75	**35**
26	88 817	72	99 870	02	88 948	72	11 052	72	**34**
27	88 980	70	99 869	02	89 111	72	10 889	72	**33**
28	89 142	70	99 868	02	89 274	72	10 726	72	**32**
29	89 304		99 867		89 437		10 563		**31**
		2,67		0.02		2,68		2,68	
30′	$\overline{2}$,89 464		$\overline{1}$,99 866		$\overline{2}$,89 598		1,10 402		**30′**
	lg cos	— d 1″	lg sin	+ d 1″	lg cotg	— d 1″	lg tg	+ d 1″	**85°**

85°

P. P.

d 1″	0,02	2,67	2,68	2,70	2,72	2,73
6″	0,1	16,0	16,1	16,2	16,3	16,4
7	0,1	18,7	18,8	18,9	19,0	19,1
8	0,1	21,3	21,5	21,6	21,7	21,9
9	0,2	24,0	24,2	24,3	24,5	24,6
10	0,2	26,7	26,8	27,0	27,2	27,3
20	0,3	53,3	53,7	54,0	54,3	54,7
30	0,5	80,0	80,5	81,0	81,5	82,0
40	0,7	106,7	107,3	108,0	108,7	109,3
50	0,8	133,3	134,2	135,0	135,8	136,7

d 1″	2,75	2,77	2,78	2,80	2,82	2,83
6″	16,5	16,6	16,7	16,8	16,9	17,0
7	19,3	19,4	19,5	19,6	19,7	19,8
8	22,0	22,1	22,3	22,4	22,5	22,7
9	24,8	24,9	25,1	25,2	25,4	25,5
10	27,5	27,7	27,8	28,0	28,2	28,3
20	55,0	55,3	55,7	56,0	56,3	56,7
30	82,5	83,0	83,5	84,0	84,5	85,0
40	110,0	110,7	111,3	112,0	112,7	113,3
50	137,5	138,3	139,2	140,0	140,8	141,7

d 1″	2,85	2,87	2,88	2,90	2,92	2,93
6″	17,1	17,2	17,3	17,4	17,5	17,6
7	20,0	20,1	20,2	20,3	20,4	20,5
8	22,8	22,9	23,1	23,2	23,3	23,5
9	25,7	25,8	26,0	26,1	26,2	26,4
10	28,5	28,7	28,8	29,0	29,3	29,3
20	57,0	57,3	57,7	58,0	58,3	58,7
30	85,5	86,0	86,5	87,0	87,5	88,0
40	114,0	114,7	115,3	116,0	116,7	117,3
50	142,5	143,3	144,2	145,0	145,8	146,7

d 1″	2,95	2,97	2,98	3,00	3,02	3,03
6″	17,7	17,8	17,9	18,0	18,1	18,2
7	20,7	20,8	20,9	21,0	21,1	21,2
8	23,6	23,7	23,9	24,0	24,1	24,3
9	26,6	26,7	26,9	27,0	27,2	27,3
10	29,5	29,7	29,8	30,0	30,2	30,3
20	59,0	59,3	59,7	60,0	60,3	60,7
30	88,5	89,0	89,5	90,0	90,5	91,0
40	118,0	118,7	119,3	120,0	120,7	121,3
50	147,5	148,3	149,2	150,0	150,8	151,7

4°

4°	lg sin	+ d 1″	lg cos	− d 1″	lg tg	+ d 1″	lg cotg	− d 1″	
30′	$\overline{2}$,89 464	2,68	$\overline{1}$,99 866	0,02	$\overline{2}$,89 598	2,70	1,10 402	2,70	30′
31	89 625	65	99 865	02	89 760	67	10 240	67	29
32	89 784	65	99 864	02	89 920	67	10 080	67	28
33	89 943	65	99 863	02	90 080	67	09 920	67	27
34	90 102		99 862		90 240		09 760		26
		2,63		0,02		2,65		2,65	
35	90 260	62	99 861	02	90 399	63	09 601	63	25
36	90 417	62	99 860	02	90 557	63	09 443	63	24
37	90 574	60	99 859	02	90 715	62	09 285	62	23
38	90 730	58	99 858	02	90 872	62	09 128	62	22
39	90 885		99 857		91 029		08 971		21
		2,58		0,02		2,60		2,60	
40′	$\overline{2}$,91 040	58	$\overline{1}$,99 856	02	$\overline{2}$,91 185	58	1,08 815	58	20′
41	91 195	57	99 855	02	91 340	58	08 660	58	19
42	91 349	55	99 854	02	91 495	58	08 505	58	18
43	91 502	55	99 853	02	91 650	55	08 350	55	17
44	91 655		99 852		91 803		08 197		16
		2,53		0,02		2,57		2,57	
45	91 807	53	99 851	02	91 957	55	08 043	55	15
46	91 959	52	99 850	03	92 110	53	07 890	53	14
47	92 110	52	99 848	02	92 262	53	07 738	53	13
48	92 261	50	99 847	02	92 414	52	07 586	52	12
49	92 411		99 846		92 565		07 435		11
		2,50		0,02		2,52		2,52	
50′	$\overline{2}$,92 561	48	$\overline{1}$,99 845	02	$\overline{2}$,92 716	50	1,07 284	50	10′
51	92 710	48	99 844	02	92 866	50	07 134	50	9
52	92 859	47	99 843	02	93 016	48	06 984	48	8
53	93 007	45	99 842	02	93 165	47	06 835	47	7
54	93 154		99 841		93 313		06 687		6
		2,45		0,02		2,48		2,48	
55	93 301	45	99 840	02	93 462	45	06 538	45	5
56	93 448	43	99 839	02	93 609	45	06 391	45	4
57	93 594	43	99 838	02	93 756	45	06 244	45	3
58	93 740	42	99 837	02	93 903	43	06 097	43	2
59	93 885		99 836		94 049		05 951		1
		2,42		0,03		2,43		2,43	
60′	$\overline{2}$,94 030		$\overline{1}$,99 834		$\overline{2}$,94 195		1,05 805		0′
-	lg cos	− d 1″	lg sin	+ d 1″	lg cotg	− d 1″	lg tg	+ d 1″	85°

85°

P. P.

d 1″	0,02	0,03	2,42	2,43	2,45	2,47	2,48
6″	0,1	0,2	14,5	14,6	14,7	14,8	14,9
7	0,1	0,2	16,9	17,0	17,2	17,3	17,4
8	0,1	0,3	19,3	19,5	19,6	19,7	19,9
9	0,2	0,3	21,8	21,9	22,1	22,2	22,4
10	0,2	0,3	24,2	24,3	24,5	24,7	24,8
20	0,3	0,7	48,3	48,7	49,0	49,3	49,7
30	0,5	1,0	72,5	73,0	73,5	74,0	74,5
40	0,7	1,3	96,7	97,3	98,0	98,7	99,3
50	0,8	1,7	120,8	121,7	122,5	123,3	124,2

d 1″	2,50	2,52	2,53	2,55	2,57	2,58	2,60
6″	15,0	15,1	15,2	15,3	15,4	15,5	15,6
7	17,5	17,6	17,7	17,9	18,0	18,1	18,2
8	20,0	20,1	20,3	20,4	20,5	20,7	20,8
9	22,5	22,7	22,8	23,0	23,1	23,3	23,3
10	25,0	25,2	25,3	25,5	25,7	25,8	26,0
20	50,0	50,3	50,7	51,0	51,3	51,7	52,0
30	75,0	75,5	76,0	76,5	77,0	77,5	78,0
40	100,0	100,7	101,3	102,0	102,7	103,3	104,0
50	125,0	125,8	126,7	127,5	128,3	129,2	130,0

d 1″	2,62	2,63	2,65	2,67	2,68	2,70
6″	15,7	15,8	15,9	16,0	16,1	16,2
7	18,3	18,4	18,6	18,7	18,8	18,9
8	20,9	21,1	21,2	21,3	21,5	21,6
9	23,6	23,7	23,9	24,0	24,2	24,3
10	26,2	26,3	26,5	26,7	26,8	27,0
20	52,3	52,7	53,0	53,3	53,7	64,0
30	78,5	79,0	79,5	80,0	80,5	81,0
40	104,7	105,3	106,0	106,7	107,3	108,0
50	130,8	131,7	132,5	133,3	134,2	135,0

5°

5°	lg sin	+ d 1″	lg cos	− d 1″	lg tg	+ d 1″	lg cotg	− d 1″	
0′	$\overline{2}$,94 030	2,40	$\overline{1}$,99 834	0,02	$\overline{2}$,94 195	2,42	1,05 805	2,42	60′
1	94 174	38	99 833	02	94 340	42	05 660	42	59
2	94 317	40	99 832	02	94 485	42	05 515	42	58
3	94 461	37	99 831	02	94 630	38	05 370	38	57
4	94 603	2,38	99 830	0,02	94 773	2,40	05 227	2,40	56
5	94 746	35	99 829	02	94 917	38	05 083	38	55
6	94 887	37	99 828	02	95 060	37	04 940	37	54
7	95 029	35	99 827	03	95 202	37	04 798	37	53
8	95 170	33	99 825	02	95 344	37	04 656	37	52
9	95 310	2,33	99 824	0,02	95 486	2,35	04 514	2,35	51
10′	$\overline{2}$,95 450	32	$\overline{1}$,99 823	02	$\overline{2}$,95 627	33	1,04 373	33	50′
11	95 589	32	99 822	02	95 767	35	04 233	35	49
12	95 728	32	99 821	02	95 908	32	04 092	32	48
13	95 867	30	99 820	02	96 047	33	03 953	33	47
14	96 005	2,30	99 819	0,03	96 187	2,30	03 813	2,30	46
15	96 143	28	99 817	02	96 325	32	03 675	32	45
16	96 280	28	99 816	02	96 464	30	03 536	30	44
17	96 417	27	99 815	02	96 602	28	03 398	28	43
18	96 553	27	99 814	02	96 739	30	03 261	30	42
19	96 689	2,27	99 813	0,02	96 877	2,27	03 123	2,27	41
20′	$\overline{2}$,96 825	25	$\overline{1}$,99 812	03	$\overline{2}$,97 013	28	1,02 987	28	40′
21	96 960	25	99 810	02	97 150	25	02 850	25	39
22	97 095	23	99 809	02	97 285	27	02 715	27	38
23	97 229	23	99 808	02	97 421	25	02 579	25	37
24	97 363	2,22	99 807	0,02	97 556	2,25	02 444	2,25	36
25	97 496	22	99 806	03	97 691	23	02 309	23	35
26	97 629	22	99 804	02	97 825	23	02 175	23	34
27	97 762	20	99 803	02	97 959	22	02 041	22	33
28	97 894	20	99 802	02	98 092	22	01 908	22	32
29	98 026	2,18	99 801	0,02	98 225	2,22	01 775	2,22	31
30′	$\overline{2}$,98 157		$\overline{1}$,99 800		$\overline{2}$,98 358		1,01 642		30′
	lg cos	− d 1″	lg sin	+ d 1″	lg cotg	− d 1″	lg tg	+ d 1″	84°

84°

P. P.

d 1″	0,02	0,03	2,18	2,20	2,22	2,23
6″	0,1	0,2	13,1	13,2	13,3	13,4
7	0,1	0,2	15,3	15,4	15,5	15,6
8	0,1	0,3	17,5	17,6	17,7	17,9
9	0,2	0,3	19,7	19,8	20,0	20,1
10	0,2	0,3	21,8	22,0	22,2	22,3
20	0,3	0,7	43,7	44,0	44,3	44,7
30	0,5	1,0	65,5	66,0	66,5	67,0
40	0,7	1,3	87,3	88,0	88,7	89,3
50	0,8	1,7	109,2	110,0	110,8	111,7

d 1″	2,25	2,27	2,28	2,30	2,32	2,33
6″	13,5	13,6	13,7	13,8	13,9	14,0
7	15,8	15,9	16,0	16,1	16,2	16,3
8	18,0	18,1	18,3	18,4	18,5	18,7
9	20,3	20,4	20,6	20,7	20,9	21,0
10	22,5	22,7	22,8	23,0	23,2	23,3
20	45,0	45,3	45,7	46,0	46,3	46,7
30	67,5	68,0	68,5	69,0	69,5	70,0
40	90,0	90,7	91,3	92,0	92,7	93,3
50	112,5	113,3	114,2	115,0	115,8	116,7

d 1″	2,35	2,37	2,38	2,40	2,42
6″	14,1	14,2	14,3	14,4	14,5
7	16,5	16,6	16,7	16,8	16,9
8	18,8	18,9	19,1	19,2	19,3
9	21,2	21,3	21,5	21,6	21,8
10	23,5	23,7	23,8	24,0	24,2
20	47,0	47,3	47,7	48,0	48,3
30	70,5	71,0	71,5	72,0	72,5
40	94,0	94,7	95,3	96,0	96,7
50	117,5	118,3	119,2	120,0	120,8

5°

5°	lg sin	+ d 1"	lg cos	— d 1"	lg tg	+ d 1"	lg cotg	— d 1"	
30'	$\bar{2}$,98 157	2,18	$\bar{1}$,99 800	0,03	$\bar{2}$,98 358	2,20	1,01 642	2,20	30'
31	98 288	18	99 798	02	98 490	20	01 510	20	29
32	98 419	17	99 797	02	98 622	18	01 378	18	28
33	98 549	17	99 796	02	98 753	18	01 247	18	27
34	98 679		99 795		98 884		01 116		26
		2,15		0,03		2,18		2,18	
35	98 808	15	99 793	02	99 015	17	00 985	17	25
36	98 937	15	99 792	02	99 145	17	00 855	17	24
37	99 066	13	99 791	02	99 275	17	00 725	17	23
38	99 194	13	99 790	03	99 405	15	00 595	15	22
39	99 322		99 788		99 534		00 466		21
—		2,13		0,02		2,13		2,13	—
40'	$\bar{2}$,99 450	12	$\bar{1}$,99 787	02	$\bar{2}$,99 662	15	1,00 338	15	20'
41	99 577	12	99 786	02	99 791	13	00 209	13	19
42	99 704	10	99 785	03	99 919	12	00 081	12	18
43	99 830	10	99 783	02	$\bar{1}$,00 046	13	0,99 954	13	17
44	99 956		99 782		00 174		99 826		16
		2,10		0,02		2,12		2,12	
45	$\bar{1}$,00 082	08	99 781	02	00 301	10	99 699	10	15
46	00 207	08	99 780	03	00 427	10	99 573	10	14
47	00 332	07	99 778	02	00 553	10	99 447	10	13
48	00 456	08	99 777	02	00 679	10	99 321	10	12
49	00 581		99 776		00 805		99 195		11
—		2,05		0,02		2,08		2,08	—
50'	$\bar{1}$,00 704	07	$\bar{1}$,99 775	03	$\bar{1}$,00 930	08	0,99 070	08	10'
51	00 828	05	99 773	02	01 055	07	98 945	07	9
52	00 951	05	99 772	02	01 179	07	98 821	07	8
53	01 074	03	99 771	03	01 303	07	98 697	07	7
54	01 196		99 769		01 427		98 573		6
		2,03		0,02		2,05		2,05	
55	01 318	03	99 768	02	01 550	05	98 450	05	5
56	01 440	02	99 767	03	01 673	05	98 327	05	4
57	01 561	02	99 765	02	01 796	03	98 204	03	3
58	01 682	02	99 764	02	01 918	03	98 082	03	2
59	01 803		99 763		02 040		97 960		1
—		2,00		0,03		2,03		2,03	—
60'	$\bar{1}$,01 923		$\bar{1}$,99 761		$\bar{1}$,02 162		0,97 838		0'
	lg cos	— d 1"	lg sin	+ d 1"	lg cotg	— d 1"	lg tg	+ d 1"	48°

48°

P. P.

d 1″	0,02	0,03	2,00	2,02	2,03
6″	0,1	0,2	12,0	12,1	12,2
7	0,1	0,2	14,0	14,1	14,2
8	0,1	0,3	16,0	16,1	16,3
9	0,2	0,3	18,0	18,2	18,3
10	0,2	0,3	20,0	20,2	20,3
20	0,3	0,7	40,0	40,3	40,7
30	0,5	1,0	60,0	60,5	61,0
40	0,7	1,3	80,0	80,7	81,3
50	0,8	1,7	100,0	100,8	101,7

d 1″	2,05	2,07	2,08	2,10	2,12
6″	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7
7	14,4	14,5	14,6	14,7	14,8
8	16,4	16,5	16,7	16,8	16,9
9	18,5	18,6	18,8	18,9	19,1
10	20,5	20,7	20,8	21,0	21,2
20	41,0	41,3	41,7	42,0	42,3
30	61,5	62,0	62,5	63,0	63,5
40	82,0	82,7	83,3	84,0	84,7
50	102,5	103,3	104,2	105,0	105,8

d 1″	2,13	2,15	2,17	2,18	2,20
6″	12,8	12,9	13,0	13,1	13,2
7	14,9	15,1	15,2	15,3	15,4
8	17,1	17,2	17,3	17,5	17,6
9	19,2	19,4	19,5	19,7	19,8
10	21,3	21,5	21,7	21,8	22,0
20	42,7	43,0	43,3	43,7	44,0
30	64,0	64,5	65,0	65,5	66,0
40	85,3	86,0	86,7	87,3	88,0
50	106,7	107,5	108,3	109,2	110,0

6°

6°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,01 923	2,00	$\overline{1}$,99 761	0,02	$\overline{1}$,02 162	2,02	0,97 838	2,02	60
1	02 043	00	99 760	02	02 283	02	97 717	02	59
2	02 163	00	99 759	03	02 404	02	97 596	02	58
3	02 283	1,98	99 757	02	02 525	00	97 475	00	57
4	02 402	1,97	99 756	0,02	02 645	2,02	97 355	2,02	56
5	02 520	98	99 755	03	02 766	1,98	97 234	1,98	55
6	02 639	97	99 753	02	02 885	2,00	97 115	2,00	54
7	02 757	95	99 752	02	03 005	1,98	96 995	1,98	53
8	02 874	97	99 751	03	03 124	97	96 876	97	52
9	02 992	1,95	99 749	0,02	03 242	1,98	96 758	1,98	51
10′	$\overline{1}$,03 109	95	$\overline{1}$,99 748	02	$\overline{1}$,03 361	97	0,96 639	97	50′
11	03 226	93	99 747	03	03 479	97	96 521	97	49
12	03 342	93	99 745	02	03 597	95	96 403	95	48
13	03 458	93	99 744	03	03 714	97	96 286	97	47
14	03 574	1,93	99 742	0,02	03 832	1,93	96 168	1,93	46
15	03 690	92	99 741	02	03 948	95	96 052	95	45
16	03 805	92	99 740	03	04 065	93	95 935	93	44
17	03 920	90	99 738	02	04 181	93	95 819	93	43
18	04 034	92	99 737	02	04 297	93	95 703	93	42
19	04 149	1,88	99 736	0,03	04 413	1,92	95 587	1,92	41
20′	$\overline{1}$,04 262	90	$\overline{1}$,99 734	02	$\overline{1}$,04 528	92	0,95 472	92	40′
21	04 376	90	99 733	03	04 643	92	95 357	92	39
22	04 490	88	99 731	02	04 758	92	95 242	92	38
23	04 603	87	99 730	03	04 873	90	95 127	90	37
24	04 715	1,88	99 728	0,02	04 987	1,90	95 013	1,90	36
25	04 828	87	99 727	02	05 101	88	94 899	88	35
26	04 940	87	99 726	03	05 214	90	94 786	90	34
27	05 052	87	99 724	02	05 328	88	94 672	88	33
28	05 164	85	99 723	03	05 441	87	94 559	87	32
29	05 275	1,85	99 721	0,02	05 553	1,88	94 447	1,88	31
30′	$\overline{1}$,05 386		$\overline{1}$,99 720		$\overline{1}$,05 666		0,94 334		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	83°

P. P.

d 1″	0,02	0,03	1,87	1,88	1,90	1,92	1,93	1,95	1,97	1,98	2,00	2,02
6″	0,1	0,2	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	12,0	12,1
7	0,1	0,2	13,1	13,2	13,3	13,4	13,5	13,7	13,8	13,9	14,0	14,1
8	0,1	0,3	14,9	15,1	15,2	15,3	15,5	15,6	15,7	15,9	16,0	16,1
9	0,2	0,3	16,8	17,0	17,1	17,3	17,4	17,6	17,7	17,9	18,0	18,2
10	0,2	0,3	18,7	18,8	19,0	19,2	19,3	19,5	19,7	19,8	20,0	20,2
20	0,3	0,7	37,3	37,7	38,0	38,3	38,7	39,0	39,3	39,7	40,0	40,3
30	0,5	1,0	56,0	56,5	57,0	57,5	58,0	58,5	59,0	59,5	60,0	60,5
40	0,7	1,3	74,7	75,3	76,0	76,7	77,3	78,0	78,7	79,3	80,0	80,7
50	0,8	1,7	93,3	94,2	95,0	95,8	96,7	97,5	98,3	99,2	100,0	100,8

83°

6°

6°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\bar{1}$,05 386	1,85	$\bar{1}$,99 720	0,03	$\bar{1}$,05 666	1,87	0,94 334	1,87	30′
31	05 497	83	99 718	02	05 778	87	94 222	87	29
32	05 607	83	99 717	02	05 890	87	94 110	87	28
33	05 717	83	99 716	03	06 002	85	93 998	85	27
34	05 827	1,83	99 714	0,02	06 113	1,85	93 887	1,85	26
35	05 937	82	99 713	03	06 224	85	93 776	85	25
36	06 046	82	99 711	02	06 335	83	93 665	83	24
37	06 155	82	99 710	03	06 445	85	93 555	85	23
38	06 264	80	99 708	02	06 556	83	93 444	83	22
39	06 372	1,82	99 707	0,03	06 666	1,82	93 334	1,82	21
40′	$\bar{1}$,06 481	80	$\bar{1}$,99 705	02	$\bar{1}$,06 775	83	0,93 225	83	20′
41	06 589	78	99 704	03	06 885	82	93 115	82	19
42	06 696	80	99 702	02	06 994	82	93 006	82	18
43	06 804	78	99 701	03	07 103	80	92 897	80	17
44	06 911	1,78	99 699	0,02	07 211	1,82	92 789	1,82	16
45	07 018	77	99 698	03	07 320	80	92 680	80	15
46	07 124	78	99 696	02	07 428	80	92 572	80	14
47	07 231	77	99 695	03	07 536	78	92 464	78	13
48	07 337	75	99 693	02	07 643	80	92 357	80	12
49	07 442	1,77	99 692	0,03	07 751	1,78	92 249	1,78	11
50′	$\bar{1}$,07 548	75	$\bar{1}$,99 690	02	$\bar{1}$,07 858	77	0,92 142	77	10′
51	07 653	75	99 689	03	07 964	78	92 036	78	9
52	07 758	75	99 687	02	08 071	77	91 929	77	8
53	07 863	75	99 686	03	08 177	77	91 823	77	7
54	07 968	1,73	99 684	0,02	08 283	1,77	91 717	1,77	6
55	08 072	73	99 683	03	08 389	77	91 611	77	5
56	08 176	73	99 681	02	08 495	75	91 505	75	4
57	08 280	72	99 680	03	08 600	75	91 400	75	3
58	08 383	72	99 678	02	08 705	75	91 295	75	2
59	08 486	1,72	99 677	0,03	08 810	1,73	91 190	1,73	1
60′	$\bar{1}$,08 589		$\bar{1}$,99 675		$\bar{1}$,08914		0,91 086		0′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	83°

P. P.

d 1″	0,02	0,03	1,72	1,73	1,75	1,77	1,78	1,80	1,82	1,83	1,85	1,87
6″	0,1	0,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	11,0	11,1	11,2
7	0,1	0,2	12,0	12,1	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	13,0	13,1
8	0,1	0,3	13,7	13,9	14,0	14,1	14,3	14,4	14,5	14,7	14,8	14,9
9	0,2	0,3	15,5	15,6	15,8	15,9	16,1	16,2	16,4	16,5	16,7	16,8
10	0,2	0,3	17,2	17,3	17,5	17,7	17,8	18,0	18,2	18,3	18,5	18,7
20	0,3	0,7	34,3	34,7	35,0	35,3	35,7	36,0	36,3	36,7	37,0	37,3
30	0,5	1,0	51,5	52,0	52,5	53,0	53,5	54,0	54,5	55,0	55,5	56,0
40	0,7	1,3	68,7	69,3	70,0	70,7	71,3	72,0	72,7	73,3	74,0	74,7
50	0,8	1,7	85,8	86,7	87,5	88,3	89,2	90,0	90,8	91,7	92,5	93,3

83°

7°

7°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\overline{1}$,08 589	1,72	$\overline{1}$,99 675	0,02	$\overline{1}$,08 914	1,75	0,91 086	1,75	60′
1	08 692	72	99 674	03	09 019	73	90 981	73	59
2	08 795	70	99 672	03	09 123	73	90 877	73	58
3	08 897	70	99 670	02	09 227	72	90 773	72	57
4	08 999	1,70	99 669	0,03	09 330	1,73	90 670	1,73	56
5	09 101	68	99 667	02	09 434	72	90 566	72	55
6	09 202	70	99 666	03	09 537	72	90 463	72	54
7	09 304	68	99 664	02	09 640	70	90 360	70	53
8	09 405	68	99 663	03	09 742	72	90 258	72	52
9	09 506	1,67	99 661	0,03	09 845	1,70	90 155	1,70	51
10′	$\overline{1}$,09 606	68	$\overline{1}$,99 659	02	$\overline{1}$,09 947	70	0,90 053	70	50′
11	09 707	67	99 658	03	10 049	68	89 951	68	49
12	09 807	67	99 656	02	10 150	70	89 850	70	48
13	09 907	65	99 655	03	10 252	68	89 748	68	47
14	10 006	1,67	99 653	0,03	10 353	1,68	89 647	1,68	46
15	10 106	65	99 651	02	10 454	68	89 546	68	45
16	10 205	65	99 650	03	10 555	68	89 445	68	44
17	10 304	63	99 648	02	10 656	67	89 344	67	43
18	10 402	65	99 647	03	10 756	67	89 244	67	42
19	10 501	1,63	99 645	0,03	10 856	1,67	89 144	1,67	41
20′	$\overline{1}$,10 599	63	$\overline{1}$,99 643	02	$\overline{1}$,10 956	67	0,89 044	67	40′
21	10 697	63	99 642	03	11 056	65	88 944	65	39
22	10 795	63	99 640	03	11 155	65	88 845	65	38
23	10 893	62	99 638	02	11 254	65	88 746	65	37
24	10 990	1,62	99 637	0,03	11 353	1,65	88 647	1,65	36
25	11 087	62	99 635	03	11 452	65	88 548	65	35
26	11 184	62	99 633	02	11 551	63	88 449	63	34
27	11 281	60	99 632	03	11 649	63	88 351	63	33
28	11 377	62	99 630	02	11 747	63	88 253	63	32
29	11 474	1,60	99 629	0,03	11 845	1,63	88 155	1,63	31
30′	$\overline{1}$,11 570		$\overline{1}$,99 627		$\overline{1}$,11 943		0,88 057		30′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	82°

P. P.

d 1″	0,02	0,03	1,60	1,62	1,63	1,65	1,67	1,68	1,70	1,72	1,73	1,75
6″	0,1	0,2	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5
7	0,1	0,2	11,2	11,3	11,4	11,6	11,7	11,8	11,9	12,0	12,1	12,3
8	0,1	0,3	12,8	12,9	13,1	13,2	13,3	13,5	13,6	13,7	13,9	14,0
9	0,2	0,3	14,4	14,6	14,7	14,9	15,0	15,2	15,3	15,5	15,6	15,8
10	0,2	0,3	16,0	16,2	16,3	16,5	16,7	16,8	17,0	17,2	17,3	17,5
20	0,3	0,7	32,0	32,3	32,7	33,0	33,3	33,7	34,0	34,3	34,7	35,0
30	0,5	1,0	48,0	48,5	49,0	49,5	50,0	50,5	51,0	51,5	52,0	52,5
40	0,7	1,3	64,0	64,7	65,3	66,0	66,7	67,3	68,0	68,7	69,3	70,0
50	0,8	1,7	80,0	80,8	81,7	82,5	83,3	84,2	85,0	85,8	86,7	87,5

82°

7°

7°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{1}$,11 570	1,60	$\overline{1}$,99 627	0,03	$\overline{1}$,11 943	1,62	0,88 057	1,62	30′
31	11 666	58	99 625	02	12 040	63	87 960	63	29
32	11 761	60	99 624	03	12 138	62	87 862	62	28
33	11 857	58	99 622	03	12 235	62	87 765	62	27
34	11 952	1,58	99 620	0,03	12 332	1,60	87 668	1,60	26
35	12 047	58	99 618	02	12 428	62	87 572	62	25
36	12 142	57	99 617	03	12 525	60	87 475	60	24
37	12 236	58	99 615	03	12 621	60	87 379	60	23
38	12 331	57	99 613	02	12 717	60	87 283	60	22
39	12 425	1,57	99 612	0,03	12 813	1,60	87 187	1,60	21
40′	$\overline{1}$,12 519	55	$\overline{1}$,99 610	03	$\overline{1}$,12.909	58	0,87 091	58	20′
41	12 612	57	99 608	02	13 004	58	86 996	58	19
42	12 706	55	99 607	03	13 099	58	86 901	58	18
43	12 799	55	99 605	03	13 194	58	86 806	58	17
44	12 892	1,55	99 603	0,03	13 289	1,58	86 711	1,58	16
45	12 985	55	99 601	02	13 384	57	86 616	57	15
46	13 078	55	99 600	03	13 478	58	86 522	58	14
47	13 171	53	99 598	03	13 573	57	86 427	57	13
48	13 263	53	99 596	02	13 667	57	86 333	57	12
49	13 355	1,53	99 595	0,03	13 761	1,55	86 239	1,55	11
50′	$\overline{1}$,13 447	53	$\overline{1}$,99 593	03	$\overline{1}$,13 854	57	0,86 146	57	10′
51	13 539	52	99 591	03	13 948	55	86 052	55	9
52	13 630	53	99 589	02	14 041	55	85 959	55	8
53	13 722	52	99 588	03	14 134	55.	85 866	55	7
54	13 813	1,52	99 586	0,03	14 227	1,55	85 773	1,55	6
55	13 904	50	99 584	03	14 320	53	85 680	53	5
56	13 994	52	99 582	02	14 412	53	85 588	53	4
57	14 085	50	99 581	03	14 504	55	85 496	55	3
58	14 175	52	99 579	03	14 597	52	85 403	52	2
59	14 266	1,50	99 577	0,03	14 688	1,53	85 312	1,53	1
60′	$\overline{1}$,14 356		$\overline{1}$,99 575		$\overline{1}$,14 780		0,85 220		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	82°

P. P.

d 1″	0,02	0,03	1,50	1,52	1,53	1,55	1,57	1,58	1,60	1,62	1,63
6″	0,1	0,2	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8
7	0,1	0,2	10,5	10,6	10,7	10,9	11,0	11,1	11,2	11,3	11,4
8	0,1	0,3	12,0	12,1	12,3	12,4	12,5	12,7	12,8	12,9	13,1
9	0,2	0,3	13,5	13,7	13,8	14,0	14,1	14,3	14,4	14,6	14,7
10	0,2	0,3	15,0	15,2	15,3	15,5	15,7	15,8	16,0	16,2	16,3
20	0,3	0,7	30,0	30,3	30,7	31,0	31,3	31,7	32,0	32,3	32,7
30	0,5	1,0	45,0	45,5	46,0	46,5	47,0	47,5	48,0	48,5	49,0
40	0,7	1,3	60,0	60,7	61,3	62,0	62,7	63,3	64,0	64,7	65,3
50	0,8	1,7	75,0	75,8	76,7	77,5	78,3	79,2	80,0	80,8	81,7

82°

8°

8°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,14 356	1,48	$\overline{1}$,99 575	0,02	$\overline{1}$,14 780	1,53	0,85 220	1,53	60′
1	14 445	50	99 574	03	14 872	52	85 128	52	59
2	14 535	48	99 572	03	14 963	52	85 037	52	58
3	14 624	50	99 570	03	15 054	52	84 946	52	57
4	14 714	1,48	99 568	0,03	15 145	1,52	84 855	1,52	56
5	14 803	47	99 566	02	15 236	52	84 764	52	55
6	14 891	48	99 565	03	15 327	50	84 673	50	54
7	14 980	48	99 563	03	15 417	52	84 583	52	53
8	15 069	47	99 561	03	15 508	50	84 492	50	52
9	15 157	1,47	99 559	0,03	15 598	1,50	84 402	1,50	51
10′	$\overline{1}$,15 245	47	$\overline{1}$,99 557	02	$\overline{1}$,15 688	48	0,84 312	48	50′
11	15 333	47	99 556	03	15 777	50	84 223	50	49
12	15 421	45	99 554	03	15 867	48	84 133	48	48
13	15 508	47	99 552	03	15 956	50	84 044	50	47
14	15 596	1,45	99 550	0,03	16 046	1,48	83 954	1,48	46
15	15 683	45	99 548	03	16 135	48	83 865	48	45
16	15 770	45	99 546	02	16 224	47	83 776	47	44
17	15 857	45	99 545	03	16 312	48	83 688	48	43
18	15 944	43	99 543	03	16 401	47	83 599	47	42
19	16 030	1,43	99 541	0,03	16 489	1,47	83 511	1,47	41
20′	$\overline{1}$,16 116	45	$\overline{1}$,99 539	03	$\overline{1}$,16 577	47	0,83 423	47	40′
21	16 203	43	99 537	03	16 665	47	83 335	47	39
22	16 289	42	99 535	03	16 753	47	83 247	47	38
23	16 374	43	99 533	02	16 841	45	83 159	45	37
24	16 460	1,42	99 532	0,03	16 928	1,47	83 072	1,47	36
25	16 545	43	99 530	03	17 016	45	82 984	45	35
26	16 631	42	99 528	03	17 103	45	82 897	45	34
27	16 716	42	99 526	03	17 190	45	82 810	45	33
28	16 801	42	99 524	03	17 277	43	82 723	43	32
29	16 886	1,40	99 522	0,03	17 363	1,45	82 637	1,45	31
30′	$\overline{1}$,16 970		$\overline{1}$,99 520		$\overline{1}$,17 450		0,82 550		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	81°

P. P.

d 1″	0,02	0,03	1,40	1,42	1,43	1,45	1,47	1,48	1,50	1,52	1,53
6″	0,1	0,2	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	9,1	9,2
7	0,1	0,2	9,8	9,9	10,0	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7
8	0,1	0,3	11,2	11,3	11,5	11,6	11,7	11,9	12,0	12,1	12,3
9	0,2	0,3	12,6	12,8	12,9	13,1	13,2	13,4	13,5	13,7	13,8
10	0,2	0,3	14,0	14,2	14,3	14,5	14,7	14,8	15,0	15,2	15,3
20	0,3	0,7	28,0	28,3	28,7	29,0	29,3	29,7	30,0	30,3	30,7
30	0,5	1,0	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	45,5	46,0
40	0,7	1,3	56,0	56,7	57,3	58,0	58,7	59,3	60,0	60,7	61,3
50	0,8	1,7	70,0	70,8	71,7	72,5	73,3	74,2	75,0	75,8	76,7

81°

8°

8°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\bar{1}$,16 970	1,42	$\bar{1}$,99 520	0,03	$\bar{1}$,17 450	1,43	0,82 550	1,43	30′
31	17 055	40	99 518	02	17 536	43	82 464	43	29
32	17 139	40	99 517	03	17 622	43	82 378	43	28
33	17 223	40	99 515	03	17 708	43	82 292	43	27
34	17 307	1,40	99 513	0,03	17 794	1,43	82 206	1,43	26
35	17 391	38	99 511	03	17 880	42	82 120	42	25
36	17 474	40	99 509	03	17 965	43	82 035	43	24
37	17 558	38	99 507	03	18 051	42	81 949	42	23
38	17 641	38	99 505	03	18 136	42	81 864	42	22
39	17 724	1,38	99 503	0,03	18 221	1,42	81 779	1,42	21
40′	$\bar{1}$,17 807	38	$\bar{1}$,99 501	03	$\bar{1}$,18 306	42	0,81 694	42	20′
41	17 890	38	99 499	03	18 391	40	81 609	40	19
42	17 973	37	99 497	03	18 475	42	81 525	42	18
43	18 055	37	99 495	02	18 560	40	81 440	40	17
44	18 137	1,38	99 494	0,03	18 644	1,40	81 356	1,40	16
45	18 220	37	99 492	03	18 728	40	81 272	40	15
46	18 302	35	99 490	03	18 812	40	81 188	40	14
47	18 383	37	99 488	03	18 896	38	81 104	38	13
48	18 465	37	99 486	03	18 979	40	81 021	40	12
49	18 547	1,35	99 484	0,03	19 063	1,38	80 937	1,38	11
50′	$\bar{1}$,18 628	35	$\bar{1}$,99 482	03	$\bar{1}$,19 146	38	0,80 854	38	10′
51	18 709	35	99 480	03	19 229	38	80 771	38	9
52	18 790	35	99 478	03	19 312	38	80 688	38	8
53	18 871	35	99 476	03	19 395	38	80 605	38	7
54	18 952	1,35	99 474	0,03	19 478	1,38	80 522	1,38	6
55	19 033	33	99 472	03	19 561	37	80 439	37	5
56	19 113	33	99 470	03	19 643	37	80 357	37	4
57	19 193	33	99 468	03	19 725	37	80 275	37	3
58	19 273	33	99 466	03	19 807	37	80 193	37	2
59	19 353	1,33	99 464	0,03	19 889	1,37	80 111	1,37	1
60′	$\bar{1}$,19 433		$\bar{1}$,99 462		$\bar{1}$,19 971		0,80 029		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	81°

P. P.

d 1″	0,02	0,03	1,33	1,35	1,37	1,38	1,40	1,42	1,43
6″	0,1	0,2	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6
7	0,1	0,2	9,3	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0
8	0,1	0,3	10,7	10,8	10,9	11,1	11,2	11,3	11,5
9	0,2	0,3	12,0	12,2	12,3	12,5	12,6	12,8	12,9
10	0,2	0,3	13,3	13,5	13,7	13,8	14,0	14,2	14,3
20	0,3	0,7	26,7	27,0	27,3	27,7	28,0	28,3	28,7
30	0,5	1,0	40,0	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0
40	0,7	1,3	53,3	54,0	54,7	55,3	56,0	56,7	57,3
50	0,8	1,7	66,7	67,4	68,3	69,2	70,0	70,8	71,7

81°

9°

9°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\overline{1}$,19 433	1,33	$\overline{1}$,99 462	0,03	$\overline{1}$,19 971	1,37	0,80 029	1,37	**60′**
1	19 513	32	99 460	03	20 053	35	79 947	35	**59**
2	19 592	33	99 458	03	20 134	37	79 866	37	**58**
3	19 672	32	99 456	03	20 216	35	79 784	35	**57**
4	19 751	1,32	99 454	0,03	20 297	1,35	79 703	1,35	**56**
5	19 830	32	99 452	03	20 378	35	79 622	35	**55**
6	19 909	32	99 450	03	20 459	35	79 541	35	**54**
7	19 988	32	99 448	03	20 540	35	79 460	35	**53**
8	20 067	30	99 446	03	20 621	33	79 379	33	**52**
9	20 145	1,30	99 444	0,03	20 701	1,35	79 299	1,35	**51**
10′	$\overline{1}$,20 223	32	$\overline{1}$,99 442	03	$\overline{1}$,20 782	33	0,79 218	33	**50′**
11	20 302	30	99 440	03	20 862	33	79 138	33	**49**
12	20 380	30	99 438	03	20 942	33	79 058	33	**48**
13	20 458	28	99 436	03	21 022	·33	78 978	33	**47**
14	20 535	1,30	99 434	0,03	21 102	1,33	78 898	1,33	**46**
15	20 613	30	99 432	05	21 182	32	78 818	32	**45**
16	20 691	28	99 429	03	21 261	33	78 739	33	**44**
17	20 768	28	99 427	03	21 341	32	78 659	32	**43**
18	20 845	28	99 425	03	21 420	32	78 580	32	**42**
19	20 922	1,28	99 423	0,03	21 499	1,32	78 501	1,32	**41**
20′	$\overline{1}$,20 999	28	$\overline{1}$,99 421	03	$\overline{1}$,21 578	32	0,78 422	32	**40′**
21	21 076	28	99 419	03	21 657	32	78 343	32	**39**
22	21 153	27	99 417	03	21 736	30	78 264	30	**38**
23	21 229	28	99 415	03	21 814	32	78 186	32	**37**
24	21 306	1,27	99 413	0,03	21 893	1,30	78 107	1,30	**36**
25	21 382	27	99 411	03	21 971	30	78 029	30	**35**
26	21 458	27	99 409	03	22 049	30	77 951	30	**34**
27	21 534	27	99 407	05	22 127	30	77 873	30	**33**
28	21 610	25	99 404	03	22 205	30	77 795	30	**32**
29	21 685	1,27	99 402	0,03	22 283	1,30	77 717	1,30	**31**
30′	$\overline{1}$,21 761		$\overline{1}$,99 400		$\overline{1}$,22 361		0,77 639		**30′**
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	80°

P. P.

d 1″	0,03	0,05	1,27	1,28	1,30	1,32	1,33	1,35	1,37
6″	0,2	0,3	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	8,1	8,2
7	0,2	0,4	8,9	9,0	9,1	9,2	9,3	9,5	9,6
8	0,3	0,4	10,1	10,3	10,4	10,5	10,7	10,8	10,9
9	0,3	0,5	11,4	11,6	11,7	11,9	12,0	12,2	12,3
10	0,3	0,5	12,7	12,8	13,0	13,2	13,3	13,5	13,7
20	0,7	1,0	25,3	25,7	26,0	26,3	26,7	27,0	27,3
30	1,0	1,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	40,5	41,0
40	1,3	2,0	50,7	51,3	52,0	52,7	53,3	54,0	54,7
50	1,7	2,5	63,3	64,2	65,0	65,8	66,7	67,5	68,3

80°

9°

9°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{1}$,21 761	1,25	$\overline{1}$,99 400	0,03	$\overline{1}$,22 361	1,28	0,77 639	1,28	30′
31	21 836	27	99 398	03	22 438	30	77 562	30	29
32	21 912	25	99 396	03	22 516	28	77 484	28	28
33	21 987	25	99 394	03	22 593	28	77 407	28	27
34	22 062	1,25	99 392	0,03	22 670	1,28	77 330	1,28	26
35	22 137	23	99 390	03	22 747	28	77 253	28	25
36	22 211	25	99 388	05	22 824	28	77 176	28	24
37	22 286	25	99 385	03	22 901	27	77 099	27	23
38	22 361	23	99 383	03	22 977	28	77 023	28	22
39	22 435	1,23	99 381	0,03	23 054	1,27	76 946	1,27	21
40′	$\overline{1}$,22 509	23	$\overline{1}$,99 379	03	$\overline{1}$,23 130	27	0,76 870	27	20′
41	22 583	23	99 377	03	23 206	28	76 794	28	19
42	22 657	23	99 375	05	23 283	27	76 717	27	18
43	22 731	23	99 372	03	23 359	27	76 641	27	17
44	22 805	1,22	99 370	0,03	23 435	1,25	76 565	1,25	16
45	22 878	23	99 368	03	23 510	27	76 490	27	15
46	22 952	22	99 366	03	23 586	25	76 414	25	14
47	23 025	22	99 364	03	23 661	27	76 339	27	13
48	23 098	22	99 362	05	23 737	25	76 263	25	12
49	23 171	1,22	99 359	0,03	23 812	1,25	76 188	1,25	11
50′	$\overline{1}$,23 244	22	$\overline{1}$,99 357	03	$\overline{1}$,23 887	25	0,76 113	25	10′
51	23 317	22	99 355	03	23 962	25	76 038	25	9
52	23 390	20	99 353	03	24 037	25	75 963	25	8
53	23 462	22	99 351	05	24 112	23	75 888	23	7
54	23 535	1,20	99 348	0,03	24 186	1,25	75 814	1,25	6
55	23 607	20	99 346	03	24 261	23	75 739	23	5
56	23 679	22	99 344	03	24 335	25	75 665	25	4
57	23 752	18	99 342	03	24 410	23	75 590	23	3
58	23 823	20	99 340	05	24 484	23	75 516	23	2
59	23 895	1,20	99 337	0,03	24 558	1,23	75 442	1,23	1
60′	$\overline{1}$,23 967		$\overline{1}$,99 335		$\overline{1}$,24 632		0,75 368		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	80°

P. P.

d 1″	0,03	0,05	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	1,27	1,28
6″	0,2	0,3	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7
7	0,2	0,4	8,3	8,4	8,5	8,6	8,8	8,9	9,0
8	0,3	0,4	9,5	9,6	9,7	9,9	10,0	10,1	10,3
9	0,3	0,5	10,7	10,8	11,0	11,1	11,3	11,4	11,6
10	0,3	0,5	11,8	12,0	12,2	12,3	12,5	12,7	12,8
20	0,7	1,0	23,7	24,0	24,3	24,7	25,0	25,3	25,7
30	1,0	1,5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5
40	1,3	2,0	47,3	48,0	48,7	49,3	50,0	50,7	51,3
50	1,7	2,5	59,2	60,0	60,8	61,7	62,5	63,3	64,2

80°

10°

10°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\bar{1}$,23 967	1,20	$\bar{1}$,99 335	0,03	$\bar{1}$,24 632	1,23	0,75 368	1,23	60′
1	24 039	18	99 333	03	24 706	22	75 294	22	59
2	24 110	18	99 331	05	24 779	23	75 221	23	58
3	24 181	20	99 328	03	24 853	22	75 147	22	57
4	24 253	1,18	99 326	0,03	24 926	1,23	75 074	1,23	56
5	24 324	18	99 324	03	25 000	22	75 000	22	55
6	24 395	18	99 322	05	25 073	22	74 927	22	54
7	24 466	17	99 319	03	25 146	22	74 854	22	53
8	24 536	18	99 317	03	25 219	22	74 781	22	52
9	24 607	1,17	99 315	0,03	25 292	1,22	74 708	1,22	51
10′	$\bar{1}$,24 677	18	$\bar{1}$,99 313	05	$\bar{1}$,25 365	20	0,74 635	20	50′
11	24 748	17	99 310	03	25 437	22	74 563	22	49
12	24 818	17	99 308	03	25 510	20	74 490	20	48
13	24 888	17	99 306	03	25 582	22	74 418	22	47
14	24 958	1,17	99 304	0,05	25 655	1,20	74 345	1,20	46
15	25 028	17	99 301	03	25 727	20	74 273	20	45
16	25 098	17	99 299	03	25 799	20	74 201	20	44
17	25 168	15	99 297	05	25 871	20	74 129	20	43
18	25 237	17	99 294	03	25 943	20	74 057	20	42
19	25 307	1,15	99 292	0,03	26 015	1,18	73 985	1,18	41
20′	$\bar{1}$,25 376	15	$\bar{1}$,99 290	03	$\bar{1}$,26 086	20	0,73 914	20	40′
21	25 445	15	99 288	05	26 158	18	73 842	18	39
22	25 514	15	99 285	03	26 229	20	73 771	20	38
23	25 583	15	99 283	03	26 301	18	73 699	18	37
24	25 652	1,15	99 281	0,05	26 372	1,18	73 628	1,18	36
25	25 721	15	99 278	03	26 443	18	73 557	18	35
26	25 790	13	99 276	03	26 514	18	73 486	18	34
27	25 858	15	99 274	05	26 585	17	73 415	17	33
28	25 927	13	99 271	03	26 655	18	73 345	18	32
29	25 995	1,13	99 269	0,03	26 726	1,18	73 274	1,18	31
30′	$\bar{1}$,26 063		$\bar{1}$,99 267		$\bar{1}$,26 797		0,73 203		30′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	79°

P. P.

d 1″	0,03	0,05	1,13	1,15	1,17	1,18	1,20	1,22	1,23
6″	0,2	0,3	6,8	6,9	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4
7	0,2	0,4	7,9	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6
8	0,3	0,4	9,1	9,2	9,3	9,5	9,6	9,7	9,9
9	0,3	0,5	10,2	10,4	10,5	10,7	10,8	11,0	11,1
10	0,3	0,5	11,3	11,5	11,7	11,8	12,0	12,2	12,3
20	0,7	1,0	22,7	23,0	23,3	23,7	24,0	24,3	24,7
30	1,0	1,5	34,0	34,5	35,0	35,5	36,0	36,5	37,0
40	1,3	2,0	45,3	46,0	46,7	47,3	48,0	48,7	49,3
50	1,7	2,5	56,7	57,5	58,3	59,2	60,0	60,8	61,7

79°

10°

10°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
30′	$\overline{1}$,26 063	1,13	$\overline{1}$,99 267	0,05	$\overline{1}$,26 797	1,17	0,73 203	1,17	30
31	26 131	13	99 264	03	26 867	17	73 133	17	29
32	26 199	13	99 262	03	26 937	18	73 063	18	28
33	26 267	13	99 260	05	27 008	17	72 992	17	27
34	26 335	1,13	99 257	0,03	27 078	1,17	72 922	1,17	26
35	26 403	12	99 255	05	27 148	17	72 852	17	25
36	26 470	13	99 252	03	27 218	17	72 782	17	24
37	26 538	12	99 250	03	27 288	15	72 712	15	23
38	26 605	12	99 248	05	27 357	17	72 643	17	22
39	26 672	1,12	99 245	0,03	27 427	1,15	72 573	1,15	21
40′	$\overline{1}$,26 739	12	$\overline{1}$,99 243	03	$\overline{1}$,27 496	17	0,72 504	17	20′
41	26 806	12	99 241	05	27 566	15	72 434	15	19
42	26 873	12	99 238	03	27 635	15	72 365	15	18
43	26 940	12	99 236	05	27 704	15	72 296	15	17
44	27 007	1,10	99 233	0,03	27 773	1,15	72 227	1,15	16
45	27 073	12	99 231	03	27 842	15	72 158	15	15
46	27 140	10	99 229	05	27 911	15	72 089	15	14
47	27 206	12	99 226	03	27 980	15	72 020	15	13
48	27 273	10	99 224	05	28 049	13	71 951	13	12
49	27 339	1,10	99 221	0,03	28 117	1,15	71 883	1,15	11
50′	$\overline{1}$,27 405	10	$\overline{1}$,99 219	03	$\overline{1}$,28 186	13	0,71 814	13	10′
51	27 471	10	99 217	05	28 254	15	71 746	15	9
52	27 537	08	99 214	03	28 323	13	71 677	13	8
53	27 602	10	99 212	05	28 391	13	71 609	13	7
54	27 668	1,10	99 209	0,03	28 459	1,13	71 541	1,13	6
55	27 734	08	99 207	05	28 527	13	71 473	13	5
56	27 799	08	99 204	03	28 595	12	71 405	12	4
57	27 864	10	99 202	03	28 662	13	71 338	13	3
58	27 930	08	99 200	05	28 730	13	71 270	13	2
59	27 995	1,08	99 197	0,03	28 798	1,12	71 202	1,12	1
60′	$\overline{1}$,28 060		$\overline{1}$,99 195		$\overline{1}$,28 865		0,71 135		0′
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	79°

P. P.

d 1"	0,03	0,05	1,08	1,10	1,12	1,13	1,15	1,17	1,18
6"	0,2	0,3	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	7,1
7	0,2	0,4	7,6	7,7	7,8	7,9	8,1	8,2	8,3
8	0,3	0,4	8,7	8,8	8,9	9,1	9,2	9,3	9,5
9	0,3	0,5	9,8	9,9	10,1	10,2	10,4	10,5	10,7
10	0,3	0,5	10,8	11,0	11,2	11,3	11,5	11,7	11,8
20	0,7	1,0	21,7	22,0	22,3	22,7	23,0	23,3	23,7
30	1,0	1,5	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	35,5
40	1,3	2,0	43,3	44,0	44,7	45,3	46,0	46,7	47,3
50	1,7	2,5	54,2	55,0	55,8	56,7	57,5	58,3	59,2

79°

11°

11°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,28 060	1,08	$\overline{1}$,99 195	0,05	$\overline{1}$,28 865	1,13	0,71 135	1,13	**60′**
1	28 125	08	99 192	03	28 933	12	71 067	12	**59**
2	28 190	07	99 190	05	29 000	12	71 000	12	**58**
3	28 254	08	99 187	03	29 067	12	70 933	12	**57**
4	28 319	1,08	99 185	0,05	29 134	1,12	70 866	1,12	**56**
5	28 384	07	99 182	03	29 201	12	70 799	12	**55**
6	28 448	07	99 180	05	29 268	12	70 732	12	**54**
7	28 512	08	99 177	03	29 335	12	70 665	12	**53**
8	28 577	07	99 175	05	29 402	10	70 598	10	**52**
9	28 641	1,07	99 172	0,03	29 468	1,12	70 532	1,12	**51**
10′	$\overline{1}$,28 705	07	$\overline{1}$,99 170	05	$\overline{1}$,29 535	10	0,70 465	10	**50′**
11	28 769	07	99 167	03	29 601	12	70 399	12	**49**
12	28 833	05	99 165	05	29 668	10	70 332	10	**48**
13	28 896	07	99 162	03	29 734	10	70 266	10	**47**
14	28 960	1,07	99 160	0,05	29 800	1,10	70 200	1,10	**46**
15	29 024	05	99 157	03	29 866	10	70 134	10	**45**
16	29 087	05	99 155	05	29 932	10	70 068	10	**44**
17	29 150	07	99 152	03	29 998	10	70 002	10	**43**
18	29 214	05	99 150	05	30 064	10	69 936	10	**42**
19	29 277	1,05	99 147	0,03	30 130	1,08	69 870	1,08	**41**
20	$\overline{1}$,29 340	05	$\overline{1}$,99 145	05	$\overline{1}$,30 195	10	0,69 805	10	**40′**
21	29 403	05	99 142	03	30 261	08	69 739	08	**39**
22	29 466	05	99 140	05	30 326	08	69 674	08	**38**
23	29 529	03	99 137	03	30 391	10	69 609	10	**37**
24	29 591	1,05	99 135	0,05	30 457	1,08	69 543	1,08	**36**
25	29 654	03	99 132	03	30 522	08	69 478	08	**35**
26	29 716	05	99 130	05	30 587	08	69 413	08	**34**
27	29 779	03	99 127	05	30 652	08	69 348	08	**33**
28	29 841	03	99 124	03	30 717	08	69 283	08	**32**
29	29 903	1,05	99 122	0,05	30 782	1,07	69 218	1,07	**31**
30′	$\overline{1}$,29 966		$\overline{1}$,99 119		$\overline{1}$,30 846		0,69 154		**30′**
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	**78°**

P. P.

d 1″	0,03	0,05	1,03	1,05	1,07	1,08	1,10	1,12	1,13
6″	0,2	0,3	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8
7	0,2	0,4	7,2	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
8	0,3	0,4	8,3	8,4	8,5	8,7	8,8	8,9	9,1
9	0,3	0,5	9,3	9,5	9,6	9,8	9,9	10,1	10,2
10	0,3	0,5	10,3	10,5	10,7	10,8	11,0	11,2	11,3
20	0,7	1,0	20,7	21,0	21,3	21,7	22,0	22,3	22,7
30	1,0	1,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0
40	1,3	2,0	41,3	42,0	42,7	43,3	44,0	44,7	45,3
50	1,7	2,5	51,7	52,5	53,3	54,2	55,0	55,8	56,7

78°

11°

11°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{1}$,29 966	1,03	$\overline{1}$,99 119	0,03	$\overline{1}$,30 846	1,08	0,69 154	1,08	30′
31	30 028	03	99 117	05	30 911	07	69 089	07	29
32	30 090	02	99 114	03	30 975	08	69 025	08	28
33	30 151	03	99 112	05	31 040	07	68 960	07	27
34	30 213	1,03	99 109	0,05	31 104	1,07	68 896	1,07	26
35	30 275	02	99 106	03	31 168	08	68 832	08	25
36	30 336	03	99 104	05	31 233	07	68 767	07	24
37	30 398	02	99 101	03	31 297	07	68 703	07	23
38	30 459	03	99 099	05	31 361	07	68 639	07	22
39	30 521	1,02	99 096	0,05	31 425	1,07	68 575	1,07	21
40′	$\overline{1}$,30 582	02	$\overline{1}$,99 093	03	$\overline{1}$,31 489	05	0,68 511	05	20′
41	30 643	02	99 091	05	31 552	07	68 448	07	19
42	30 704	02	99 088	03	31 616	05	68 384	05	18
43	30 765	02	99 086	05	31 679	07	68 321	07	17
44	30 826	1,02	99 083	0,05	31 743	1,05	68 257	1,05	16
45	30 887	00	99 080	03	31 806	07	68 194	07	15
46	30 947	02	99 078	05	31 870	05	68 130	05	14
47	31 008	00	99 075	05	31 933	05	68 067	05	13
48	31 068	02	99 072	03	31 996	05	68 004	05	12
49	31 129	1,00	99 070	0,05	32 059	1,05	67 941	1,05	11
50′	$\overline{1}$,31 189	02	$\overline{1}$,99 067	05	$\overline{1}$,32 122	05	0,67 878	05	10′
51	31 250	00	99 064	03	32 185	05	67 815	05	9
52	31 310	00	99 062	05	32 248	05	67 752	05	8
53	31 370	00	99 059	05	32 311	03	67 689	03	7
54	31 430	1,00	99 056	0,03	32 373	1,05	67 627	1,05	6
55	31 490	0,98	99 054	05	32 436	03	67 564	03	5
56	31 549	1,00	99 051	05	32 498	05	67 502	05	4
57	31 609	1,00	99 048	03	32 561	03	67 439	03	3
58	81 669	0,98	99 046	05	32 623	03	67 377	03	2
59	31 728	1,00	99 043	0,05	32 685	1,03	67 315	1,03	1
60′	$\overline{1}$,31 788		$\overline{1}$,99 040		$\overline{1}$,32 747		0,67 253		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1‴	78°

P. P.

d 1	0,03	0,05	0,98	1,00	1,02	1,03	1,05	1,07	1,08
6″	0,2	0,3	5,9	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5
7	0,2	0,4	6,9	7,0	7,1	7,2	7,4	7,5	7,6
8	0,3	0,4	7,9	8,0	8,1	8,3	8,4	8,5	8,7
9	0,3	0,5	8,9	9,0	9,2	9,3	9,5	9,6	9,8
10	0,3	0,5	9,8	10,0	10,2	10,3	10,5	10,7	10,8
20	0,7	1,0	19,7	20,0	20,3	20,7	21,0	21,3	21,7
30	1,0	1,5	29,5	30,0	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5
40	1,3	2,0	39,3	40,0	40,7	41,3	42,0	42,7	43,3
50	1,7	2,5	49,2	50,0	50,8	51,7	52,5	53,3	54,2

78°

12°

12°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	1̄,31 788	0,98	1̄,99 040	0,03	1̄,32 747	1,05	0,67 253	1,05	60′
1	31 847	1,00	99 038	05	32 810	03	67 190	03	59
2	31 907	0,98	99 035	05	32 872	02	67 128	02	58
3	31 966	0,98	99 032	03	32 933	03	67 067	03	57
4	32 025	0,98	99 030	0,05	32 995	1,03	67 005	1,03	56
5	32 084	98	99 027	05	33 057	03	66 943	03	55
6	32 143	98	99 024	03	33 119	02	66 881	02	54
7	32 202	98	99 022	05	33 180	03	66 820	03	53
8	32 261	97	99 019	05	33 242	02	66 758	02	52
9	32 319	0,98	99 016	0,05	33 303	1,03	66 697	1,03	51
10′	1̄,32 378	98	1̄,99 013	03	1̄,33 365	02	0,66 635	02	50′
11	32 437	97	99 011	05	33 426	02	66 574	02	49
12	32 495	97	99 008	05	33 487	02	66 513	02	48
13	32 553	98	99 005	05	33 548	02	66 452	02	47
14	32 612	0,97	99 002	0,03	33 609	1,02	66 391	1,02	46
15	32 670	97	99 000	05	33 670	02	66 330	02	45
16	32 728	97	98 997	05	33 731	02	66 269	02	44
17	32 786	97	98 994	05	33 792	02	66 208	02	43
18	32 844	97	98 991	03	33 853	00	66 147	00	42
19	32 902	0,97	98 989	0,05	33 913	1,02	66 087	1,02	41
20′	1̄,32 960	97	1̄,98 986	05	1̄,33 974	00	0,66 026	00	40′
21	33 018	95	98 983	05	34 034	02	65 966	02	39
22	33 075	97	98 980	03	34 095	00	65 905	00	38
23	33 133	95	98 978	05	34 155	00	65 845	00	37
24	33 190	0,97	98 975	0,05	34 215	1,02	65 785	1,02	36
25	33 248	95	98 972	05	34 276	00	65 724	00	35
26	33 305	95	98 969	03	34 336	00	65 664	00	34
27	33 362	97	98 967	05	34 396	00	65 604	00	33
28	33 420	95	98 964	05	34 456	00	65 544	00	32
29	33 477	0,95	98 961	0,05	34 516	1,00	65 484	1,00	31
30′	1̄,33 534		1̄,98 958		1̄,34 576		0,65 424		30′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	77°

P. P.

d 1″	0,03	,005	0,95	0,97	0,98	1,00	1,02	1,03	1,05
6″	0,2	0,3	5,7	5,8	5,9	6,0	6,1	6,2	6,3
7	0,2	0,4	6,7	6,8	6,9	7,0	7,1	7,2	7,4
8	0,3	0,4	7,6	7,7	7,9	8,0	8,1	8,3	8,4
9	0,3	0,5	8,6	8,7	8,9	9,0	9,2	9,3	9,5
10	0,3	0,5	9,5	9,7	9,8	10,0	10,2	10,3	10,5
20	0,7	1,0	19,0	19,3	19,7	20,0	20,3	20,7	21,0
30	1,0	1,5	28,5	29,0	29,5	30,0	30,5	31,0	31,5
40	1,3	2,0	38,0	38,7	39,3	40,0	40,7	41,3	42,0
50	1,7	2,5	47,5	48,3	49,2	50,0	50,8	51,7	52,5

77°

12°

12°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	+d 1″	
30′	$\bar{1}$,33 534	0,95	1,98 958	0,05	$\bar{1}$,34 576	0,98	0,65 424	0,98	30′
31	33 591	93	98 955	03	34 635	1,00	65 365	1,00	29
32	33 647	95	98 953	05	34 695	1,00	65 305	1,00	28
33	33 704	95	98 950	05	34 755	0,98	65 245	0,98	27
34	33 761	0,95	98 947	0,05	34 814	1,00	65 186	1,00	26
35	33 818	93	98 944	05	34 874	0,98	65 126	0,98	25
36	33 874	95	98 941	05	34 933	98	65 067	98	24
37	33 931	93	98 938	03	34 992	98	65 008	98	23
38	33 987	93	98 936	05	35 051	1,00	64 949	1,00	22
39	34 043	0,95	98 933	0,05	35 111	0,98	64 889	0,98	21
40′	$\bar{1}$,34 100	93	1,98 930	05	$\bar{1}$,35 170	98	0,64 830	98	20′
41	34 156	93	98 927	05	35 229	98	64 771	98	19
42	34 212	93	98 924	05	35 288	98	64 712	98	18
43	34 268	93	98 921	03	35 347	97	64 653	97	17
44	34 324	0,93	98 919	0,05	35 405	0,98	64 595	0,98	16
45	34 380	93	98 916	05	35 464	98	64 536	98	15
46	34 436	92	98 913	05	35 523	97	64 477	97	14
47	34 491	93	98 910	05	35 581	98	64 419	98	13
48	34 547	92	98 907	05	35 640	97	64 360	97	12
49	34 602	0,93	98 904	0,05	35 698	0,98	64 302	0,98	11
50′	1,34 658	92	$\bar{1}$,98 901	05	$\bar{1}$,35 757	97	0,64 243	97	10′
51	34 713	93	98 898	03	35 815	97	64 185	97	9
52	34 769	92	98 896	05	35 873	97	64 127	97	8
53	34 824	92	98 893	05	35 931	97	64 069	97	7
54	34 879	0,92	98 890	0,05	35 989	0,97	64 011	0,97	6
55	34 934	92	98 887	05	36 047	97	63 953	97	5
56	34 989	92	98 884	05	36 105	97	63 895	97	4
57	35 044	92	98 881	05	36 163	97	63 837	97	3
58	35 099	92	98 878	05	36 221	97	63 779	97	2
59	35 154	0,92	98 875	0,05	36 279	0,95	63 721	0,95	1
60′	$\bar{1}$,35 209		1,98 872		1,36 336		0,63 664		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	−d 1″	77°

P. P.

d 1″	0,03	0,05	0,92	0,93	0,95	0,97	0,98	1,00
6″	0,2	0,3	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
7	0,2	0,4	6,4	6,5	6,7	6,8	6,9	7,0
8	0,3	0,4	7,3	7,5	7,6	7,7	7,9	8,0
9	0,3	0,5	8,3	8,4	8,6	8,7	8,9	9,0
10	0,3	0,5	9,2	9,3	9,5	9,7	9,8	10,0
20	0,7	1,0	18,3	18,7	19,0	19,3	19,7	20,0
30	1,0	1,5	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0
40	1,3	2,0	36,7	37,3	38,0	38,7	39,3	40,0
50	1,7	2,5	45,8	46,7	47,5	48,3	49,2	50,0

18°

18°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
0'	1,35 209	0,90	$\bar{1}$,98 872	0,05	$\bar{1}$,36 336	0,97	0,63 664	0,97	60'
1	35 263	92	98 869	03	36 394	97	63 606	97	59
2	35 318	92	98 867	05	36 452	95	63 548	95	58
3	35 373	90	98 864	05	36 509	95	63 491	95	57
4	35 427	0,90	98 861	0,05	36 566	0,97	63 434	0,97	56
5	35 481	92	98 858	05	36 624	95	63 376	95	55
6	35 536	90	98 855	05	36 681	95	63 319	95	54
7	35 590	90	98 852	05	36 738	95	63 262	95	53
8	35 644	90	98 849	05	36 795	95	63 205	95	52
9	35 698	0,90	98 846	0,05	36 852	0,95	63 148	0,95	51
10'	$\bar{1}$,35 752	90	$\bar{1}$,98 843	05	$\bar{1}$,36 909	95	0,63 091	95	50'
11	35 806	90	98 840	C5	36 966	95	63 034	95	49
12	35 860	90	98 837	05	37 023	95	62 977	95	48
13	35 914	90	98 834	05	37 080	95	62 920	95	47
14	35 968	0,90	98 831	0,05	37 137	0,93	62 863	0,93	46
15	36 022	88	98 828	05	37 193	95	62 807	95	45
16	36 075	90	98 825	05	37 250	93	62 750	93	44
17	36 129	88	98 822	05	37 306	95	62 694	95	43
18	36 182	90	98 819	05	37 363	93	62 637	93	42
19	36 236	0,88	98 816	0,05	37 419	0,95	62 581	0,95	41
20'	$\bar{1}$,36 289	88	$\bar{1}$,98 813	05	$\bar{1}$,37 476	93	0,62 524	93	40'
21	36 342	88	98 810	05	37 532	93	62 468	93	39
22	36 395	90	98 807	05	37 588	93	62 412	93	38
23	36 449	88	98 804	05	37 644	93	62 356	93	37
24	36 502	0,88	98 801	0,05	37 700	0,93	62 300	0,93	36
25	36 555	88	98 798	05	37 756	93	62 244	93	35
26	36 608	87	98 795	05	37 812	93	62 188	93	34
27	36 660	88	98 792	05	37 868	93	62 132	93	33
28	36 713	88	98 789	05	37 924	93	62 076	93	32
29	36 766	0,88	98 786	0,05	37 980	0,92	62 020	0,92	31
30'	$\bar{1}$,36 819		$\bar{1}$,98 783		$\bar{1}$,38 035		0,61 965		30'
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	76°

P. P

d 1"	0,03	0,05	0,88	0,90	0,92	0,93	0,95	0,97
6"	0,2	0,3	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8
7	0,2	0,4	6,2	6,3	6,4	6,5	6,7	6,8
8	0,3	0,4	7,1	7,2	7,3	7,5	7,6	7,7
9	0,3	0,5	8,0	8,1	8,3	8,4	8,6	8,7
10	0,3	0,5	8,8	9,0	9,2	9,3	9,5	9,7
20	0,7	1,0	17,7	18,0	18,3	18,7	19,0	19,3
30	1,0	1,5	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0
40	1,3	2,0	35,3	36,0	36,7	37,3	38,0	38,7
50	1,7	2,5	44,2	45,0	45,8	46,7	47,5	48,3

76°

13°

13°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\bar{1}$,36 819	0,87	$\bar{1}$,98 783	0,05	$\bar{1}$,38 035	0,93	0,61 965	0,93	30′
31	36 871	88	98 780	05	38 091	93	61 909	93	29
32	36 924	87	98 777	05	38 147	92	61 853	92	28
33	36 976	87	98 774	05	38 202	92	61 798	92	27
34	37 028	0,88	98 771	0,05	38 257	0,93	61 743	0,93	26
35	37 081	87	98 768	05	38 313	92	61 687	92	25
36	37 133	87	98 765	05	38 368	92	61 632	92	24
37	37 185	87	98 762	05	38 423	93	61 577	93	23
38	37 237	87	98 759	05	38 479	92	61 521	92	22
39	37 289	0,87	98 756	0,05	38 534	0,92	61 466	0,92	21
40′	$\bar{1}$,37 341	87	$\bar{1}$,98 753	05	$\bar{1}$,38 589	92	0,61 411	92	20′
41	37 393	87	98 750	07	38 644	92	61 356	92	19
42	37 445	87	98 746	05	38 699	92	61 301	92	18
43	37 497	87	98 743	05	38 754	90	61 246	90	17
44	37 549	0,85	98 740	0,05	38 808	0,92	61 192	0,92	16
45	37 600	87	98 737	05	38 863	92	61 137	92	15
46	37 652	85	98 734	05	38 918	90	61 082	90	14
47	37 703	87	98 731	05	38 972	92	61 028	92	13
48	37 755	85	98 728	05	39 027	92	60 973	92	12
49	37 806	0,87	98 725	0,05	39 082	0,90	60 918	0,90	11
50′	$\bar{1}$,37 858	85	$\bar{1}$,98 722	05	$\bar{1}$,39 136	90	0,60 864	90	10′
51	37 909	85	98 719	07	39 190	92	60 810	92	9
52	37 960	85	98 715	05	39 245	90	60 755	90	8
53	38 011	85	98 712	05	39 299	90	60 701	90	7
54	38 062	0,85	98 709	0,05	39 353	0,90	60 647	0,90	6
55	38 113	85	98 706	05	39 407	90	60 593	90	5
56	38 164	85	98 703	05	39 461	90	60 539	90	4
57	38 215	85	98 700	05	39 515	90	60 485	90	3
58	38 266	85	98 697	05	39 569	90	60 431	90	2
59	38 317	0,85	98 694	0,07	39 623	0,90	60 377	0,90	1
60′	$\bar{1}$,38 368		$\bar{1}$,98 690		$\bar{1}$,39 677		0,60 323		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	76°

P. P.

d1″	0,05	0,07	0,85	0,87	0,88	0,90	0,92	0,93
6″	0,3	0,4	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
7	0,4	0,5	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5
8	0,4	0,5	6,8	6,9	7,1	7,2	7,3	7,5
9	0,5	0,6	7,7	7,8	8,0	8,1	8,3	8,4
10	0,5	0,7	8,5	8,7	8,8	9,0	9,2	9,3
20	1,0	1,3	17,0	17,3	17,7	18,0	18,3	18,7
30	1,5	2,0	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0
40	2,0	2,7	34,0	34,7	35,3	36,0	36,7	37,3
50	2,5	3,3	42,5	43,3	44,2	45,0	45,8	46,7

76°

14°

14°	lg sin	+d 1"	lg cos	−d 1"	lg tg	−d 1"	lg cotg	−d 1"	
0'	$\bar{1}$,38 368	0,83	$\bar{1}$,98 690	0,05	$\bar{1}$,39 677	0,90	0,60 323	0,90	60'
1	38 418	85	98 687	05	39 731	90	60 269	90	59
2	38 469	83	98 684	05	39 785	88	60 215	88	58
3	38 519	85	98 681	05	39 838	90	60 162	90	57
4	38 570	0,83	98 678	0,05	39 892	0,88	60 108	0,88	56
5	38 620	83	98 675	07	39 945	90	60 055	90	55
6	38 670	85	98 671	05	39 999	88	60 001	88	54
7	38 721	83	98 668	05	40 052	90	59 948	90	53
8	38 771	83	98 665	05	40 106	88	59 894	88	52
9	38 821	0,83	98 662	0,05	40 159	0,88	59 841	0,88	51
10'	$\bar{1}$,38 871	83	$\bar{1}$,98 659	05	$\bar{1}$,40 212	90	0,59 788	90	50'
11	38 921	83	98 656	07	40 266	88	59 734	88	49
12	38 971	83	98 652	05	40 319	88	59 681	88	48
13	39 021	83	98 649	05	40 372	88	59 628	88	47
14	39 071	0,83	98 646	0,05	40 425	0,88	59 575	0,88	46
15	39 121	82	98 643	05	40 478	88	59 522	88	45
16	39 170	83	98 640	07	40 531	88	59 469	88	44
17	39 220	83	98 636	05	40 584	87	59 416	87	43
18	39 270	82	98 633	05	40 636	88	59 364	88	42
19	39 319	0,83	98 630	0,05	40 689	0,88	59 311	0,88	41
20'	$\bar{1}$,39 369	82	$\bar{1}$,98 627	07	$\bar{1}$,40 742	88	0,59 258	88	40'
21	39 418	82	98 623	05	40 795	87	59 205	87	39
22	39 467	83	98 620	05	40 847	88	59 153	88	38
23	39 517	82	98 617	05	40 900	87	59 100	87	37
24	39 566	0,82	98 614	0,07	40 952	0,88	59 048	0,88	36
25	39 615	82	98 610	05	41 005	87	58 995	87	35
26	39 664	82	98 607	05	41 057	87	58 943	87	34
27	39 713	82	98 604	05	41 109	87	58 891	87	33
28	39 762	82	98 601	07	41 161	88	58 839	88	32
29	39 811	0,82	98 597	0,05	41 214	0,87	58 786	.087	31
30'	$\bar{1}$,39 860		$\bar{1}$,98 594		$\bar{1}$,41 266		0,58 734		30'
	lg cos	−d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	−d 1"	lg tg	+d 1"	75°

P. P.

d1"	0,05	0,07	0,82	0,83	0,85	0,87	0,88	0,90
6"	0,3	0,4	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4
7	0,4	0,5	5,7	5,8	6,0	6,1	6,2	6,3
8	0,4	0,5	6,5	6,7	6,8	6,9	7,1	7,2
9	0,5	0,6	7,4	7,5	7,7	7,8	8,0	8,1
10	0,5	0,7	8,2	8,3	8,5	8,7	8,8	9,0
20	1,0	1,3	16,3	16,7	17,0	17,3	17,7	18,0
30	1,5	2,0	24,5	25,0	25,5	26,0	26,5	27,0
40	2,0	2,7	32,7	33,3	34,0	34,7	35,3	36,0
50	2,5	3,3	40,8	41,7	42,5	43,3	44,2	45,0

75°

14°

14°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\bar{1}$,39 860	0,82	$\bar{1}$,98 594	0,05	$\bar{1}$,41 266	0,87	0,58 734	0,87	**30′**
31	39 909	82	98 591	05	41 318	87	58 682	87	**29**
32	39 958	80	98 588	07	41 370	87	58 630	87	**28**
33	40 006	82	98 584	05	41 422	87	58 578	87	**27**
34	40 055	0,80	98 581	0,05	41 474	0,87	58 526	0,87	**26**
35	40 103	82	98 578	07	41 526	87	58 474	87	**25**
36	40 152	80	98 574	05	41 578	85	58 422	85	**24**
37	40 200	82	98 571	05	41 629	87	58 371	87	**23**
38	40 249	80	98 568	05	41 681	87	58 319	87	**22**
39	40 297	0,82	98 565	0,07	41 733	0,85	58 267	0,85	**21**
40′	$\bar{1}$,40 346	80	$\bar{1}$,98 561	05	$\bar{1}$,41 784	87	0,58 216	87	**20′**
41	40 394	80	98 558	05	41 836	85	58 164	85	**19**
42	40 442	80	98 555	07	41 887	87	58 113	87	**18**
43	40 490	80	98 551	05	41 939	85	58 061	85	**17**
44	40 538	0,80	98 548	0,05	41 990	0,85	58 010	0,85	**16**
45	40 586	80	98 545	07	42 041	87	57 959	87	**15**
46	40 634	80	98 541	05	42 093	85	57 907	85	**14**
47	40 682	80	98 538	05	42 144	85	57 856	85	**13**
48	40 730	80	98 535	07	42 195	85	57 805	85	**12**
49	40 778	0,78	98 531	0,05	42 246	0,85	57 754	0,85	**11**
50′	$\bar{1}$,40 825	80	$\bar{1}$,98 528	05	$\bar{1}$,42 297	85	0,57 703	85	**10′**
51	40 873	80	98 525	07	42 348	85	57 652	85	**9**
52	40 921	78	98 521	05	42 399	85	57 601	85	**8**
53	40 968	80	98 518	05	42 450	85	57 550	85	**7**
54	41 016	0,78	98 515	0,07	42 501	0,85	57 499	0,85	**6**
55	41 063	80	98 511	05	42 552	85	57 448	85	**5**
56	41 111	78	98 508	05	42 603	83	57 397	83	**4**
57	41 158	78	98 505	07	42 653	85	57 347	85	**3**
58	41 205	78	98 501	05	42 704	85	57 296	85	**2**
59	41 252	0,80	98 498	0,07	42 755	0,83	57 245	0,83	**1**
60′	$\bar{1}$,41 300		$\bar{1}$,98 494		$\bar{1}$,42 805		0,57 195		**0′**
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	**75°**

P. P.

d 1″	**0,05**	**0,07**	**0,78**	**0,80**	**0,82**	**0,83**	**0,85**	**0,87**
6″	0,3	0,4	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
7	0,4	0,5	5,5	5,6	5,7	5,8	6,0	6,1
8	0,4	0,5	6,3	6,4	6,5	6,7	6,8	6,9
9	0,5	0,6	7,1	7,2	7,4	7,5	7,7	7,8
10	0,5	0,7	7,8	8,0	8,2	8,3	8,5	8,7
20	1,0	1,3	15,7	16,0	16,3	16,7	17,0	17,3
30	1,5	2,0	23,5	24,0	24,5	25,0	25,5	26,0
40	2,0	2,7	31,3	32,0	32,7	33,3	34,0	34,7
50	2,5	3,3	39,2	40,0	40,8	41,7	42,5	43,3

75°

15°

15°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\overline{1}$,41 300	0,78	$\overline{1}$,98 494	0,05	$\overline{1}$,42 805	0,85	0,57 195	0,85	60
1	41 347	78	98 491	05	42 856	83	57 144	83	59
2	41 394	78	98 488	07	42 906	85	57 094	85	58
3	41 441	78	98 484	05	42 957	83	57 043	83	57
4	41 488	0,78	98 481	0,07	43 007	0,83	56 993	0,83	56
5	41 535	78	98 477	05	43 057	85	56 943	85	55
6	41 582	77	98 474	05	43 108	83	56 892	83	54
7	41 628	78	98 471	07	43 158	83	56 842	83	53
8	41 675	78	98 467	05	43 208	83	56 792	83	52
9	41 722	0,77	98 464	0,07	43 258	0,83	56 742	0,83	51
10′	$\overline{1}$,41 768	78	$\overline{1}$,98 460	05	$\overline{1}$,43 308	83	0,56 692	83	50′
11	41 815	77	98 457	07	43 358	83	56 642	83	49
12	41 861	78	98 453	05	43 408	83	56 592	83	48
13	41 908	77	98 450	05	43 458	83	56 542	83	47
14	41 954	0,78	98 447	0,07	43 508	0,83	56 492	0,83	46
15	42 001	77	98 443	05	43 558	82	56 442	82	45
16	42 047	77	98 440	07	43 607	83	56 393	83	44
17	42 093	78	98 436	05	43 657	83	56 343	83	43
18	42 140	77	98 433	07	43 707	82	56 293	82	42
19	42 186	0,77	98 429	0,05	43 756	0,83	56 244	0,83	41
20′	$\overline{1}$,42 232	77	$\overline{1}$,98 426	07	$\overline{1}$,43 806	82	0,56 194	82	40′
21	42 278	77	98 422	05	43 855	83	56 145	83	39
22	42 324	77	98 419	07	43 905	82	56 095	82	38
23	42 370	77	98 415	05	43 954	83	56 046	83	37
24	42 416	0,75	98 412	0,05	44 004	0,82	55 996	0,82	36
25	42 461	77	98 409	07	44 053	82	55 947	82	35
26	42 507	77	98 405	05	44 102	82	55 898	82	34
27	42 553	77	98 402	07	44 151	83	55 849	83	33
28	42 599	75	98 398	05	44 201	82	55 799	82	32
29	42 644	0,77	98 395	0,07	44 250	0,82	55 750	0,82	31
30′	$\overline{1}$,42 690		$\overline{1}$,98 391		$\overline{1}$,44 299		0,55 701		30′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	74°

P. P.

d 1″	0,05	0,07	0,75	0,77	0,78	0,80	0,82	0,83	0,85
6″	0,3	0,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1
7	0,4	0,5	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	6,0
8	0,4	0,5	6,0	6,1	6,3	6,4	6,5	6,7	6,8
9	0,5	0,6	6,8	6,9	7,1	7,2	7,4	7,5	7,7
10	0,5	0,7	7,5	7,7	7,8	8,0	8,2	8,3	8,5
20	1,0	1,3	15,0	15,3	15,7	16,0	16,3	16,7	17,0
30	1,5	2,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	25,5
40	2,0	2,7	30,0	30,7	31,3	32,0	32,7	33,3	34,0
50	2,5	3,3	37,5	38,3	39,2	40,0	40,8	41,7	42,5

74°

15°

15°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\bar{1}$,42 690	0,75	$\bar{1}$,98 391	0,05	$\bar{1}$,44 299	0,82	0,55 701	0,82	30′
31	42 735	77	98 388	07	44 348	82	55 652	82	29
32	42 781	75	98 384	05	44 397	82	55 603	82	28
33	42 826	77	98 381	07	44 446	82	55 554	82	27
34	42 872	0,75	98 377	0,07	44 495	0,82	55 505	0,82	26
35	42 917	75	98 373	05	44 544	80	55 456	80	25
36	42 962	77	98 370	07	44 592	82	55 408	82	24
37	43 008	75	98 366	05	44 641	82	55 359	82	23
38	43 053	75	98 363	07	44 690	80	55 310	80	22
39	43 098	0,75	98 359	0,05	44 738	0,82	55 262	0,82	21
40′	$\bar{1}$,43 143	75	$\bar{1}$,98 356	07	$\bar{1}$,44 787	82	0,55 213	82	20′
41	43 188	75	98 352	05	44 836	80	55 164	80	19
42	43 233	75	98 349	07	44 884	82	55 116	82	18
43	43 278	75	98 345	05	44 933	80	55 067	80	17
44	43 323	0,73	98 342	0,07	44 981	0,80	55 019	0,80	16
45	43 367	75	98 338	07	45 029	82	54 971	82	15
46	43 412	75	98 334	05	45 078	80	54 922	80	14
47	43 457	75	98 331	07	45 126	80	54 874	80	13
48	43 502	73	98 327	05	45 174	80	54 826	80	12
49	43 546	0,75	98 324	0,07	45 222	0,82	54 778	0,82	11
50′	$\bar{1}$,43 591	73	$\bar{1}$,98 320	05	$\bar{1}$,45 271	80	0,54 729	80	10′
51	43 635	75	98 317	07	45 319	80	54 681	80	9
52	43 680	73	98 313	07	45 367	80	54 633	80	8
53	43 724	75	98 309	05	45 415	80	54 585	80	7
54	43 769	0,73	98 306	0,07	45 463	0,80	54 537	0,80	6
55	43 813	73	98 302	05	45 511	80	54 489	80	5
56	43 857	73	98 299	07	45 559	78	54 441	78	4
57	43 901	75	98 295	07	45 606	80	54 394	80	3
58	43 946	73	98 291	05	45 654	80	54 346	80	2
59	43 990	0,73	98 288	0,07	45 702	0,80	54 298	0,80	1
60′	$\bar{1}$,44 034		$\bar{1}$,98 284		$\bar{1}$,45 750		0,54 250		0′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	74°

P. P.

d 1″	0,05	0,07	0,73	0,75	0,77	0,78	0,80	0,82
6″	0,3	0,4	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
7	0,4	0,5	5,1	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7
8	0,4	0,5	5,9	6,0	6,1	6,3	6,4	6,5
9	0,5	0,6	6,6	6,8	6,9	7,1	7,2	7,4
10	0,5	0,7	7,3	7,5	7,7	7,8	8,0	8,2
20	1,0	1,3	14,7	15,0	15,3	15,7	16,0	16,3
30	1,5	2,0	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5
40	2,0	2,7	29,3	30,0	30,7	31,3	32,0	32,7
50	2,5	3,3	36,7	37,5	38,3	39,2	40,0	40,8

74°

16°

16°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\bar{1}$,44 034	0,73	$\bar{1}$,98 284	0,05	$\bar{1}$,45 750	0,78	0,54 250	0,78	60′
1	44 078	73	98 281	07	45 797	80	54 203	80	59
2	44 122	73	98 277	07	45 845	78	54 155	78	58
3	44 166	73	98 273	05	45 892	80	54 108	80	57
4	44 210	0,72	98 270	0,07	45 940	0,78	54 060	0,78	56
5	44 253	73	98 266	07	45 987	80	54 013	80	55
6	44 297	73	98 262	05	46 035	78	53 965	78	54
7	44 341	73	98 259	07	46 082	80	53 918	80	53
8	44 385	72	98 255	07	46 130	78	53 870	78	52
9	44 428	0,73	98 251	0,05	46 177	0,78	53 823	0,78	51
10′	$\bar{1}$,44 472	73	$\bar{1}$,98 248	07	$\bar{1}$,46 224	78	0,53 776	78	50′
11	44 516	72	98 244	07	46 271	80	53 729	80	49
12	44 559	72	98 240	05	46 319	78	53 681	78	48
13	44 602	73	98 237	07	46 366	78	53 634	78	47
14	44 646	0,72	98 233	0,07	46 413	0,78	53 587	0,78	46
15	44 689	73	98 229	05	46 460	78	53 540	78	45
16	44 733	72	98 226	07	46 507	78	53 493	78	44
17	44 776	72	98 222	0,7	46 554	78	53 446	78	43
18	44 819	72	98 218	05	46 601	78	53 399	78	42
19	44 862	0,72	98 215	0,07	46 648	0,77	53 352	0,77	41
20′	$\bar{1}$,44 905	72	$\bar{1}$,98 211	07	$\bar{1}$,46 694	78	0,53 306	78	40′
21	44 948	73	98 207	05	46 741	78	53 259	78	39
22	44 992	72	98 204	07	46 788	78	53 212	78	38
23	45 035	70	98 200	07	46 835	77	53 165	77	37
24	45 077	0,72	98 196	0,07	46 881	0,78	53 119	0,78	36
25	45 120	72	98 192	05	46 928	78	53 072	78	35
26	45 163	72	98 189	07	46 975	77	53 025	77	34
27	45 206	72	98 185	07	47 021	78	52 979	78	33
28	45 249	72	98 181	07	47 068	77	52 932	77	32
29	45 292	0,70	98 177	0,05	47 114	0,77	52 886	0,77	31
30′	$\bar{1}$,45 334		$\bar{1}$,98 174		$\bar{1}$,47 160		0,52 840		30′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	73°

P. P.

d 1	0,05	0,07	0,70	0,72	0,73	0,77	0,78	0,80
6″	0,3	0,4	4,2	4,3	4,4	4,6	4,7	4,8
7	0,4	0,5	4,9	5,0	5,1	5,4	5,5	5,6
8	0,4	0,5	5,6	5,7	5,9	6,1	6,3	6,4
9	0,5	0,6	6,3	6,5	6,6	6,9	7,1	7,2
10	0,5	0,7	7,0	7,2	7,3	7,7	7,8	8,0
20	1,0	1,3	14,0	14,3	14,7	15,3	15,7	16,0
30	1,5	2,0	21,0	21,5	22,0	23,0	23,5	24,0
40	2,0	2,7	28,0	28,7	29,3	30,7	31,3	32,0
50	2,5	3,3	35,0	35,8	36,7	38,3	39,2	40,0

73°

16°

16°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
30'	1̄,45 334	0,72	1̄,98 174	0,07	1̄,47 160	0,78	0,52 840	0,78	30'
31	45 377	70	98 170	07	47 207	77	52 793	77	29
32	45 419	72	98 166	07	47 253	77	52 747	77	28
33	45 462	70	98 162	05	47 299	78	52 701	78	27
34	45 504	0,72	98 159	0,07	47 346	0,77	52 654	0,77	26
35	45 547	70	98 155	07	47 392	77	52 608	77	25
36	45 589	72	98 151	07	47 438	77	52 562	77	24
37	45 632	70	98 147	05	47 484	77	52 516	77	23
38	45 674	70	98 144	07	47 530	77	52 470	77	22
39	45 716	0,70	98 140	0,07	47 576	0,77	52 424	0,77	21
40'	1̄,45 758	72	1̄,98 136	07	1̄,47 622	77	0,52 378	77	20'
41	45 801	70	98 132	05	47 668	77	52 332	77	19
42	45 843	70	98 129	07	47 714	77	52 286	77	18
43	45 885	70	98 125	07	47 760	77	52 240	77	17
44	45 927	0,70	98 121	0,07	47 806	0,77	52 194	0,77	16
45	45 969	70	98 117	07	47 852	75	52 148	75	15
46	46 011	70	98 113	05	47 897	77	52 103	77	14
47	46 053	70	98 110	07	47 943	77	52 057	77	13
48	46 095	68	98 106	07	47 989	77	52 011	77	12
49	46 136	0,70	98 102	0,07	48 035	0,75	51 965	0,75	11
50'	1̄,46 178	70	1̄,98 098	07	1̄,48 080	77	0,51 920	77	10'
51	46 220	70	98 094	07	48 126	75	51 874	75	9
52	46 262	68	98 090	05	48 171	77	51 829	77	8
53	46 303	70	98 087	07	48 217	75	51 783	75	7
54	46 345	0,68	98 083	0,07	48 262	0,75	51 738	0,75	6
55	46 386	70	98 079	07	48 307	77	51 693	77	5
56	46 428	68	98 075	07	48 353	75	51 647	75	4
57	46 469	70	98 071	07	48 398	75	51 602	75	3
58	46 511	68	98 067	07	48 443	77	51 557	77	2
59	46 552	0,70	98 063	0,05	48 489	0,75	51 511	0,75	1
60'	1̄,46 594		1̄,98 060		1̄,48 534		0,51 466		0'
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	73°

P. P.

d 1"	0,05	0,07	0,68	0,70	0,72	0,75	0,77	0,78
6"	0,3	0,4	4,1	4,2	4,3	4,5	4,6	4,7
7	0,4	0,5	4,8	4,9	5,0	5,3	5,4	5,5
8	0,4	0,5	5,5	5,6	5,7	6,0	6,1	6,3
9	0,5	0,6	6,2	6,3	6,5	6,8	6,9	7,1
10	0,5	0,7	6,8	7,0	7,2	7,5	7,7	7,8
20	1,0	1,3	13,7	14,0	14,3	15,0	15,3	15,7
30	1,5	2,0	20,5	21,0	21,5	22,5	23,0	23,5
40	2,0	2,7	27,3	28,0	28,7	30,0	30,7	31,3
50	2,5	3,3	34,2	35,0	35,8	37,5	38,3	39,2

73°

17°

17°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
0'	$\overline{1}$,46 594	0,68	$\overline{1}$,98 060	0,07	$\overline{1}$,48 534	0,75	0,51 466	0,75	60'
1	46 635	68	98 056	07	48 579	75	51 421	75	59
2	46 676	68	98 052	07	48 624	75	51 376	75	58
3	46 717	68	98 048	07	48 669	75	51 331	75	57
4	46 758	0,70	98 044	0,07	48 714	0,75	51 286	0,75	56
5	46 800	68	98 040	07	48 759	75	51 241	75	55
6	46 841	68	98 036	07	48 804	75	51 196	75	54
7	46 882	68	98 032	05	48 849	75	51 151	75	53
8	46 923	68	98 029	07	48 894	75	51 106	75	52
9	46 964	0,68	98 025	0,07	48 939	0,75	51 061	0,75	51
10'	$\overline{1}$,47 005	67	$\overline{1}$,98 021	07	$\overline{1}$,48 984	75	0,51 016	75	50'
11	47 045	68	98 017	07	49 029	73	50 971	73	49
12	47 086	68	98 013	07	49 073	75	50 927	75	48
13	47 127	68	98 009	07	49 118	75	50 882	75	47
14	47 168	0,68	98 005	0,07	49 163	0,73	50 837	0,73	46
15	47 209	67	98 001	07	49 207	75	50 793	75	45
16	47 249	68	97 997	07	49 252	73	50 748	73	44
17	47 290	67	97 993	07	49 296	75	50 704	75	43
18	47 330	68	97 989	05	49 341	73	50 659	73	42
19	47 371	0,67	97 986	0,07	49 385	0,75	50 615	0,75	41
20'	$\overline{1}$,47 411	68	$\overline{1}$,97 982	07	$\overline{1}$,49 430	73	0,50 570	73	40'
21	47 452	67	97 978	07	49 474	75	50 526	75	39
22	47 492	68	97 974	07	49 519	73	50 481	73	38
23	47 533	67	97 970	07	49 563	73	50 437	73	37
24	47 573	0,67	97 966	0,07	49 607	0,75	50 393	0,75	36
25	47 613	68	97 962	07	49 652	73	50 348	73	35
26	47 654	67	97 958	07	49 696	73	50 304	73	34
27	47 694	67	97 954	07	49 740	73	50 260	73	33
28	47 734	67	97 950	07	49 784	73	50 216	73	32
29	47 774	0,67	97 946	0,07	49 828	0,73	50 172	0,73	31
30'	$\overline{1}$,47 814		$\overline{1}$,97 942		$\overline{1}$,49 872		0,50 128		30'
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	72°

P. P.

d 1"	0,05	0,07	0,67	0,68	0,70	0,72	0,73	0,75
6"	0,3	0,4	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
7	0,4	0,5	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,3
8	0,4	0,5	5,3	5,5	5,6	5,7	5,9	6,0
9	0,5	0,6	6,0	6,2	6,3	6,5	6,6	6,8
10	0,5	0,7	6,7	6,8	7,0	7,2	7,3	7,5
20	1,0	1,3	13,3	13,7	14,0	14,3	14,7	15,0
30	1,5	2,0	20,0	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5
40	2,0	2,7	26,7	27,3	28,0	28,7	29,3	30,0
50	2,5	3,3	33,3	34,2	35,0	35,8	36,7	37,5

72°

17°

17°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{1}$,47 814	0,67	$\overline{1}$,97 942	0,07	$\overline{1}$,49 872	0,73	0,50 128	0,73	**30′**
31	47 854	67	97 938	07	49 916	73	50 084	73	**29**
32	47 894	67	97 934	07	49 960	73	50 040	73	**28**
33	47 934	67	97 930	07	50 004	73	49 996	73	**27**
34	47 974	0,67	97 926	0,07	50 048	0,73	49 952	0,73	**26**
35	48 014	67	97 922	07	50 092	73	49 908	73	**25**
36	48 054	67	97 918	07	50 136	73	49 864	73	**24**
37	48 094	65	97 914	07	50 180	72	49 820	72	**23**
38	48 133	67	97 910	07	50 223	73	49 777	73	**22**
39	48 173	0,67	97 906	0,07	50 267	0,73	49 733	0,73	**21**
40′	$\overline{1}$,48 213	65	$\overline{1}$,97 902	07	$\overline{1}$,50 311	73	0,49 689	73	**20′**
41	48 252	67	97 898	07	50 355	72	49 645	72	**19**
42	48 292	67	97 894	07	50 398	73	49 602	73	**18**
43	48 332	65	97 890	07	50 442	72	49 558	72	**17**
44	48 371	0,67	97 886	0,07	50 485	0,73	49 515	0,73	**16**
45	48 411	65	97 882	07	50 529	72	49 471	72	**15**
46	48 450	67	97 878	07	50 572	73	49 428	73	**14**
47	48 490	65	97 874	07	50 616	72	49 384	72	**13**
48	48 529	65	97 870	07	50 659	73	49 341	73	**12**
49	48 568	0,65	97 866	0,08	50 703	0,72	49 297	0,72	**11**
50′	$\overline{1}$,48 607	67	$\overline{1}$,97 861	07	$\overline{1}$,50 746	72	0,49 254	72	**10′**
51	48 647	65	97 857	07	50 789	73	49 211	73	**9**
52	48 686	65	97 853	07	50 833	72	49 167	72	**8**
53	48 725	65	97 849	07	50 876	72	49 124	72	**7**
54	48 764	0,65	97 845	0,07	50 919	0,72	49 081	0,72	**6**
55	48 803	65	97 841	07	50 962	72	49 038	72	**5**
56	48 842	65	97 837	07	51 005	72	48 995	72	**4**
57	48 881	65	97 833	07	51 048	73	48 952	73	**3**
58	48 920	65	97 829	07	51 092	72	48 908	72	**2**
59	48 959	0,65	97 825	0,07	51 135	0,72	48 865	0,72	**1**
60′	$\overline{1}$,48 998		$\overline{1}$,97 821		$\overline{1}$,51 178		0,48 822		**0′**
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	72°

P. P.

d 1″	0,07	0,08	0,65	0,67	0,72	0,73
6″	0,4	0,5	3,9	4,0	4,3	4,4
7	0,5	0,6	4,6	4,7	5,0	5,1
8	0,5	0,7	5,2	5,3	5,7	5,9
9	0,6	0,8	5,9	6,0	6,5	6,6
10	0,7	0,8	6,5	6,7	7,2	7,3
20	1,3	1,7	13,0	13,3	14,3	14,7
30	2,0	2,5	19,5	20,0	21,5	22,0
40	2,7	3,3	26,0	26,7	28,7	29,3
50	3,3	4,2	32,5	33,8	35,8	36,7

72°

18°

18°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\bar{1}$,48 998	0,65	$\bar{1}$,97 821	0,07	$\bar{1}$,51 178	0,72	0,48 822	0,72	60′
1	49 037	65	97 817	08	51 221	72	48 779	72	59
2	49 076	65	97 812	07	51 264	70	48 736	70	58
3	49 115	63	97 808	07	51 306	72	48 694	72	57
4	49 153	0,65	97 804	0,07	51 349	0,72	48 651	0,72	56
5	49 192	65	97 800	07	51 392	72	48 608	72	55
6	49 231	63	97 796	07	51 435	72	48 565	72	54
7	49 269	65	97 792	07	51 478	70	48 522	70	53
8	49 308	65	97 788	07	51 520	72	48 480	72	52
9	49 347	0,63	97 784	0,08	51 563	0,72	48 437	0,72	51
10′	$\bar{1}$,49 385	65	$\bar{1}$,97 779	07	$\bar{1}$,51 606	70	0,48 394	70	50′
11	49 424	63	97 775	07	51 648	72	48 352	72	49
12	49 462	63	97 771	07	51 691	72	48 309	72	48
13	49 500	65	97 767	07	51 734	70	48 266	70	47
14	49 539	0,63	97 763	0,07	51 776	0,72	48 224	0,72	46
15	49 577	63	97 759	08	51 819	70	48 181	70	45
16	49 615	65	97 754	07	51 861	70	48 139	70	44
17	49 654	63	97 750	07	51 903	72	48 097	72	43
18	49 692	63	97 746	07	51 946	70	48 054	70	42
19	49 730	0,63	97 742	0,07	51 988	0,72	48 012	0,72	41
20′	$\bar{1}$,49 768	63	$\bar{1}$,97 738	07	$\bar{1}$,52 031	70	0,47 969	70	40′
21	49 806	63	97 734	08	52 073	70	47 927	70	39
22	49 844	63	97 729	07	52 115	70	47 885	70	38
23	49 882	63	97 725	07	52 157	72	47 843	72	37
24	49 920	0,63	97 721	0,07	52 200	0,70	47 800	0,70	36
25	49 958	63	97 717	07	52 242	70	47 758	70	35
26	49 996	63	97 713	08	52 284	70	47 716	70	34
27	50 034	63	97 708	07	52 326	70	47 674	70	33
28	50 072	63	97 704	07	52 368	70	47 632	70	32
29	50 110	0,63	97 700	0,07	52 410	0,70	47 590	0,70	31
30′	$\bar{1}$,50 148		$\bar{1}$,97 696		$\bar{1}$,52 452		0,47 548		30′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	71°

P. P.

d 1″	0,07	0,08	0,63	0,65	0,70	0,72
6″	0,4	0,5	3,8	3,9	4,2	4,3
7	0,5	0,6	4,4	4,6	4,9	5,0
8	0,5	0,7	5,1	5,2	5,6	5,7
9	0,6	0,8	5,7	5,9	6,3	6,5
10	0,7	0,8	6,3	6,5	7,0	7,2
20	1,3	1,7	12,7	13,0	14,0	14,3
30	2,0	2,5	19,0	19,5	21,0	21,5
40	2,7	3,3	25,3	26,0	28,0	28,7
50	3,3	4,2	31,7	32,5	35,0	35,8

71°

18°

18°	lg sin	+ d 1″	lg cos	— d 1″	lg tg	+ d 1″	lg cotg	— d 1″	
30′	$\overline{1}$,50 148	0,62	$\overline{1}$,97 696	0,08	$\overline{1}$,52 452	0,70	0,47 548	0,70	30′
31	50 185	63	97 691	07	52 494	70	47 506	70	29
32	50 223	63	97 687	07	52 536	70	47 464	70	28
33	50 261	62	97 683	07	52 578	70	47 422	70	27
34	50 298	0,63	97 679	0,08	52 620	0,68	47 380	0,68	26
35	50 336	63	97 674	07	52 661	70	47 339	70	25
36	50 374	62	97 670	07	52 703	70	47 297	70	24
37	50 411	63	97 666	07	52 745	70	47 255	70	23
38	50 449	62	97 662	08	52 787	70	47 213	70	22
39	50 486	0,62	97 657	0,07	52 829	0,68	47 171	0,68	21
40′	$\overline{1}$,50 523	63	$\overline{1}$,97 653	07	$\overline{1}$,52 870	70	0,47 130	70	20′
41	50 561	62	97 649	07	52 912	68	47 088	68	19
42	50 598	62	97 645	08	52 953	70	47 047	70	18
43	50 635	63	97 640	07	52 995	70	47 005	70	17
44	50 673	0,62	97 636	0,07	53 037	0,68	46 963	0,68	16
45	50 710	62	97 632	07	53 078	70	46 922	70	15
46	50 747	62	97 628	08	53 120	68	46 880	68	14
47	50 784	62	97 623	07	53 161	68	46 839	68	13
48	50 821	62	97 619	07	53 202	70	46 798	70	12
49	50 858	0,63	97 615	0,08	53 244	0,68	46 756	0,68	11
50′	$\overline{1}$,50 896	62	$\overline{1}$,97 610	07	$\overline{1}$,53 285	70	0,46 715	70	10′
51	50 933	62	97 606	07	53 327	68	46 673	68	9
52	50 970	62	97 602	08	53 368	68	46 632	68	8
53	51 007	60	97 597	07	53 409	68	46 591	68	7
54	51 043	0,62	97 593	0,07	53 450	0,70	46 550	0,70	6
55	51 080	62	97 589	08	53 492	68	46 508	68	5
56	51 117	62	97 584	07	53 533	68	46 467	68	4
57	51 154	62	97 580	07	53 574	68	46 426	68	3
58	51 191	60	97 576	08	53 615	68	46 385	68	2
59	51 227	0,62	97 571	0,07	53 656	0,68	46 344	0,68	1
60′	$\overline{1}$,51 264		$\overline{1}$,97 567		$\overline{1}$,53 697		0,46 303		0′
	lg cos	— d 1″	lg sin	+ d 1″	lg cotg	— d 1″	lg tg	+ d 1″	71°

P. P.

d 1″	0,07	0,08	0,60	0,62	0,63	0,68	0,70
6″	0,4	0,5	3,6	3,7	3,8	4,1	4,2
7	0,5	0,6	4,2	4,3	4,4	4,8	4,9
8	0,5	0,7	4,8	4,9	5,1	5,5	5,6
9	0,6	0,8	5,4	5,6	5,7	6,2	6,3
10	0,7	0,8	6,0	6,2	6,3	6,8	7,0
20	1,3	1,7	12,0	12,3	12,7	13,7	14,0
30	2,0	2,5	18,0	18,5	19,0	20,5	21,0
40	2,7	3,3	24,0	24,7	25,3	27,3	28,0
50	3,3	4,2	30,0	30,8	31,7	34,2	35,0

71°

19°

19°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,51 264	0,62	$\overline{1}$,97 567	0,07	$\overline{1}$,53 697	0,68	0,46 303	0,68	60′
1	51 301	62	97 563	08	53 738	68	46 262	68	59
2	51 338	60	97 558	07	53 779	68	46 221	68	58
3	51 374	62	97 554	07	53 820	68	46 180	68	57
4	51 411	0,60	97 550	0,08	53 861	0,68	46 139	0,68	56
5	51 447	62	97 545	07	53 902	68	46 098	68	55
6	51 484	60	97 541	08	53 943	68	46 057	68	54
7	51 520	62	97 536	07	53 984	68	46 016	68	53
8	51 557	60	97 532	07	54 025	67	45 975	67	52
9	51 593	0,60	97 528	0,08	54 065	0,68	45 935	0,68	51
10′	$\overline{1}$,51 629	62	$\overline{1}$,97 523	07	$\overline{1}$,54 106	68	0,45 894	68	50′
11	51 666	60	97 519	07	54 147	67	45 853	67	49
12	51 702	60	97 515	08	54 187	68	45 813	68	48
13	51 738	60	97 510	07	54 228	68	45 772	68	47
14	51 774	0,62	97 506	0,08	54 269	0,67	45 731	0,67	46
15	51 811	60	97 501	07	54 309	68	45 691	68	45
16	51 847	60	97 497	08	54 350	67	45 650	67	44
17	51 883	60	97 492	07	54 390	68	45 610	68	43
18	51 919	60	97 488	07	54 431	67	45 569	67	42
19	51 955	0,60	97 484	0,08	54 471	0,68	45 529	0,68	41
20′	$\overline{1}$,51 991	60	$\overline{1}$,97 479	07	$\overline{1}$,54 512	67	0,45 488	67	40′
21	52 027	60	97 475	08	54 552	68	45 448	68	39
22	52 063	60	97 470	07	54 593	67	45 407	67	38
23	52 099	60	97 466	08	54 633	67	45 367	67	37
24	52 135	0,60	97 461	0,07	54 673	0,68	45 327	0,68	36
25	52 171	60	97 457	07	54 714	67	45 286	67	35
26	52 207	58	97 453	08	54 754	67	45 246	67	34
27	52 242	60	97 448	07	54 794	68	45 206	68	33
28	52 278	60	97 444	08	54 835	67	45 165	67	32
29	52 314	0,60	97 439	0,07	54 875	0,67	45 125	0,67	31
30′	$\overline{1}$,52 350		$\overline{1}$,97 435		$\overline{1}$,54 915		0,45 085		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	70°

P. P.

d 1″	0,07	0,08	0,58	0,60	0,62	0,67	0,68
6″	0,4	0,5	3,5	3,6	3,7	4,0	4,1
7	0,5	0,6	4,1	4,2	4,3	4,7	4,8
8	0,5	0,7	4,7	4,8	4,9	5,3	5,5
9	0,6	0,8	5,3	5,4	5,6	6,0	6,2
10	0,7	0,8	5,8	6,0	6,2	6,7	6,8
20	1,3	1,7	11,7	12,0	12,3	13,3	13,7
30	2,0	2,5	17,5	18,0	18,5	20,0	20,5
40	2,7	3,3	23,3	24,0	24,7	26,7	27,3
50	3,3	4,2	29,2	30,0	30,8	33,3	34,2

70°

19°

19°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\bar{1}$,52 350		$\bar{1}$,97 435		$\bar{1}$,54 915		0,45 085		**30′**
		0,58		0,08		0,67		0,67	
31	52 385		97 430		54 955		45 045		**29**
		60		07		67		67	
32	52 421		97 426		54 995		45 005		**28**
		58		08		67		67	
33	52 456		97 421		55 035		44 965		**27**
		60		07		67		67	
34	52 492		97 417		55 075		44 925		**26**
		0,58		0,08		0,67		0,67	
35	52 527		97 412		55 115		44 885		**25**
		60		07		67		67	
36	52 563		97 408		55 155		44 845		**24**
		58		08		67		67	
37	52 598		97 403		55 195		44 805		**23**
		60		07		67		67	
38	52 634		97 399		55 235		44 765		**22**
		58		08		67		67	
39	52 669		97 394		55 275		44 725		**21**
		0,60		0,07		0,67		0,67	
40′	$\bar{1}$,52 705		$\bar{1}$,97 390		$\bar{1}$,55 315		0,44 685		**20′**
		58		08		67		67	
41	52 740		97 385		55 355		44 645		**19**
		58		07		67		67	
42	52 775		97 381		55 395		44 605		**18**
		60		08		65		65	
43	52 811		97 376		55 434		44 566		**17**
		58		07		67		67	
44	52 846		97 372		55 474		44 526		**16**
		0,58		0,08		0,67		0,67	
45	52 881		97 367		55 514		44 486		**15**
		58		07		67		67	
46	52 916		97 363		55 554		44 446		**14**
		58		08		65		65	
47	52 951		97 358		55 593		44 407		**13**
		58		08		67		67	
48	52 986		97 353		55 633		44 367		**12**
		58		07		67		67	
49	53 021		97 349		55 673		44 327		**11**
		0,58		0,08		0,65		0,65	
50′	$\bar{1}$,53 056		$\bar{1}$,97 344		$\bar{1}$,55 712		0,44 288		**10′**
		60		07		67		67	
51	53 092		97 340		55 752		44 248		**9**
		57		08		65		65	
52	53 126		97 335		55 791		44 209		**8**
		58		07		67		67	
53	53 161		97 331		55 831		44 169		**7**
		58		08		65		65	
54	53 196		97 326		55 870		44 130		**6**
		0,58		0,07		0,67		0,67	
55	53 231		97 322		55 910		44 090		**5**
		58		08		65		65	
56	53 266		97 317		55 949		44 051		**4**
		58		08		67		67	
57	53 301		97 312		55 989		44 011		**3**
		58		07		65		65	
58	53 336		97 308		56 028		43 972		**2**
		57		08		65		65	
59	53 370		97 303		56 067		43 933		**1**
		0,58		0,07		0,67		0,67	
60′	$\bar{1}$,53 405		$\bar{1}$,97 299		$\bar{1}$,56 107		0,43 893		**0′**
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	**70°**

P. P.

d 1″	0,07	0,08	0,57	0,58	0,60	0,65	0,67
6″	0,4	0,5	3,4	3,5	3,6	3,9	4,0
7	0,5	0,6	4,0	4,1	4,2	4,6	4,7
8	0,5	0,7	4,5	4,7	4,8	5,2	5,3
9	0,6	0,8	5,1	5,3	5,4	5,9	6,0
10	0,7	0,8	5,7	5,8	6,0	6,5	6,7
20	1,3	1,7	11,3	11,7	12,0	13,0	13,3
30	2,0	2,5	17,0	17,5	18,0	19,5	20,0
40	2,7	3,3	22,7	23,3	24,0	26,0	26,7
50	3,3	4,2	28,3	29,2	30,0	32,5	33,3

70°

20°

20°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
0'	$\bar{1}$,53 405	0,58	$\bar{1}$,97 299	0,08	$\bar{1}$,56 107	0,65	0,43 893	0,65	60'
1	53 440	58	97 294	08	56 146	65	43 854	65	59
2	53 475	57	97 289	07	56 185	65	43 815	65	58
3	53 509	58	97 285	08	56 224	67	43 776	67	57
4	53 544	0,57	97 280	0,07	56 264	0,65	43 736	0,65	56
5	53 578	58	97 276	08	56 303	65	43 697	65	55
6	53 613	57	97 271	08	56 342	65	43 658	65	54
7	53 647	58	97 266	07	56 381	65	43 619	65	53
8	53 682	57	97 262	08	56 420	65	43 580	65	52
9	53 716	0,58	97 257	0,08	56 459	0,65	43 541	0,65	51
10'	$\bar{1}$,53 751	57	$\bar{1}$,97 252	07	$\bar{1}$,56 498	65	0,43 502	65	50'
11	53 785	57	97 248	08	56 537	65	43 463	65	49
12	53 819	58	97 243	08	56 576	65	43 424	65	48
13	53 854	57	97 238	07	56 615	65	43 385	65	47
14	53 888	0,57	97 234	0,08	56 654	0,65	43 346	0,65	46
15	53 922	58	97 229	08	56 693	65	43 307	65	45
16	53 957	57	97 224	07	56 732	65	43 268	65	44
17	53 991	57	97 220	08	56 771	65	43 229	65	43
18	54 025	57	97 215	08	56 810	65	43 190	65	42
19	54 059	0,57	97 210	0,07	56 849	0,63	43 151	0,63	41
20'	$\bar{1}$,54 093	57	$\bar{1}$,97 206	08	$\bar{1}$,56 887	65	0,43 113	65	40'
21	54 127	57	97 201	08	56 926	65	43 074	65	39
22	54 161	57	97 196	07	56 965	65	43 035	65	38
23	54 195	57	97 192	08	57 004	63	42 996	63	37
24	54 229	0,57	97 187	0,08	57 042	0,65	42 958	0,65	36
25	54 263	57	97 182	07	57 081	65	42 919	65	35
26	54 297	57	97 178	08	57 120	63	42 880	63	34
27	54 331	57	97 173	08	57 158	65	42 842	65	33
28	54 365	57	97 168	08	57 197	63	42 803	63	32
29	54 399	0,57	97 163	0,07	57 235	0,65	42 765	0,65	31
30'	$\bar{1}$,54 433		$\bar{1}$,97 159		$\bar{1}$,57 274		0,42 726		30'
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	69°

P. P.

d 1"	0,07	0,08	0,57	0,58	0,63	0,65	0,67
6"	0,4	0,5	3,4	3,5	3,8	3,9	4,0
7	0,5	0,6	4,0	4,1	4,4	4,6	4,7
8	0,5	0,7	4,5	4,7	5,1	5,2	5,3
9	0,6	0,8	5,1	5,3	5,7	5,9	6,0
10	0,7	0,8	5,7	5,8	6,3	6,5	6,7
20	1,3	1,7	11,3	11,7	12,7	13,0	13,3
30	2,0	2,5	17,0	17,5	19,0	19,5	20,0
40	2,7	3,3	22,7	23,3	25,3	26,0	26,7
50	3,3	4,2	28,3	29,2	31,7	32,5	33,3

69°

20°

20°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
30'	$\bar{1}$,54 433	0,55	$\bar{1}$,97 159	0,08	$\bar{1}$,57 274	0,63	0,42 726	0,63	30'
31	54 466	57	97 154	08	57 312	65	42 688	65	29
32	54 500	57	97 149	07	57 351	63	42 649	63	28
33	54 534	55	97 145	08	57 389	65	42 611	65	27
34	54 567	0,57	97 140	0,08	57 428	0,63	42 572	0,63	26
35	54 601	57	97 135	08	57 466	63	42 534	63	25
36	54 635	55	97 130	07	57 504	65	42 496	65	24
37	54 668	57	97 126	08	57 543	63	42 457	63	23
38	54 702	55	97 121	08	57 581	63	42 419	63	22
39	54 735	0,57	97 116	0,08	57 619	0,65	42 381	0,65	21
40'	$\bar{1}$,54 769	55	$\bar{1}$,97 111	07	$\bar{1}$,57 658	63	0,42 342	63	20'
41	54 802	57	97 107	08	57 696	63	42 304	63	19
42	54 836	55	97 102	08	57 734	63	42 266	63	18
43	54 869	57	97 097	08	57 772	63	42 228	63	17
44	54 903	0,55	97 092	0,08	57 810	0,65	42 190	0,65	16
45	54 936	55	97 087	07	57 849	63	42 151	63	15
46	54 969	57	97 083	08	57 887	63	42 113	63	14
47	55 003	55	97 078	08	57 925	63	42 075	63	13
48	55 036	55	97 073	08	57 963	63	42 037	63	12
49	55 069	0,55	97 068	0,08	58 001	0,63	41 999	0,63	11
50'	$\bar{1}$,55 102	57	$\bar{1}$,97 063	07	$\bar{1}$,58 039	63	0,41 961	63	10'
51	55 136	55	97 059	08	58 077	63	41 923	63	9
52	55 169	55	97 054	08	58 115	63	41 885	63	8
53	55 202	55	97 049	08	58 153	63	41 847	63	7
54	55 235	0,55	97 044	0,08	58 191	0,63	41 809	0,63	6
55	55 268	55	97 039	07	58 229	63	41 771	63	5
56	55 301	55	97 035	08	58 267	62	41 733	62	4
57	55 334	55	97 030	08	58 304	63	41 696	63	3
58	55 367	55	97 025	08	58 342	63	41 658	63	2
59	55 400	0,55	97 020	0,08	58 380	0,63	41 620	0,63	1
60'	$\bar{1}$,55 433		$\bar{1}$,97 015		$\bar{1}$,58 418		0,41 582		0'
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	69°

P. P.

d 1"	0,07	0,08	0,55	0,57	0,62	0,63	0,65
6"	0,4	0,5	3,3	3,4	3,7	3,8	3,9
7	0,5	0,6	3,9	4,0	4,3	4,4	4,6
8	0,5	0,7	4,4	4,5	4,9	5,1	5,2
9	0,6	0,8	5,0	5,1	5,6	5,7	5,9
10	0,7	0,8	5,5	5,7	6,2	6,3	6,5
20	1,3	1,7	11,0	11,3	12,3	12,7	13,0
30	2,0	2,5	16,5	17,0	18,5	19,0	19,5
40	2,7	3,3	22,0	22,7	24,7	25,3	26,0
50	3,3	4,2	27,5	28,3	30,8	31,7	32,5

69°

21°

21°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\bar{1}$,55 433	0,55	$\bar{1}$,97 015	0,08	$\bar{1}$,58 418	0,62	0,41 582	0,62	60′
1	55 466	55	97 010	08	58 455	63	41 545	63	59
2	55 499	55	97 005	07	58 493	63	41 507	63	58
3	55 532	53	97 001	08	58 531	63	41 469	63	57
4	55 564	0,55	96 996	0,08	58 569	0,62	41 431	0,62	56
5	55 597	55	96 991	08	58 606	63	41 394	63	55
6	55 630	55	96 986	08	58 644	62	41 356	62	54
7	55 663	53	96 981	08	58 681	63	41 319	63	53
8	55 695	55	96 976	08	58 719	63	41 281	63	52
9	55 728	0,55	96 971	0,08	58 757	0,62	41 243	0,62	51
10′	$\bar{1}$,55 761	53	$\bar{1}$,96 966	07	$\bar{1}$,58 794	63	0,41 206	63	50′
11	55 793	55	96 962	08	58 832	62	41 168	62	49
12	55 826	53	96 957	08	58 869	63	41 131	63	48
13	55 858	55	96 952	08	58 907	62	41 093	62	47
14	55 891	0,53	96 947	0,08	58 944	0,62	41 056	0,62	46
15	55 923	55	96 942	08	58 981	63	41 019	63	45
16	55 956	53	96 937	08	59 019	62	40 981	62	44
17	55 988	55	96 932	08	59 056	63	40 944	63	43
18	56 021	53	96 927	08	59 094	62	40 906	62	42
19	56 053	0,53	96 922	0,08	59 131	0,62	40 869	0,62	41
20′	$\bar{1}$,56 085	55	$\bar{1}$,96 917	08	$\bar{1}$,59 168	62	0,40 832	62	40′
21	56 118	53	96 912	08	59 205	63	40 795	63	39
22	56 150	53	96 907	07	59 243	62	40 757	62	38
23	56 182	55	96 903	08	59 280	62	40 720	62	37
24	56 215	0,53	96 898	0,08	59 317	0,62	40 683	0,62	36
25	56 247	53	96 893	08	59 354	62	40 646	62	35
26	56 279	53	96 888	08	59 391	63	40 609	63	34
27	56 311	53	96 883	08	59 429	62	40 571	62	33
28	56 343	53	96 878	08	59 466	62	40 534	62	32
29	56 375	0,55	96 873	0,08	59 503	0,62	40 497	0,62	31
30′	$\bar{1}$,56 408		$\bar{1}$,96 868		$\bar{1}$,59 540		0,40 460		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	68°

P. P.

d 1″	0,07	0,08	0,53	0,55	0,62	0,63
6″	0,4	0,5	3,2	3,3	3,7	3,8
7	0,5	0,6	3,7	3,9	4,3	4,4
8	0,5	0,7	4,3	4,4	4,9	5,1
9	0,6	0,8	4,8	5,0	5,6	5,7
10	0,7	0,8	5,3	5,5	6,2	6,3
20	1,3	1,7	10,7	11,0	12,3	12,7
30	2,0	2,5	16,0	16,5	18,5	19,0
40	2,7	3,3	21,3	22,0	24,7	25,3
50	3,3	4,2	26,7	27,5	30,8	31,7

68°

21°

21°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\overline{1}$,56 408	0,53	$\overline{1}$,96 868	0,08	$\overline{1}$,59 540	0,62	0,40 460	0,62	**30′**
31	56 440	53	96 863	08	59 577	62	40 423	62	**29**
32	56 472	53	96 858	08	59 614	62	40 386	62	**28**
33	56 504	53	96 853	08	59 651	62	40 349	62	**27**
34	56 536	0,53	96 848	0,08	59 688	0,62	40 312	0,62	**26**
35	56 568	52	96 843	08	59 725	62	40 275	62	**25**
36	56 599	53	96 838	08	59 762	62	40 238	62	**24**
37	56 631	53	96 833	08	59 799	60	40 201	60	**23**
38	56 663	53	96 828	08	59 835	62	40 165	62	**22**
39	56 695	0,53	96 823	0,08	59 872	0,62	40 128	0,62	**21**
40′	$\overline{1}$,56 727	53	$\overline{1}$,96 818	08	$\overline{1}$,59 909	62	0,40 091	62	**20′**
41	56 759	52	96 813	08	59 946	62	40 054	62	**19**
42	56 790	53	96 808	08	59 983	60	40 017	60	**18**
43	56 822	53	96 803	08	60 019	62	39 981	62	**17**
44	56 854	0,53	96 798	0,08	60 056	0,62	39 944	0,62	**16**
45	56 886	52	96 793	08	60 093	62	39 907	62	**15**
46	56 917	53	96 788	08	60 130	60	39 870	60	**14**
47	56 949	52	96 783	08	60 166	62	39 834	62	**13**
48	56 980	53	96 778	10	60 203	62	39 797	62	**12**
49	57 012	0,53	96 772	0,08	60 240	0,60	39 760	0,60	**11**
50′	$\overline{1}$,57 044	52	$\overline{1}$,96 767	08	$\overline{1}$,60 276	62	0,39 724	62	**10′**
51	57 075	53	96 762	08	60 313	60	39 687	60	**9**
52	57 107	52	96 757	08	60 349	62	39 651	62	**8**
53	57 138	52	96 752	08	60 386	60	39 614	60	**7**
54	57 169	0,53	96 747	0,08	60 422	0,62	39 578	0,62	**6**
55	57 201	52	96 742	08	60 459	60	39 541	60	**5**
56	57 232	53	96 737	08	60 495	62	39 505	62	**4**
57	57 264	52	96 732	08	60 532	60	39 468	60	**3**
58	57 295	52	96 727	08	60 568	62	39 432	62	**2**
59	57 326	0,53	96 722	0,08	60 605	0,60	39 395	0,60	**1**
60′	$\overline{1}$,57 358		$\overline{1}$,96 717		$\overline{1}$,60 641		0,39 359		**0′**
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	68°

P. P.

d 1″	0,08	0,10	0,52	0,53	0,60	0,62
6″	0,5	0,6	3,1	3,2	3,6	3,7
7	0,6	0,7	3,6	3,7	4,2	4,3
8	0,7	0,8	4,1	4,3	4,8	4,9
9	0,8	0,9	4,7	4,8	5,4	5,6
10	0,8	1,0	5,2	5,3	6,0	6,2
20	1,7	2,0	10,3	10,7	12,0	12,3
30	2,5	3,0	15,5	16,0	18,0	18,5
40	3,3	4,0	20,7	21,3	24,0	24,7
50	4,2	5,0	25,8	26,7	30,0	30,8

68°

22°

22°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\bar{1}$,57 358	0,52	$\bar{1}$,96 717	0,10	$\bar{1}$,60 641	0,60	0,39 359	0,60	60′
1	57 389	52	96 711	08	60 677	62	39 323	62	59
2	57 420	52	96 706	08	60 714	60	39 286	60	58
3	57 451	52	96 701	08	60 750	60	39 250	60	57
4	57 482	0,53	96 696	0,08	60 786	0,62	39 214	0,62	56
5	57 514	52	96 691	08	60 823	60	39 177	60	55
6	57 545	52	96 686	08	60 859	60	39 141	60	54
7	57 576	52	96 681	08	60 895	60	39 105	60	53
8	57 607	52	96 676	10	60 931	60	39 069	60	52
9	57 638	0,52	96 670	0,08	60 967	0,62	39 033	0,62	51
10′	$\bar{1}$,57 669	52	$\bar{1}$,96 665	08	$\bar{1}$,61 004	60	0,38 996	60	50′
11	57 700	52	96 660	08	61 040	60	38 960	60	49
12	57 731	52	96 655	08	61 076	60	38 924	60	48
13	57 762	52	96 650	08	61 112	60	38 888	60	47
14	57 793	0,52	96 645	0,08	61 148	0,60	38 852	0,60	46
15	57 824	52	96 640	10	61 184	60	38 816	60	45
16	57 855	50	96 634	08	61 220	60	38 780	60	44
17	57 885	52	96 629	08	61 256	60	38 744	60	43
18	57 916	52	96 624	08	61 292	60	38 708	60	42
19	57 947	0,52	96 619	0,08	61 328	0,60	38 672	0,60	41
20′	$\bar{1}$,57 978	50	$\bar{1}$,96 614	10	$\bar{1}$,61 364	60	0,38 636	60	40′
21	58 008	52	96 608	08	61 400	60	38 600	60	39
22	58 039	52	96 603	08	61 436	60	38 564	60	38
23	58 070	52	96 598	08	61 472	60	38 528	60	37
24	58 101	0,50	96 593	0,08	61 508	0,60	38 492	0,60	36
25	58 131	52	96 588	10	61 544	58	38 456	58	35
26	58 162	50	96 582	08	61 579	60	38 421	60	34
27	58 192	52	96 577	08	61 615	60	38 385	60	33
28	58 223	50	96 572	08	61 651	60	38 349	60	32
29	58 253	0,52	96 567	0,08	61 687	0,58	38 313	0,58	31
30′	$\bar{1}$,58 284		$\bar{1}$,96 562		$\bar{1}$,61 722		0,38 278		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	67°

P. P.

d 1″	0,08	0,10	0,50	0,52	0,53	0,58	0,60	0,62
6″	0,5	0,6	3,0	3,1	3,2	3,5	3,6	3,7
7	0,6	0,7	3,5	3,6	3,7	4,1	4,2	4,3
8	0,7	0,8	4,0	4,1	4,3	4,7	4,8	4,9
9	0,8	0,9	4,5	4,7	4,8	5,3	5,4	5,6
10	0,8	1,0	5,0	5,2	5,3	5,8	6,0	6,2
20	1,7	2,0	10,0	10,3	10,7	11,7	12,0	12,3
30	2,5	3,0	15,0	15,5	16,0	17,5	18,0	18,5
40	3,3	4,0	20,0	20,7	21,3	23,3	24,0	24,7
50	4,2	5,0	25,0	25,8	26,7	29,2	30,0	30,8

67°

22°

22°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\bar{1}$,58 284	0,50	$\bar{1}$,96 562	0,10	$\bar{1}$,61 722	0,60	0,38 278	0,60	30′
31	58 314	52	96 556	08	61 758	60	38 242	60	29
32	58 345	50	96 551	08	61 794	60	38 206	60	28
33	58 375	52	96 546	08	61 830	58	38 170	58	27
34	58 406	0,50	96 541	0,10	61 865	0,60	38 135	0,60	26
35	58 436	52	96 535	08	61 901	58	38 099	58	25
36	58 467	50	96 530	08	61 936	60	38 064	60	24
37	58 497	50	96 525	08	61 972	60	38 028	60	23
38	58 527	50	96 520	10	62 008	58	37 992	58	22
39	58 557	0,52	96 514	0,08	62 043	0,60	37 957	0,60	21
40′	$\bar{1}$,58 588	50	$\bar{1}$,96 509	08	$\bar{1}$,62 079	58	0,37 921	58	20′
41	58 618	50	96 504	10	62 114	60	37 886	60	19
42	58 648	50	96 498	08	62 150	58	37 850	58	18
43	58 678	52	96 493	08	62 185	60	37 815	60	17
44	58 709	0,50	96 488	0,08	62 221	0,58	37 779	0,58	16
45	58 739	50	96 483	10	62 256	60	37 744	60	15
46	58 769	50	96 477	08	62 292	58	37 708	58	14
47	58 799	50	96 472	08	62 327	58	37 673	58	13
48	58 829	50	96 467	10	62 362	60	37 638	60	12
49	58 859	0,50	96 461	0,08	62 398	0,58	37 602	0,58	11
50′	$\bar{1}$,58 889	50	$\bar{1}$,96 456	08	$\bar{1}$,62 433	58	0,37 567	58	10′
51	58 919	50	96 451	10	62 468	60	37 532	60	9
52	58 949	50	96 445	08	62 504	58	37 496	58	8
53	58 979	50	96 440	08	62 539	58	37 461	58	7
54	59 009	0,50	96 435	0,10	62 574	0,58	37 426	0,58	6
55	59 039	50	96 429	08	62 609	60	37 391	60	5
56	59 069	48	96 424	08	62 645	58	37 355	58	4
57	59 098	50	96 419	10	62 680	58	37 320	58	3
58	59 128	50	96 413	08	62 715	58	37 285	58	2
59	59 158	0,50	96 408	0,08	62 750	0,58	37 250	0,58	1
60′	$\bar{1}$,59 188		$\bar{1}$,96 403		$\bar{1}$,62 785		0,37 215		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	67°

P. P.

d 1″	0,08	0,10	0,48	0,50	0,52	0,58	0,60
6″	0,5	0,6	2,9	3,0	3,1	3,5	3,6
7	0,6	0,7	3,4	3,5	3,6	4,1	4,2
8	0,7	0,8	3,9	4,0	4,1	4,7	4,8
9	0,8	0,9	4,4	4,5	4,7	5,3	5,4
10	0,8	1,0	4,8	5,0	5,2	5,8	6,0
20	1,7	2,0	9,7	10,0	10,3	11,7	12,0
30	2,5	3,0	14,5	15,0	15,5	17,5	18,0
40	3,3	4,0	19,3	20,0	20,7	23,3	24,0
50	4,2	5,0	24,2	25,0	25,8	29,2	30,0

67°

23°

23°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
0'	$\overline{1}$,59 188	0,50	$\overline{1}$,96 403	0,10	$\overline{1}$,62 785	0,58	0,37 215	0,58	60'
1	59 218	48	96 397	08	62 820	58	37 180	58	59
2	59 247	50	96 392	08	62 855	58	37 145	58	58
3	59 277	50	96 387	10	62 890	60	37 110	60	57
4	59 307	0,48	96 381	0,08	62 926	0,58	37 074	0,58	56
5	59 336	50	96 376	10	62 961	58	37 039	58	55
6	59 366	50	96 370	08	62 996	58	37 004	58	54
7	59 396	48	96 365	08	63 031	58	36 969	58	53
8	59 425	50	96 360	10	63 066	58	36 934	58	52
9	59 455	0,48	96 354	0,08	63 101	0,57	36 899	0,57	51
10'	$\overline{1}$,59 484	50	$\overline{1}$,96 349	10	$\overline{1}$,63 135	58	0,36 865	58	50'
11	59 514	48	96 343	08	63 170	58	36 830	58	49
12	59 543	50	96 338	08	63 205	58	36 795	58	48
13	59 573	48	96 333	10	63 240	58	36 760	58	47
14	59 602	0,50	96 327	0,08	63 275	0,58	36 725	0,58	46
15	59 632	48	96 322	10	63 310	58	36 690	58	45
16	59 661	48	96 316	08	63 345	57	36 655	57	44
17	59 690	50	96 311	10	63 379	58	36 621	58	43
18	59 720	48	96 305	08	63 414	58	36 586	58	42
19	59 749	0,48	96 300	0,10	63 449	0,58	36 551	0,58	41
20'	$\overline{1}$,59 778	50	$\overline{1}$,96 294	08	$\overline{1}$,63 484	58	0,36 516	58	40'
21	59 808	48	96 289	08	63 519	57	36 481	57	39
22	59 837	48	96 284	10	63 553	58	36 447	58	38
23	59 866	48	96 278	08	63 588	58	36 412	58	37
24	59 895	0,48	96 273	0,10	63 623	0,57	36 377	0,57	36
25	59 924	50	96 267	08	63 657	58	36 343	58	35
26	59 954	48	96 262	10	63 692	57	36 308	57	34
27	59 983	48	96 256	08	63 726	58	36 274	58	33
28	60 012	48	96 251	10	63 761	58	36 239	58	32
29	60 041	0,48	96 245	0,08	63 796	0,57	36 204	0,57	31
30'	$\overline{1}$,60 070		$\overline{1}$,96 240		$\overline{1}$,63 830		0,36 170		30'
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	66°

P. P.

d 1"	0,08	0,10	0,48	0,50	0,57	0,58	0,60
6"	0,5	0,6	2,9	3,0	3,4	3,5	3,6
7	0,6	0,7	3,4	3,5	4,0	4,1	4,2
8	0,7	0,8	3,9	4,0	4,5	4,7	4,8
9	0,8	0,9	4,4	4,5	5,1	5,3	5,4
10	0,8	1,0	4,8	5,0	5,7	5,8	6,0
20	1,7	2,0	9,7	10,0	11,3	11,7	12,0
30	2,5	3,0	14,5	15,0	17,0	17,5	18,0
40	3,3	4,0	19,3	20,0	22,7	23,3	24,0
50	4,2	5,0	24,2	25,0	28,3	29,2	30,0

66°

23°

23°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
30'	$\overline{1}$,60 070	0,48	$\overline{1}$,96 240	0,10	$\overline{1}$,63 830	0,58	0,36 170	0,58	30'
31	60 099	48	96 234	08	63 865	57	36 135	57	29
32	60 128	48	96 229	10	63 899	58	36 101	58	28
33	60 157	48	96 223	08	63 934	57	36 066	57	27
34	60 186	0,48	96 218	0,10	63 968	0,58	36 032	0,58	26
35	60 215	48	96 212	08	64 003	57	35 997	57	25
36	60 244	48	96 207	10	64 037	58	35 963	58	24
37	60 273	48	96 201	08	64 072	57	35 928	57	23
38	60 302	48	96 196	10	64 106	57	35 894	57	22
39	60 331	0,47	96 190	0,08	64 140	0,58	35 860	0,58	21
40'	$\overline{1}$,60 359	48	$\overline{1}$,96 185	10	$\overline{1}$,64 175	57	0,35 825	57	20'
41	60 388	48	96 179	08	64 209	57	35 791	57	19
42	60 417	48	96 174	10	64 243	58	35 757	58	18
43	60 446	47	96 168	10	64 278	57	35 722	57	17
44	60 474	0,48	96 162	0,08	64 312	0,57	35 688	0,57	16
45	60 503	48	96 157	10	64 346	58	35 654	58	15
46	60 532	48	96 151	08	64 381	57	35 619	57	14
47	60 561	47	96 146	10	64 415	57	35 585	57	13
48	60 589	48	96 140	08	64 449	57	35 551	57	12
49	60 618	0,47	96 135	0,10	64 483	0,57	35 517	0,57	11
50'	$\overline{1}$,60 646	48	$\overline{1}$,96 129	10	$\overline{1}$,64 517	58	0,35 483	58	10'
51	60 675	48	96 123	08	64 552	57	35 448	57	9
52	60 704	47	96 118	10	64 586	57	35 414	57	8
53	60 732	48	96 112	08	64 620	57	35 380	57	7
54	60 761	0,47	96 107	0,10	64 654	0,57	35 346	0,57	6
55	60 789	48	96 101	10	64 688	57	35 312	57	5
56	60 818	47	96 095	08	64 722	57	35 278	57	4
57	60 846	48	96 090	10	64 756	57	35 244	57	3
58	60 875	47	96 084	08	64 790	57	35 210	57	2
59	60 903	0,47	96 079	0,10	64 824	0,57	35 176	0,57	1
60'	$\overline{1}$,60 931		$\overline{1}$,96 073		$\overline{1}$,64 858		0,35 142		0'
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	66°

P. P.

d 1"	0,08	0,10	0,47	0,48	0,57	0,58
6"	0,5	0,6	2,8	2,9	3,4	3,5
7	0,6	0,7	3,3	3,4	4,0	4,1
8	0,7	0,8	3,7	3,9	4,5	4,7
9	0,8	0,9	4,2	4,4	5,1	5,3
10	0,8	1,0	4,7	4,8	5,7	5,8
20	1,7	2,0	9,3	9,7	11,3	11,7
30	2,5	3,0	14,0	14,5	17,0	17,5
40	3,3	4,0	18,7	19,3	22,7	23,3
50	4,2	5,0	23,3	24,2	28,3	29,2

66°

24°

24°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\overline{1}$,60 931	0,48	$\overline{1}$,96 073	0,10	$\overline{1}$,64 858	0,57	0,35 142	0,57	60′
1	60 960	47	96 067	08	64 892	57	35 108	57	59
2	60 988	47	96 062	10	64 926	57	35 074	57	58
3	61 016	48	96 056	10	64 960	57	35 040	57	57
4	61 045	0,47	96 050	0,08	64 994	0,57	35 006	0,57	56
5	61 073	47	96 045	10	65 028	57	34 972	57	55
6	61 101	47	96 039	08	65 062	57	34 938	57	54
7	61 129	48	96 034	10	65 096	57	34 904	57	53
8	61 158	47	96 028	10	65 130	57	34 870	57	52
9	61 186	0,47	96 022	0,08	65 164	0,55	34 836	0,55	51
10′	$\overline{1}$,61 214	47	$\overline{1}$,96 017	10	$\overline{1}$,65 197	57	0,34 803	57	50′
11	61 242	47	96 011	10	65 231	57	34 769	57	49
12	61 270	47	96 005	08	65 265	57	34 735	57	48
13	61 298	47	96 000	10	65 299	57	34 701	57	47
14	61 326	0,47	95 994	0,10	65 333	0,55	34 667	0,55	46
15	61 354	47	95 988	10	65 366	57	34 634	57	45
16	61 382	48	95 982	08	65 400	57	34 600	57	44
17	61 411	45	95 977	10	65 434	55	34 566	55	43
18	61 438	47	95 971	10	65 467	57	34 533	55	42
19	61 466	0,47	95 965	0,08	65 501	0,57	34 499	0,57	41
20′	$\overline{1}$,61 494	47	$\overline{1}$,95 960	10	$\overline{1}$,65 535	55	0,34 465	55	40′
21	61 522	47	95 954	10	65 568	57	34 432	57	39
22	61 550	47	95 948	10	65 602	57	34 398	57	38
23	61 578	47	95 942	08	65 636	55	34 364	55	37
24	61 606	0,47	95 937	0,10	65 669	0,57	34 331	0,57	36
25	61 634	47	95 931	10	65 703	55	34 297	55	35
26	61 662	45	95 925	08	65 736	57	34 264	57	34
27	61 689	47	95 920	10	65 770	55	34 230	55	33
28	61 717	47	95 914	10	65 803	57	34 197	57	32
29	61 745	0,47	95 908	0,10	65 837	0,55	34 163	0,55	31
30′	$\overline{1}$,61 773		$\overline{1}$,95 902		$\overline{1}$,65 870		0,34 130		30′
	lg cos.	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	65°

P. P.

d 1″	0,08	0,10	0,45	0,47	0,48	0,55	0,57
6″	0,5	0,6	2,7	2,8	2,9	3,3	3,4
7	0,6	0,7	3,2	3,3	3,4	3,9	4,0
8	0,7	0,8	3,6	3,7	3,9	4,4	4,5
9	0,8	0,9	4,1	4,2	4,4	5,0	5,1
10	0,8	1,0	4,5	4,7	4,8	5,5	5,7
20	1,7	2,0	9,0	9,3	9,7	11,0	11,3
30	2,5	3,0	13,5	14,0	14,5	16,5	17,0
40	3,3	4,0	18,0	18,7	19,3	22,0	22,7
50	4,2	5,0	22,5	23,3	24,2	27,5	28,3

65°

24°

24°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{1}$,61 773	0,45	$\overline{1}$,95 902	0,08	$\overline{1}$,65 870	0,57	0,34 130	0,57	**30′**
31	61 800	47	95 897	10	65 904	55	34 096	55	**29**
32	61 828	47	95 891	10	65 937	57	34 063	57	**28**
33	61 856	45	95 885	10	65 971	55	34 029	55	**27**
34	61 883	0,47	95 879	0,10	66 004	0,57	33 996	0,57	**26**
35	61 911	47	95 873	08	66 038	55	33 962	55	**25**
36	61 939	45	95 868	10	66 071	55	33 929	55	**24**
37	61 966	47	95 862	10	66 104	57	33 896	57	**23**
38	61 994	45	95 856	10	66 138	55	33 862	55	**22**
39	62 021	0,47	95 850	0,10	66 171	0,55	33 829	0,55	**21**
40′	$\overline{1}$,62 049	45	$\overline{1}$,95 844	08	$\overline{1}$,66 204	57	0,33 796	57	**20′**
41	62 076	47	95 839	10	66 238	55	33 762	55	**19**
42	62 104	45	95 833	10	66 271	55	33 729	55	**18**
43	62 131	47	95 827	10	66 304	55	33 696	55	**17**
44	62 159	0,45	95 821	0,10	66 337	0,57	33 663	0,57	**16**
45	62 186	47	95 815	08	66 371	55	33 629	55	**15**
46	62 214	45	95 810	10	66 404	55	33 596	55	**14**
47	62 241	45	95 804	10	66 437	55	33 563	55	**13**
48	62 268	47	95 798	10	66 470	55	33 530	55	**12**
49	62 296	0,45	95 792	0,10	66 503	0,57	33 497	0,57	**11**
50′	$\overline{1}$,62 323	45	$\overline{1}$,95 786	10	$\overline{1}$,66 537	55	0,33 463	55	**10′**
51	62 350	45	95 780	08	66 570	55	33 430	55	**9**
52	62 377	47	95 775	10	66 603	55	33 397	55	**8**
53	62 405	45	95 769	10	66 636	55	33 364	55	**7**
54	62 432	0,45	95 763	0,10	66 669	0,55	33 331	0,55	**6**
55	62 459	45	95 757	10	66 702	55	33 298	55	**5**
56	62 486	45	95 751	10	66 735	55	33 265	55	**4**
57	62 513	47	95 745	10	66 768	55	33 232	55	**3**
58	62 541	45	95 739	10	66 801	55	33 199	55	**2**
59	62 568	0,45	95 733	0,08	66 834	0,55	33 166	0,55	**1**
60′	$\overline{1}$,62 595		$\overline{1}$,95 728		$\overline{1}$,66 867		0,33 133		**0′**
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	**65°**

P. P.

d 1′	0,08	0,10	0,45	0,47	0,55	0,57
6″	0,5	0,6	2,7	2,8	3,3	3,4
7	0,6	0,7	3,2	3,3	3,9	4,0
8	0,7	0,8	3,6	3,7	4,4	4,5
9	0,8	0,9	4,1	4,2	5,0	5,1
10	0,8	1,0	4,5	4,7	5,5	5,7
20	1,7	2,0	9,0	9,3	11,0	11,3
30	2,5	3,0	13,5	14,0	16,5	17,0
40	3,3	4,0	18,0	18,7	22,0	22,7
50	4,2	5,0	22,5	23,3	27,5	28,3

65°

25°

25°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
0'	1,62 595	0,45	$\overline{1}$,95 728	0,10	$\overline{1}$,66 867	0,55	0,33 133	0,55	60'
1	62 622	45	95 722	10	66 900	55	33 100	55	59
2	62 649	45	95 716	10	66 933	55	33 067	55	58
3	62 676	45	95 710	10	66 966	55	33 034	55	57
4	62 703	0,45	95 704	0,10	66 999	0,55	33 001	0,55	56
5	62 730	45	95 698	10	67 032	55	32 968	55	55
6	62 757	45	95 692	10	67 065	55	32 935	55	54
7	62 784	45	95 686	10	67 098	55	32 902	55	53
8	62 811	45	95 680	10	67 131	53	32 869	53	52
9	62 838	0,45	95 674	0,10	67 163	0,55	32 837	0,55	51
10'	$\overline{1}$,62 865	45	$\overline{1}$,95 668	08	$\overline{1}$,67 196	55	0,32 804	55	50'
11	62 892	43	95 663	10	67 229	55	32 771	55	49
12	62 918	45	95 657	10	67 262	55	32 738	55	48
13	62 945	45	95 651	10	67 295	53	32 705	53	47
14	62 972	0,45	95 645	0,10	67 327	0,55	32 673	0,55	46
15	62 999	45	95 639	10	67 360	55	32 640	55	45
16	63 026	43	95 633	10	67 393	55	32 607	55	44
17	63 052	45	95 627	10	67 426	53	32 574	53	43
18	63 079	45	95 621	10	67 458	55	32 542	55	42
19	63 106	0,45	95 615	0,10	67 491	0,55	32 509	0,55	41
20'	$\overline{1}$,63 133	43	$\overline{1}$,95 609	10	$\overline{1}$,67 524	53	0,32 476	53	40'
21	63 159	45	95 603	10	67 556	55	32 444	55	39
22	63 186	45	95 597	10	67 589	55	32 411	55	38
23	63 213	43	95 591	10	67 622	53	32 378	53	37
24	63 239	0,45	95 585	0,10	67 654	0,55	32 346	0,55	36
25	63 266	43	95 579	10	67 687	53	32 313	53	35
26	63 292	45	95 573	10	67 719	55	32 281	55	34
27	63 319	43	95 567	10	67 752	55	32 248	55	33
28	63 345	45	95 561	10	67 785	53	32 215	53	32
29	63 372	0,43	95 555	0,10	67 817	0,55	32 183	0,55	31
30'	$\overline{1}$,63 398		$\overline{1}$,95 549		$\overline{1}$,67 850		0,32 150		30'
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	64°

P. P.

d 1"	0,08	0,10	0,43	0,45	0,53	0,55
6"	0,5	0,6	2,6	2,7	3,2	3,3
7	0,6	0,7	3,0	3,2	3,7	3,9
8	0,7	0,8	3,5	3,6	4,3	4,4
9	0,8	0,9	3,9	4,1	4,8	5,0
10	0,8	1,0	4,3	4,5	5,3	5,5
20	1,7	2,0	8,7	9,0	10,7	11,0
30	2,5	3,0	13,0	13,5	16,0	16,5
40	3,3	4,0	17,3	18,0	21,3	22,0
50	4,2	5,0	21,7	22,5	26,7	27,5

64°

25°

25°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{1}$,63 398	0,45	$\overline{1}$,95 549	0,10	$\overline{1}$,67 850	0,53	0,32 150	0,53	30′
31	63 425	43	95 543	10	67 882	55	32 118	55	29
32	63 451	45	95 537	10	67 915	53	32 085	53	28
33	63 478	43	95 531	10	67 947	55	32 053	55	27
34	63 504	0,45	95 525	0,10	67 980	0,53	32 020	0,53	26
35	63 531	43	95 519	10	68 012	53	31 988	53	25
36	63 557	43	95 513	10	68 044	55	31 956	55	24
37	63 583	45	95 507	12	68 077	53	31 923	53	23
38	63 610	43	95 500	10	68 109	55	31 891	55	22
39	63 636	0,43	95 494	0,10	68 142	0,53	31 858	0,53	21
40′	$\overline{1}$,63 662	45	$\overline{1}$,95 488	10	$\overline{1}$,68 174	53	0,31 826	53	20′
41	63 689	43	95 482	10	68 206	55	31 794	55	19
42	63 715	43	95 476	10	68 239	53	31 761	53	18
43	63 741	43	95 470	10	68 271	53	31 729	53	17
44	63 767	0,45	95 464	0,10	68 303	0,55	31 697	0,55	16
45	63 794	43	95 458	10	68 336	53	31 664	53	15
46	63 820	43	95 452	10	68 368	53	31 632	53	14
47	63 846	43	95 446	10	68 400	53	31 600	53	13
48	63 872	43	95 440	10	68 432	55	31 568	55	12
49	63 898	0,43	95 434	0,12	68 465	0,53	31 535	0,53	11
50′	$\overline{1}$,63 924	43	$\overline{1}$,95 427	10	$\overline{1}$,68 497	53	0,31 503	53	10′
51	63 950	43	95 421	10	68 529	53	31 471	53	9
52	63 976	43	95 415	10	68 561	53	31 439	53	8
53	64 002	43	95 409	10	68 593	55	31 407	55	7
54	64 028	0,43	95 403	0,10	68 626	0,53	31 374	0,53	6
55	64 054	43	95 397	10	68 658	53	31 342	53	5
56	64 080	43	95 391	12	68 690	53	31 310	53	4
57	64 106	43	95 384	10	68 722	53	31 278	53	3
58	64 132	43	95 378	10	68 754	53	31 246	53	2
59	64 158	0,43	95 372	0,10	68 786	0,53	31 214	0,53	1
60′	$\overline{1}$,64 184		$\overline{1}$,95 366		$\overline{1}$,68 818		0,31 182		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	64°

P. P.

d 1″	0,10	0,12	0,43	0,45	0,53	0,55
6″	0,6	0,7	2,6	2,7	3,2	3,3
7	0,7	0,8	3,0	3,2	3,7	3,9
8	0,8	0,9	3,5	3,6	4,3	4,4
9	0,9	1,1	3,9	4,1	4,8	5,0
10	1,0	1,2	4,3	4,5	5,3	5,5
20	2,0	2,3	8,7	9,0	10,7	11,0
30	3,0	3,5	13,0	13,5	16,0	16,5
40	4,0	4,7	17,3	18,0	21,3	22,0
50	5,0	5,8	21,7	22,5	26,7	27,5

64°

26°

26°	lg sin	+d 1"	lg cos	−d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	−d 1"	
0'	$\overline{1}$,64 184	0,43	$\overline{1}$,95 366	0,10	$\overline{1}$,68 818	0,53	0,31 182	0,53	60'
1	64 210	43	95 360	10	68 850	53	31 150	53	59
2	64 236	43	95 354	10	68 882	53	31 118	53	58
3	64 262	43	95 348	12	68 914	53	31 086	53	57
4	64 288	0,42	95 341	0,10	68 946	0,53	31 054	0,53	56
5	64 313	43	95 335	10	68 978	53	31 022	53	55
6	64 339	43	95 329	10	69 010	53	30 990	53	54
7	64 365	43	95 323	10	69 042	53	30 958	53	53
8	64 391	43	95 317	12	69 074	53	30 926	53	52
9	64 417	0,42	95 310	0,10	69 106	0,53	30 894	0,53	51
10'	$\overline{1}$,64 442	43	$\overline{1}$,95 304	10	$\overline{1}$,69 138	53	0,30 862	53	50'
11	64 468	43	95 298	10	69 170	53	30 830	53	49
12	64 494	42	95 292	10	69 202	53	30 798	53	48
13	64 519	43	95 286	12	69 234	53	30 766	53	47
14	64 545	0,43	95 279	0,10	69 266	0,53	30 734	0,53	46
15	64 571	42	95 273	10	69 298	52	30 702	52	45
16	64 596	43	95 267	10	69 329	53	30 671	53	44
17	64 622	42	95 261	12	69 361	53	30 639	53	43
18	64 647	43	95 254	10	69 393	53	30 607	53	42
19	64 673	0,42	95 248	0,10	69 425	0,53	30 575	0,53	41
20'	$\overline{1}$,64 698	43	$\overline{1}$,95 242	10	$\overline{1}$,69 457	52	0,30 543	52	40'
21	64 724	42	95 236	12	69 488	53	30 512	53	39
22	64 749	43	95 229	10	69 520	53	30 480	53	38
23	64 775	42	95 223	10	69 552	53	30 448	53	37
24	64 800	0,43	95 217	0,10	69 584	0,52	30 416	0,52	36
25	64 826	42	95 211	12	69 615	53	30 385	53	35
26	64 851	43	95 204	10	69 647	53	30 353	53	34
27	64 877	42	95 198	10	69 679	52	30 321	52	33
28	64 902	42	95 192	12	69 710	53	30 290	53	32
29	64 927	0,43	95 185	0,10	69 742	0,53	30 258	0,53	31
30'	$\overline{1}$,64 953		$\overline{1}$,95 179		$\overline{1}$,69 774		0,30 226		30'
	lg cos	−d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	−d 1"	lg tg	+d 1"	63°

P. P.

d 1"	0,10	0,12	0,42	0,43	0,52	0,53
6"	0,6	0,7	2,5	2,6	3,1	3,2
7	0,7	0,8	2,9	3,0	3,6	3,7
8	0,8	0,9	3,3	3,5	4,1	4,3
9	0,9	1,1	3,8	3,9	4,7	4,8
10	1,0	1,2	4,2	4,3	5,2	5,3
20	2,0	2,3	8,3	8,7	10,3	10,7
30	3,0	3,5	12,5	13,0	15,5	16,0
40	4,0	4,7	16,7	17,3	20,7	21,3
50	5,0	5,8	20,8	21,7	25,8	26,7

63°

26°

26°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
30'	$\overline{1}$,64 953	0,42	$\overline{1}$,95 179	0,10	$\overline{1}$,69 774	0,52	0,30 226	0,52	30'
31	64 978	42	95 173	10	69 805	53	30 195	53	29
32	65 003	43	95 167	12	69 837	52	30 163	52	28
33	65 029	42	95 160	10	69 868	53	30 132	53	27
34	65 054	0,42	95 154	0,10	69 900	0,53	30 100	0,53	26
35	65 079	42	95 148	12	69 932	52	30 068	52	25
36	65 104	43	95 141	10	69 963	53	30 037	53	24
37	65 130	42	95 135	10	69 995	52	30 005	52	23
38	65 155	42	95 129	12	70 026	53	29 974	53	22
39	65 180	0,42	95 122	0,10	70 058	0,52	29 942	0,52	21
40'	$\overline{1}$,65 205	42	$\overline{1}$,95 116	10	$\overline{1}$,70 089	53	0,29 911	53	20'
41	65 230	42	95 110	12	70 121	52	29 879	52	19
42	65 255	43	95 103	10	70 152	53	29 848	53	18
43	65 281	42	95 097	12	70 184	52	29 816	52	17
44	65 306	0,42	95 090	0,10	70 215	0,53	29 785	0,53	16
45	65 331	42	95 084	10	70 247	52	29 753	52	15
46	65 356	42	95 078	12	70 278	52	29 722	52	14
47	65 381	42	95 071	10	70 309	53	29 691	53	13
48	65 406	42	95 065	10	70 341	52	29 659	52	12
49	65 431	0,42	95 059	0,12	70 372	0,53	29 628	0,53	11
50'	$\overline{1}$,65 456	42	$\overline{1}$,95 052	10	$\overline{1}$,70 404	52	0,29 596	52	10'
51	65 481	42	95 046	12	70 435	52	29 565	52	9
52	65 506	42	95 039	10	70 466	53	29 534	53	8
53	65 531	42	95 033	10	70 498	52	29 502	52	7
54	65 556	0,40	95 027	0,12	70 529	0,52	29 471	0,52	6
55	65 580	42	95 020	10	70 560	53	29 440	53	5
56	65 605	42	95 014	12	70 592	52	29 408	52	4
57	65 630	42	95 007	10	70 623	52	29 377	52	3
58	65 655	42	95 001	10	70 654	52	29 346	52	2
59	65 880	0,42	94 995	0,12	70 685	0,53	29 315	0,53	1
60'	$\overline{1}$,65 705		$\overline{1}$,94 988		$\overline{1}$,70 717		0,29 283		0'
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	63°

P.P.

d 1"	0,10	0,12	0,40	0,42	0,43	0,52	0,53
6"	0,6	0,7	2,4	2,5	2,6	3,1	3,2
7	0,7	0,8	2,8	2,9	3,0	3,6	3,7
8	0,8	0,9	3,2	3,3	3,5	4,1	4,3
9	0,9	1,1	3,6	3,8	3,9	4,7	4,8
10	1,0	1,2	4,0	4,2	4,3	5,2	5,3
20	2,0	2,3	8,0	8,3	8,7	10,3	10,7
30	3,0	3,5	12,0	12,5	13,0	15,5	16,0
40	4,0	4,7	16,0	16,7	17,3	20,7	21,3
50	5,0	5,8	20,0	20,8	21,7	25,8	26,7

63°

27°

27°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\bar{1}$,65 705	0,40	$\bar{1}$,94 988	0,10	$\bar{1}$,70 717	0,52	0,29 283	0,52	60′
1	65 729	42	94 982	12	70 748	52	29 252	52	59
2	65 754	42	94 975	10	70 779	52	29 221	52	58
3	65 779	42	94 969	12	70 810	52	29 190	52	57
4	65 804	0,40	94 962	0,10	70 841	0,53	29 159	0,53	56
5	65 828	42	94 956	12	70 873	52	29 127	52	55
6	65 853	42	94 949	10	70 904	52	29 096	52	54
7	65 878	40	94 943	12	70 935	52	29 065	52	53
8	65 902	42	94 936	10	70 966	52	29 034	52	52
9	65 927	0,42	94 930	0,12	70 997	0,52	29 003	0,52	51
10′	$\bar{1}$,65 952	40	$\bar{1}$,94 923	10	$\bar{1}$,71 028	52	0,28 972	52	50′
11	65 976	42	94 917	10	71 059	52	28 941	52	49
12	66 001	40	94 911	12	71 090	52	28 910	52	48
13	66 025	42	94 904	10	71 121	53	28 879	53	47
14	66 050	0,42	94 898	0,12	71 153	0,52	28 847	0,52	46
15	66 075	40	94 891	10	71 184	52	28 816	52	45
16	66 099	42	94 885	12	71 215	52	28 785	52	44
17	66 124	40	94 878	12	71 246	52	28 754	52	43
18	66 148	42	94 871	10	71 277	52	28 723	52	42
19	66 173	0,40	94 865	0,12	71 308	0,52	28 692	0,52	41
20′	$\bar{1}$,66 197	40	$\bar{1}$,94 858	10	$\bar{1}$,71 339	52	0,28 661	52	40′
21	66 221	42	94 852	12	71 370	52	28 630	52	39
22	66 246	40	94 845	10	71 401	50	28 599	50	38
23	66 270	42	94 839	12	71 431	52	28 569	52	37
24	66 295	0,40	94 832	0,10	71 462	0,52	28 538	0,52	36
25	66 319	40	94 826	12	71 493	52	28 507	52	35
26	66 243	42	94 819	10	71 524	52	28 476	52	34
27	66 368	40	94 813	12	71 555	52	28 445	52	33
28	66 392	40	94 806	12	71 586	52	28 414	52	32
29	66 416	0,42	94 799	0,10	71 617	0,52	28 383	0,52	31
30′	$\bar{1}$,66 441		$\bar{1}$,94 793		$\bar{1}$,71 648		0,28 352		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	62°

P. P.

d 1″	0,10	0,12	0,40	0,42	0,50	0,52	0,53
6″	0,6	0,7	2,4	2,5	3,0	3,1	3,2
7	0,7	0,8	2,8	2,9	3,5	3,6	3,7
8	0,8	0,9	3,2	3,3	4,0	4,1	4,3
9	0,9	1,1	3,6	3,8	4,5	4,7	4,8
10	1,0	1,2	4,0	4,2	5,0	5,2	5,3
20	2,0	2,3	8,0	8,3	10,0	10,3	10,7
30	3,0	3,5	12,0	12,5	15,0	15,5	16,0
40	4,0	4,7	16,0	16,7	20,0	20,7	21,6
50	5,0	5,8	20,0	20,8	25,0	25,8	26,7

62°

27°

27°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{1}$,66 441	0,40	$\overline{1}$,94 793	0,12	$\overline{1}$,71 648	0,52	0,28 352	0,52	30′
31	66 465	40	94 786	10	71 679	50	28 321	50	29
32	66 489	40	94 780	12	71 709	52	28 291	52	28
33	66 513	40	94 773	10	71 740	52	28 260	52	27
34	66 537	0,42	94 767	0,12	71 771	0,52	28 229	0,52	26
35	66 562	40	94 760	12	71 802	52	28 198	52	25
36	66 586	40	94 753	10	71 833	50	28 167	50	24
37	66 610	40	94 747	12	71 863	52	28 137	52	23
38	66 634	40	94 740	10	71 894	52	28 106	52	22
39	66 658	0,40	94 734	0,12	71 925	0,50	28 075	0,50	21
40′	$\overline{1}$,66 682	40	$\overline{1}$,94 727	12	$\overline{1}$,71 955	52	0,28 045	52	20′
41	66 706	42	94 720	10	71 986	52	28 014	52	19
42	66 731	40	94 714	12	72 017	52	27 983	52	18
43	66 755	40	94 707	12	72 048	50	27 952	50	17
44	66 779	0,40	94 700	0,10	72 078	0,52	27 922	0,52	16
45	66 803	40	94 694	12	72 109	52	27 891	52	15
46	66 827	40	94 687	12	72 140	50	27 860	50	14
47	66 851	40	94 680	10	72 170	52	27 830	52	13
48	66 875	40	94 674	12	72 201	50	27 799	50	12
49	66 899	0,38	94 667	0,12	72 231	0,52	27 769	0,52	11
50′	$\overline{1}$,66 922	40	$\overline{1}$,94 660	10	$\overline{1}$,72 262	52	0,27 738	52	10′
51	66 946	40	94 654	12	72 293	50	27 707	50	9
52	66 970	40	94 647	12	72 323	52	27 677	52	8
53	66 994	40	94 640	10	72 354	50	27 646	50	7
54	67 018	0,40	94 634	0,12	72 384	0,52	27 616	0,52	6
55	67 042	40	94 627	12	72 415	50	27 585	50	5
56	67 066	40	94 620	10	72 445	52	27 555	52	4
57	67 090	38	94 614	12	72 476	50	27 524	50	3
58	67 113	40	94 607	12	72 506	52	27 494	52	2
59	67 137	0,40	94 600	0,12	72 537	0,50	27 463	0,50	1
60′	$\overline{1}$,67 161		$\overline{1}$,94 593		$\overline{1}$,72 567		0,27 433		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	62°

P. P.

d 1″	0,10	0,12	0,38	0,40	0,42	0,50	0,52
6″	0,6	0,7	2,3	2,4	2,5	3,0	3,1
7	0,7	0,8	2,7	2,8	2,9	3,5	3,6
8	0,8	0,9	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1
9	0,9	1,1	3,5	3,6	3,8	4,5	4,7
10	1,0	1,2	3,8	4,0	4,2	5,0	5,2
20	2,0	2,3	7,7	8,0	8,3	10,0	10,3
30	3,0	3,5	11,5	12,0	12,5	15,0	15,5
40	4,0	4,7	15,3	16,0	16,7	20,0	20,7
50	5,0	5,8	19,2	20,0	20,8	25,0	25,8

62°

28°

28°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,67 161	0,40	$\overline{1}$,94 593	0,10	$\overline{1}$,72 567	0,52	0,27 433	0,52	60′
1	67 185	38	94 587	12	72 598	50	27 402	50	59
2	67 208	40	94 580	12	72 628	52	27 372	52	58
3	67 232	40	94 573	10	72 659	50	27 341	50	57
4	67 256	0,40	94 567	0,12	72 689	0,52	27 311	0,52	56
5	67 280	38	94 560	12	72 720	50	27 280	50	55
6	67 303	40	94 553	12	72 750	50	27 250	50	54
7	67 327	38	94 546	10	72 780	52	27 220	52	53
8	67 350	40	94 540	12	72 811	50	27 189	50	52
9	67 374	0,40	94 533	0,12	72 841	0,52	27 159	0,52	51
10′	$\overline{1}$,67 398	38	$\overline{1}$,94 526	12	$\overline{1}$,72 872	50	0,27 128	50	50′
11	67 421	40	94 519	10	72 902	50	27 098	50	49
12	67 445	38	94 513	12	72 932	52	27 068	52	48
13	67 468	40	94 506	12	72 963	50	27 037	50	47
14	67 492	0,38	94 499	0,12	72 993	0,50	27 007	0,50	46
15	67 515	40	94 492	12	73 023	52	26 977	52	45
16	67 539	38	94 485	10	73 054	50	26 946	50	44
17	67 562	40	94 479	12	73 084	50	26 916	50	43
18	67 586	38	94 472	12	73 114	50	26 886	50	42
19	67 609	0,40	94 465	0,12	73 144	0,52	26 856	0,52	41
20′	$\overline{1}$,67 633	38	$\overline{1}$,94 458	12	$\overline{1}$,73 175	50	0,26 825	50	40′
21	67 656	40	94 451	10	73 205	50	26 795	50	39
22	67 680	38	94 445	12	73 235	50	26 765	50	38
23	67 703	38	94 438	12	73 265	50	26 735	50	37
24	67 726	0,40	94 431	0,12	73 295	0,52	26 705	0,52	36
25	67 750	38	94 424	12	73 326	50	26 674	50	35
26	67 773	38	94 417	12	73 356	50	26 644	50	34
27	67 796	40	94 410	10	73 386	50	26 614	50	33
28	67 820	38	94 404	12	73 416	50	26 584	50	32
29	67 843	0,38	94 397	0,12	73 446	0,50	26 554	0,50	31
30′	$\overline{1}$,67 866		$\overline{1}$,94 390		$\overline{1}$,73 476		0,26 524		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	61°

P. P.

d 1″	0,10	0,12	0,38	0,40	0,50	0,52
6″	0,6	0,7	2,3	2,4	3,0	3,1
7	0,7	0,8	2,7	2,8	3,5	3,6
8	0,8	0,9	3,1	3,2	4,0	4,1
9	0,9	1,1	3,5	3,6	4,5	4,7
10	1,0	1,2	3,8	4,0	5,0	5,2
20	2,0	2,3	7,7	8,0	10,0	10,3
30	3,0	3,5	11,5	12,0	15,0	15,5
40	4,0	4,7	15,3	16,0	20,0	20,7
50	5,0	5,8	19,2	20,0	25,0	25,8

61°

28°

28°	lg sin	+d 1"	lg cos	−d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	−d 1"	
30'	$\overline{1}$,67 866	0,40	$\overline{1}$,94 390	0,12	$\overline{1}$,73 476	0,52	0,26 524	0,52	**30'**
31	67 890	38	94 383	12	73 507	50	26 493	50	**29**
32	67 913	38	94 376	12	73 537	50	26 463	50	**28**
33	67 936	38	94 369	12	73 567	50	26 433	50	**27**
34	67 959	0,38	94 362	0,12	73 597	0,50	26 403	0,50	**26**
35	67 982	40	94 355	10	73 627	50	26 373	50	**25**
36	68 006	38	94 349	12	73 657	50	26 343	50	**24**
37	68 029	38	94 342	12	73 687	50	26 313	50	**23**
38	68 052	38	94 335	12	73 717	50	26 283	50	**22**
39	68 075	0,38	94 328	0,12	73 747	0,50	26 253	0,50	**21**
40'	$\overline{1}$,68 098	38	$\overline{1}$,94 321	12	$\overline{1}$,73 777	50	0,26 223	50	**20'**
41	68 121	38	94 314	12	73 807	50	26 193	50	**19**
42	68 144	38	94 307	12	73 837	50	26 163	50	**18**
43	68 167	38	94 300	12	73 867	50	26 133	50	**17**
44	68 190	0,38	94 293	0,12	73 897	0,50	26 103	0,50	**16**
45	68 213	40	94 286	12	73 927	50	26 073	50	**15**
46	68 237	38	94 279	10	73 957	50	26 043	50	**14**
47	68 260	38	94 273	12	73 987	50	26 013	50	**13**
48	68 283	37	94 266	12	74 017	50	25 983	50	**12**
49	68 305	0,38	94 259	0,12	74 047	0,50	25 953	0,50	**11**
50'	$\overline{1}$,68 328	38	$\overline{1}$,94 252	12	$\overline{1}$,74 077	50	0,25 923	50	**10'**
51	68 351	38	94 245	12	74 107	50	25 893	50	**9**
52	68 374	38	94 238	12	74 137	48	25 863	48	**8**
53	68 397	38	94 231	12	74 166	50	25 834	50	**7**
54	68 420	0,38	94 224	0,12	74 196	0,50	25 804	0,50	**6**
55	68 443	38	94 217	12	74 226	50	25 774	50	**5**
56	68 466	38	94 210	12	74 256	50	25 744	50	**4**
57	68 489	38	94 203	12	74 286	50	25 714	50	**3**
58	68 512	37	94 196	12	74 316	48	25 684	48	**2**
59	68 534	0,38	94 189	0,12	74 345	0,50	25 655	0,50	**1**
60'	$\overline{1}$,68 557		$\overline{1}$,94 182		$\overline{1}$,74 375		0,25 625		**0'**
	lg cos	−d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	−d 1"	lg tg	+d 1"	**61°**

P. P.

d 1"	0,10	0,12	0,38	0,40	0,48	0,50	0,52
6"	0,6	0,7	2,3	2,4	2,9	3,0	3,1
7	0,7	0,8	2,7	2,8	3,4	3,5	3,6
8	0,8	0,9	3,1	3,2	3,9	4,0	4,1
9	0,9	1,1	3,5	3,6	4,4	4,5	4,7
10	1,0	1,2	3,8	4,0	4,8	5,0	5,2
20	2,0	2,3	7,7	8,0	9,7	10,0	10,3
30	3,0	3,5	11,5	12,0	14,5	15,0	15,5
40	4,0	4,7	15,3	16,0	19,3	20,0	20,7
50	5,0	5,8	19,2	20,0	24,2	25,0	25,8

61°

29°

29°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,68 557	0,38	$\overline{1}$,94 182	0,12	$\overline{1}$,74 375	0,50	0,25 625	0,50	60′
1	68 580	38	94 175	12	74 405	50	25 595	50	59
2	68 603	37	94 168	12	74 435	50	25 565	50	58
3	68 625	38	94 161	12	74 465	48	25 535	48	57
4	68 648	0,38	94 154	0,12	74 494	0,50	25 506	0,50	56
5	68 671	38	94 147	12	74 524	50	25 476	50	55
6	68 694	37	94 140	12	74 554	48	25 446	48	54
7	68 716	38	94 133	12	74 583	50	25 417	50	53
8	68 739	38	94 126	12	74 613	50	25 387	50	52
9	68 762	0,37	94 119	0,12	74 643	0,50	25 357	0,50	51
10′	$\overline{1}$,68 784	38	$\overline{1}$,94 112	12	$\overline{1}$,74 673	48	0,25 327	48	50′
11	68 807	37	94 105	12	74 702	50	25 298	50	49
12	68 829	38	94 098	13	74 732	50	25 268	50	48
13	68 852	38	94 090	12	74 762	48	25 238	48	47
14	68 875	0,37	94 083	0,12	74 791	0,50	25 209	0,50	46
15	68 897	38	94 076	12	74 821	50	25 179	50	45
16	68 920	37	94 069	12	74 851	48	25 149	48	44
17	68 942	38	94 062	12	74 880	50	25 120	50	43
18	68 965	37	94 055	12	74 910	48	25 090	48	42
19	68 987	0,38	94 048	0,12	74 939	0,50	25 061	0,50	41
20′	$\overline{1}$,69 010	37	$\overline{1}$,94 041	12	$\overline{1}$,74 969	48	0,25 031	48	40′
21	69 032	38	94 034	12	74 998	50	25 002	50	39
22	69 055	37	94 027	12	75 028	50	24 972	50	38
23	69 077	38	94 020	13	75 058	48	24 942	48	37
24	69 100	0,37	94 012	0,12	75 087	0,50	24 913	0,50	36
25	69 122	37	94 005	12	75 117	48	24 883	48	35
26	69 144	38	93 998	12	75 146	50	24 854	50	34
27	69 167	37	93 991	12	75 176	48	24 824	48	33
28	69 189	38	93 984	12	75 205	50	24 795	50	32
29	69 212	0,37	93 977	0,12	75 235	0,48	24 765	0,48	31
30′	$\overline{1}$,69 234		$\overline{1}$,93 970		$\overline{1}$,75 264		0,24 736		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	60°

P. P.

d 1″	0,12	0,13	0,37	0,38	0,48	0,50
6″	0,7	0,8	2,2	2,3	2,9	3,0
7	0,8	0,9	2,6	2,7	3,4	3,5
8	0,9	1,1	2,9	3,1	3,9	4,0
9	1,1	1,2	3,3	3,5	4,4	4,5
10	1,2	1,3	3,7	3,8	4,8	5,0
20	2,3	2,7	7,3	7,7	9,7	10,0
30	3,5	4,0	11,0	11,5	14,5	15,0
40	4,7	5,3	14,7	15,3	19,3	20,0
50	5,8	6,7	18,3	19,2	24,2	25,0

60°

29°

29°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\overline{1}$,69 234	0,37	$\overline{1}$,93 970	0,12	$\overline{1}$,75 264	0,50	0,24 736	0,50	**30′**
31	69 256	38	93 963	13	75 294	48	24 706	48	**29**
32	69 279	37	93 955	12	75 323	50	24 677	50	**28**
33	69 301	37	93 948	12	75 353	48	24 647	48	**27**
34	69 323	0,37	93 941	0,12	75 382	0,48	24 618	0,48	**26**
35	69 345	38	93 934	12	75 411	50	24 589	50	**25**
36	69 368	37	93 927	12	75 441	48	24 559	48	**24**
37	69 390	37	93 920	13	75 470	50	24 530	50	**23**
38	69 412	37	93 912	12	75 500	48	24 500	48	**22**
39	69 434	0,37	93 905	0,12	75 529	0,48	24 471	0,48	**21**
40′	$\overline{1}$,69 456	38	$\overline{1}$,93 898	12	$\overline{1}$,75 558	50	0,24 442	50	**20′**
41	69 479	37	93 891	12	75 588	48	24 412	48	**19**
42	69 501	37	93 884	13	75 617	50	24 383	50	**18**
43	69 523	37	93 876	12	75 647	48	24 353	48	**17**
44	69 545	0,37	93 869	0,12	75 676	0,48	24 324	0,48	**16**
45	69 567	37	93 862	12	75 705	50	24 295	50	**15**
46	69 589	37	93 855	13	75 735	48	24 265	48	**14**
47	69 611	37	93 847	12	75 764	48	24 236	48	**13**
48	69 633	37	93 840	12	75 793	48	24 207	48	**12**
49	69 655	0,37	93 833	0,12	75 822	0,50	24 178	0,50	**11**
50′	$\overline{1}$,69 677	37	$\overline{1}$,93 826	12	$\overline{1}$,75 852	48	0,24 148	48	**10′**
51	69 699	37	93 819	13	75 881	48	24 119	48	**9**
52	69 721	37	93 811	12	75 910	48	24 090	48	**8**
53	69 743	37	93 804	12	75 939	50	24 061	50	**7**
54	69 765	0,37	93 797	0,13	75 969	0,48	24 031	0,48	**6**
55	69 787	37	93 789	12	75 998	48	24 002	48	**5**
56	69 809	37	93 782	12	76 027	48	23 973	48	**4**
57	69 831	37	93 775	12	76 056	50	23 944	50	**3**
58	69 853	37	93 768	13	76 086	48	23 914	48	**2**
59	69 875	0,37	93 760	0,12	76 115	0,48	23 885	0,48	**1**
60′	$\overline{1}$,69 897		$\overline{1}$,93 753		$\overline{1}$,76 144		0,23 856		**0′**
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	**60°**

P. P.

d 1″	0,12	0,13	0,37	0,38	0,48	0,50
6″	0,7	0,8	2,2	2,3	2,9	3,0
7	0,8	0,9	2,6	2,7	3,4	3,5
8	0,9	1,1	2,9	3,1	3,9	4,0
9	1,1	1,2	3,3	3,4	4,4	4,5
10	1,2	1,3	3,7	3,8	4,8	5,0
20	2,3	2,7	7,3	7,7	9,7	10,0
30	3,5	4,0	11,0	11,5	14,5	15,0
40	4,7	5,3	14,7	15,3	19,3	20,0
50	5,8	6,7	18,3	19,2	24,2	25,0

60°

30°

30°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\overline{1}$,69 897	0,37	$\overline{1}$,93 753	0,12	$\overline{1}$,76 144	0,48	0,23 856	0,48	**60′**
1	69 919	37	93 746	13	76 173	48	23 827	48	**59**
2	69 941	37	93 738	12	76 202	48	23 798	48	**58**
3	69 963	35	93 731	12	76 231	50	23 769	50	**57**
4	69 984	0,37	93 724	0,12	76 261	0,48	23 739	0,48	**56**
5	70 006	37	93 717	13	76 290	48	23,710	48	**55**
6	70 028	37	93 709	12	76 319	48	23 681	48	**54**
7	70 050	37	93 702	12	76 348	48	23 652	48	**53**
8	70 072	35	93 695	13	76 377	48	23 623	48	**52**
9	70 093	0,37	93 687	0,12	76 406	0,48	23 594	0,48	**51**
10′	$\overline{1}$,70 115	37	$\overline{1}$,93 680	12	$\overline{1}$,76 435	48	0,23 565	48	**50′**
11	70 137	37	93 673	13	76 464	48	23 536	48	**49**
12	70 159	35	93 665	12	76 493	48	23 507	48	**48**
13	70 180	37	93 658	13	76 522	48	23 478	48	**47**
14	70 202	0,37	93 650	0,12	76 551	0,48	23 449	0,48	**46**
15	70 224	35	93 643	12	76 580	48	23 420	48	**45**
16	70 245	37	93 636	13	76 609	50	23 391	50	**44**
17	70 267	35	93 628	12	76 639	48	23 361	48	**43**
18	70 288	37	93 621	12	76 668	48	23 332	48	**42**
19	70 310	0,37	93 614	0,13	76 697	0,47	23 303	0,47	**41**
20′	$\overline{1}$,70 332	35	$\overline{1}$,93 606	12	$\overline{1}$,76 725	48	0,23 275	48	**40′**
21	70 353	37	93 599	13	76 754	48	23 246	48	**39**
22	70 375	35	93 591	12	76 783	48	23 217	48	**38**
23	70 396	37	93 584	12	76 812	48	23 188	48	**37**
24	70 418	0,35	93 577	0,13	76 841	0,48	23 159	0,48	**36**
25	70 439	37	93 569	12	76 870	48	23 130	48	**35**
26	70 461	35	93 562	13	76 899	48	23 101	48	**34**
27	70 482	37	93 554	12	76 928	48	23 072	48	**33**
28	70 504	35	93 547	13	76 957	48	23 043	48	**32**
29	70 525	0,37	93 539	0,12	76 986	0,48	23 014	0,48	**31**
30′	$\overline{1}$,70 547		$\overline{1}$,93 532		$\overline{1}$,77 015		0,22 985		**30′**
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	**59°**

P. P.

d 1″	0,12	0,13	0,35	0,37	0,47	0,48	0,50
6″	0,7	0,8	2,1	2,2	2,8	2,9	3,0
7	0,8	0,9	2,5	2,6	3,3	3,4	3,5
8	0,9	1,1	2,8	2,9	3,7	3,9	4,0
9	1,1	1,2	3,2	3,3	4,2	4,4	4,5
10	1,2	1,3	3,5	3,7	4,7	4,8	5,0
20	2,3	2,7	7,0	7,3	9,3	9,7	10,0
30	3,5	4,0	10,5	11,0	14,0	14,5	15,0
40	4,7	5,3	14,0	14,7	18,7	19,3	20,0
50	5,8	6,7	17,5	18,3	23,3	24,2	25,0

59°

30°

30°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\bar{1}$,70 547	0,35	$\bar{1}$,93 532	0,12	$\bar{1}$,77 015	0,48	0,22 985	0,48	**30′**
31	70 568	37	93 525	13	77 044	48	22 956	48	**29**
32	70 590	35	93 517	12	77 073	47	22 927	47	**28**
33	70 611	37	93 510	13	77 101	48	22 899	48	**27**
34	70 633	0,35	93 502	0,12	77 130	0,48	22 870	0,48	**26**
35	70 654	35	93 495	13	77 159	48	22 841	48	**25**
36	70 675	37	93 487	12	77 188	48	22 812	48	**24**
37	70 697	35	93 480	13	77 217	48	22 783	48	**23**
38	70 718	35	93 472	12	77 246	47	22 754	47	**22**
39	70 739	0,37	93 465	0,13	77 274	0,48	22 726	0,48	**21**
40′	$\bar{1}$,70 761	35	$\bar{1}$,93 457	12	$\bar{1}$,77 303	48	0,22 697	48	**20′**
41	70 782	35	93 450	13	77 332	48	22 668	48	**19**
42	70 803	35	93 442	12	77 361	48	22 639	48	**18**
43	70 824	37	93 435	13	77 390	47	22 610	47	**17**
44	70 846	0,35	93 427	0,12	77 418	0,48	22 582	0,48	**16**
45	70 867	35	93 420	13	77 447	48	22 553	48	**15**
46	70 888	35	93 412	12	77 476	48	22 524	48	**14**
47	70 909	37	93 405	13	77 505	47	22 495	47	**13**
48	70 931	35	93 397	12	77 533	48	22 467	48	**12**
49	70 952	0,35	93 390	0,13	77 562	0,48	22 438	0,48	**11**
50′	$\bar{1}$,70 973	35	$\bar{1}$,93 382	12	$\bar{1}$,77 591	47	0,22 409	47	**10′**
51	70 994	35	93 375	13	77 619	48	22 381	48	**9**
52	71 015	35	93 367	12	77 648	48	22 352	48	**8**
53	71 036	37	93 360	13	77 677	48	22 323	48	**7**
54	71 058	0,35	93 352	0,13	77 706	0,47	22 294	0,47	**6**
55	71 079	35	93 344	12	77 734	48	22 266	48	**5**
56	71 100	35	93 337	13	77 763	47	22 237	47	**4**
57	71 121	35	93 329	12	77 791	48	22 209	48	**3**
58	71 142	35	93 322	13	77 820	48	22 180	48	**2**
59	71 163	0,35	93 314	0,12	77 849	0,47	22 151	0,47	**1**
60′	$\bar{1}$,71 184		$\bar{1}$,93 307		$\bar{1}$,77 877		0,22 123		**0′**
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	**59°**

P. P.

d 1″	0,12	0,13	0,35	0,37	0,47	0,48
6″	0,7	0,8	2,1	2,2	2,8	2,9
7	0,8	0,9	2,5	2,6	3,3	3,4
8	0,9	1,1	2,8	2,9	3,7	3,9
9	1,1	1,2	3,2	3,3	4,2	4,4
10	1,2	1,3	3,5	3,7	4,7	4,8
20	2,3	2,7	7,0	7,3	9,3	9,7
30	3,5	4,0	10,5	11,0	14,0	14,5
40	4,7	5,3	14,0	14,7	18,7	19,3
50	5,8	6,7	17,5	18,3	23,3	24,2

59°

31°

31°	lg sin	+d 1"	lg cos	—d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	—d 1"	
0′	$\overline{1}$,71 184	0,35	$\overline{1}$,93 307	0,13	$\overline{1}$,77 877	0,48	0,22 123	0,48	60′
1	71 205	35	93 299	13	77 906	48	22 094	48	59
2	71 226	35	93 291	12	77 935	47	22 065	47	58
3	71 247	35	93 284	13	77 963	48	22 037	48	57
4	71 268	0,35	93 276	0,12	77 992	0,47	22 008	0,47	56
5	71 289	35	93 269	13	78 020	48	21 980	48	55
6	71 310	35	93 261	13	78 049	47	21 951	47	54
7	71 331	35	93 253	12	78 077	48	21 923	48	53
8	71 352	35	93 246	13	78 106	48	21 894	48	52
9	71 373	0,33	93 238	0,13	78 135	0,47	21 865	0,47	51
10′	$\overline{1}$,71 393	35	$\overline{1}$,93 230	12	$\overline{1}$,78 163	48	0,21 837	48	50′
11	71 414	35	93 223	13	78 192	47	21 808	47	49
12	71 435	35	93 215	13	78 220	48	21 780	48	48
13	71 456	35	93 207	12	78 249	47	21 751	47	47
14	71 477	0,35	93 200	0,13	78 277	0,48	21 723	0,48	46
15	71 498	35	93 192	13	78 306	47	21 694	47	45
16	71 519	33	93 184	12	78 334	48	21 666	48	44
17	71 539	35	93 177	13	78 363	47	21 637	47	43
18	71 560	35	93 169	13	78 391	47	21 609	47	42
19	71 581	0,35	93 161	0,12	78 419	0,48	21 581	0,48	41
20′	$\overline{1}$,71 602	33	$\overline{1}$,93 154	13	$\overline{1}$,78 448	47	0,21 552	47	40′
21	71 622	35	93 146	13	78 476	48	21 524	48	39
22	71 643	35	93 138	12	78 505	47	21 495	47	38
23	71 664	35	93 131	13	78 533	48	21 467	48	37
24	71 685	0,33	93 123	0,13	78 562	0,47	21 438	0,47	36
25	71 705	35	93 115	12	78 590	47	21 410	47	35
26	71 726	35	93 108	13	78 618	48	21 382	48	34
27	71 747	33	93 100	13	78 647	47	21 353	47	33
28	71 767	35	93 092	13	78 675	48	21 325	48	32
29	71 788	0,35	93 084	0,12	78 704	0,47	21 296	0,47	31
30′	$\overline{1}$,71 809		$\overline{1}$,93 077		$\overline{1}$,78 732		0,21 268		30′
	lg cos	—d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	—d 1"	lg tg	+d 1"	58°

P.P.

d 1"	0,12	0,13	0,33	0,35	0,47	0,48
6"	0,7	0,8	2,0	2,1	2,8	2,9
7	0,8	0,9	2,3	2,5	3,3	3,4
8	0,9	1,1	2,7	2,8	3,7	3,9
9	1,1	1,2	3,0	3,2	4,2	4,4
10	1,2	1,3	3,3	3,5	4,7	4,8
20	2,3	2,7	6,7	7,0	9,3	9,7
30	3,5	4,0	10,0	10,5	14,0	14,5
40	4,7	5,3	13,3	14,0	18,7	19,3
50	5,8	6,7	16,7	17,5	23,3	24,2

58°

31°

31°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\bar{1}$,71 809	0,33	$\bar{1}$,93 077	0,13	$\bar{1}$,78 732	0,47	0,21 268	0,47	**30′**
31	71 829	35	93 069	13	78 760	48	21 240	48	**29**
32	71 850	33	93 061	13	78 789	47	21 211	47	**28**
33	71 870	35	93 053	12	78 817	47	21 183	47	**27**
34	71 891	0,33	93 046	0,13	78 845	0,48	21 155	0,48	**26**
35	71 911	35	93 038	13	78 874	47	21 126	47	**25**
36	71 932	33	93 030	13	78 902	47	21 098	47	**24**
37	71 952	35	93 022	13	78 930	48	21 070	48	**23**
38	71 973	35	93 014	12	78 959	47	21 041	47	**22**
39	71 994	0,33	93 007	0,13	78 987	0,47	21 013	0,47	**21**
40′	$\bar{1}$,72 014	33	$\bar{1}$,92 999	13	$\bar{1}$,79 015	47	0,20 985	47	**20′**
41	72 034	35	92 991	13	79 043	48	20 957	48	**19**
42	72 055	33	92 983	12	79 072	47	20 928	47	**18**
43	72 075	35	92 976	13	79 100	47	20 900	47	**17**
44	72 096	0,33	92 968	0,13	79 128	0,47	20 872	0,47	**16**
45	72 116	35	92 960	13	79 156	48	20 844	48	**15**
46	72 137	33	92 952	13	79 185	47	20 815	47	**14**
47	72 157	33	92 944	13	79 213	47	20 787	47	**13**
48	72 177	35	92 936	12	79 241	47	20 759	47	**12**
49	72 198	0,33	92 929	0,13	79 269	0,47	20 731	0,47	**11**
50′	$\bar{1}$,72 218	33	$\bar{1}$,92 921	13	$\bar{1}$,79 297	48	0,20 703	48	**10′**
51	72 238	35	92 913	13	79 326	47	20 674	47	**9**
52	72 259	33	92 905	13	79 354	47	20 646	47	**8**
53	72 279	33	92 897	13	79 382	47	20 618	47	**7**
54	72 299	0,35	92 889	0,13	79 410	0,47	20 590	0,47	**6**
55	72 320	33	92 881	12	79 438	47	20 562	47	**5**
56	72 340	33	92 874	13	79 466	48	20 534	48	**4**
57	72 360	35	92 866	13	79 495	47	20 505	47	**3**
58	72 381	33	92 858	13	79 523	47	20 477	47	**2**
59	72 401	0,33	92 850	0,13	79 551	0,47	20 449	0,47	**1**
60′	$\bar{1}$,72 421		$\bar{1}$,92 842		$\bar{1}$,79 579		0,20 421		**0′**
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	58°

P. P.

d 1″	0,12	0,13	0,33	0,35	0,47	0,48
6″	0,7	0,8	2,0	2,1	2,8	2,9
7	0,8	0,9	2,3	2,5	3,3	3,4
8	0,9	1,1	2,7	2,8	3,7	3,9
9	1,1	1,2	3,0	3,2	4,2	4,4
10	1,2	1,3	3,3	3,5	4,7	4,8
20	2,3	2,7	6,7	7,0	9,3	9,7
30	3,5	4,0	10,0	10,5	14,0	14,5
40	4,7	5,3	13,3	14,0	18,7	19,3
50	5,8	6,7	16,7	17,5	23,3	24,2

58°

32°

32°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	-d 1″	
0′	$\overline{1}$,72 421	0,33	$\overline{1}$,92 842	0,13	$\overline{1}$,79 579	0,47	0,20 421	0,47	60′
1	72 441	33	92 834	13	79 607	47	20 393	47	59
2	72 461	35	92 826	13	79 635	47	20 365	47	58
3	72 482	33	92 818	13	79 663	47	20 337	47	57
4	72 502	0,33	92 810	0,12	79 691	0,47	20 309	0,47	56
5	72 522	33	92 803	13	79 719	47	20 281	47	55
6	72 542	33	92 795	13	79 747	48	20 253	48	54
7	72 562	33	92 787	13	79 776	47	20 224	47	53
8	72 582	33	92 779	13	79 804	47	20 196	47	52
9	72 602	0,33	92 771	0,13	79 832	0,47	20 168	0,47	51
10′	$\overline{1}$,72 622	35	$\overline{1}$,92 763	13	$\overline{1}$,79 860	47	0,20 140	47	50′
11	72 643	33	92 755	13	79 888	47	20 112	47	49
12	72 663	33	92 747	13	79 916	47	20 084	47	48
13	72 683	33	92 739	13	79 944	47	20 056	47	47
14	72 703	0,33	92 731	0,13	79 972	0,47	20 028	0,47	46
15	72 723	33	92 723	13	80 000	47	20 000	47	45
16	72 743	33	92 715	13	80 028	47	19 972	47	44
17	72 763	33	92 707	13	80 056	47	19 944	47	43
18	72 783	33	92 699	13	80 084	47	19 916	47	42
19	72 803	0,33	92 691	0,13	80 112	0,47	19 888	0,47	41
20′	$\overline{1}$,72 823	33	$\overline{1}$,92 683	13	$\overline{1}$,80 140	47	0,19 860	47	40′
21	72 843	33	92 675	13	80 168	45	19 832	45	39
22	72 863	33	92 667	13	80 195	47	19 805	47	38
23	72 883	32	92 659	13	80 223	47	19 777	47	37
24	72 902	0,33	92 651	0,13	80 251	0,47	19 749	0,47	36
25	72 922	33	92 643	13	80 279	47	19 721	47	35
26	72 942	33	92 635	13	80 307	47	19 693	47	34
27	72 962	33	92 627	13	80 335	47	19 665	47	33
28	72 982	33	92 619	13	80 363	47	19 637	47	32
29	73 002	0,33	92 611	0,13	80 391	0,47	19 609	0,47	31
30′	$\overline{1}$,73 022		$\overline{1}$,92 603		$\overline{1}$,80 419		0,19 581		30′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	57°

P. P.

d 1″	0,12	0,13	0,32	0,33	0,35	0,45	0,47	0,48
6″	0,7	0,8	1,9	2,0	2,1	2,7	2,8	2,9
7	0,8	0,9	2,2	2,3	2,5	3,2	3,3	3,4
8	0,9	1,1	2,5	2,7	2,8	3,6	3,7	3,9
9	1,1	1,2	2,9	3,0	3,2	4,1	4,2	4,4
10	1,2	1,3	3,2	3,3	3,5	4,5	4,7	4,8
20	2,3	2,7	6,3	6,7	7,0	9,0	9,3	9,7
30	3,5	4,0	9,5	10,0	10,5	13,5	14,0	14,5
40	4,7	5,3	12,7	13,3	14,0	18,0	18,7	19,3
50	5,8	6,7	15,8	16,7	17,5	22,5	23,3	24,2

57°

32°

32°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{1}$,73 022	0,32	$\overline{1}$,92 603	0,13	$\overline{1}$,80 419	0,47	0,19 581	0,47	30′
31	73 041	33	92 595	13	80 447	45	19 553	45	29
32	73 061	33	92 587	13	80 474	47	19 526	47	28
33	73 081	33	92 579	13	80 502	47	19 498	47	27
34	73 101	0,33	92 571	0,13	80 530	0,47	19 470	0,47	26
35	73 121	32	92 563	13	80 558	47	19 442	47	25
36	73 140	33	92 555	15	80 586	47	19 414	47	24
37	73 160	33	92 546	13	80 614	47	19 386	47	23
38	73 180	33	92 538	13	80 642	45	19 358	45	22
39	73 200	0,32	92 530	0,13	80 669	0,47	19 331	0,47	21
40′	$\overline{1}$,73 219	33	$\overline{1}$,92 522	13	$\overline{1}$,80 697	47	0,19 303	47	20′
41	73 239	33	92 514	13	80 725	47	19 275	47	19
42	73 259	32	92 506	13	80 753	47	19 247	47	18
43	73 278	33	92 498	13	80 781	45	19 219	45	17
44	73 298	0,33	92 490	0,13	80 808	0,47	19 192	0,47	16
45	73 318	32	92 482	15	80 836	47	19 164	47	15
46	73 337	33	92 473	13	80 864	47	19 136	47	14
47	73 357	33	92 465	13	80 892	45	19 108	45	13
48	73 377	32	92 457	13	80 919	47	19 081	47	12
49	73 396	0,33	92 449	0,13	80 947	0,47	19 053	0,47	11
50′	$\overline{1}$,73 416	32	$\overline{1}$,92 441	13	$\overline{1}$,80 975	47	0,19 025	47	10′
51	73 435	33	92 433	13	81 003	45	18 997	45	9
52	73 455	32	92 425	15	81 030	47	18 970	47	8
53	73 474	33	92 416	13	81 058	47	18 942	47	7
54	73 494	0,32	92 408	0,13	81 086	0,45	18 914	0,45	6
55	73 513	33	92 400	13	81 113	47	18 887	47	5
56	73 533	32	92 392	13	81 141	47	18 859	47	4
57	73 552	33	92 384	13	81 169	45	18 831	45	3
58	73 572	32	92 376	15	81 196	47	18 804	47	2
59	73 591	0,33	92 367	0,13	81 224	0,47	18 776	0,47	1
60′	$\overline{1}$,73 611		$\overline{1}$,92 359		$\overline{1}$,81 252		0,18 748		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	57°

P. P.

d 1″	0,13	0,15	0,32	0,33	0,45	0,47
6″	0,8	0,9	1,9	2,0	2,7	2,8
7	0,9	1,1	2,2	2,3	3,2	3,3
8	1,1	1,2	2,5	2,7	3,6	3,7
9	1,2	1,4	2,9	3,0	4,1	4,2
10	1,3	1,5	3,2	3,3	4,5	4,7
20	2,7	3,0	6,3	6,7	9,0	9,3
30	4,0	4,5	9,5	10,0	13,5	14,0
40	5,3	6,0	12,7	13,3	18,0	18,7
50	6,7	7,5	15,8	16,7	22,5	23,3

57°

33°

33°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,73 611	0,32	$\overline{1}$,92 359	0,13	$\overline{1}$,81 252	0,45	0,18 748	0,45	60′
1	73 630	33	92 351	13	81 279	47	18 721	47	59
2	73 650	32	92 343	13	81 307	47	18 693	47	58
3	73 669	33	92 335	15	81 335	45	18 665	45	57
4	73 689	0,32	92 326	0,13	81 362	0,47	18 638	0,47	56
5	73 708	32	92 318	13	81 390	47	18 610	47	55
6	73 727	33	92 310	13	81 418	45	18 582	45	54
7	73 747	32	92 302	15	81 445	47	18 555	47	53
8	73 766	32	92 293	13	81 473	45	18 527	45	52
9	73 785	0,33	92 285	0,13	81 500	0,47	18 500	0,47	51
10′	$\overline{1}$,73 805	32	$\overline{1}$,92 277	13	$\overline{1}$,81 528	47	0,18 472	47	50′
11	73 824	32	92 269	15	81 556	45	18 444	45	49
12	73 843	33	92 260	13	81 583	47	18 417	47	48
13	73 863	32	92 252	13	81 611	45	18 389	45	47
14	73 882	0,32	92 244	0,15	81 638	0,47	18 362	0,47	46
15	73 901	33	92 235	13	81 666	45	18 334	45	45
16	73 921	32	92 227	13	81 693	47	18 307	47	44
17	73 940	32	92 219	13	81 721	45	18 279	45	43
18	73 959	32	92 211	15	81 748	47	18 252	47	42
19	73 978	0,32	92 202	0,13	81 776	0,45	18 224	0,45	41
20′	$\overline{1}$,73 997	33	$\overline{1}$,92 194	13	$\overline{1}$,81 803	47	0,18 197	47	40′
21	74 017	32	92 186	15	81 831	45	18 169	45	39
22	74 036	32	92 177	13	81 858	47	18 142	47	38
23	74 055	32	92 169	13	81 886	45	18 114	45	37
24	74 074	0,32	92 161	0,15	81 913	0,47	18 087	0,47	36
25	74 093	33	92 152	13	81 941	45	18 059	45	35
26	74 113	32	92 144	13	81 968	47	18 032	47	34
27	74 132	32	92 136	15	81 996	45	18 004	45	33
28	74 151	32	92 127	13	82 023	47	17 977	47	32
29	74 170	0,32	92 119	0,13	82 051	0,45	17 949	0,45	31
30′	$\overline{1}$,74 189		$\overline{1}$,92 111		$\overline{1}$,82 078		0,17 922		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	56°

P. P.

d 1″	0,13	0,15	0,32	0,33	0,45	0,47
6″	0,8	0,9	1,9	2,0	2,7	2,8
7	0,9	1,1	2,2	2,3	3,2	3,3
8	1,1	1,2	2,5	2,7	3,6	3,7
9	1,2	1,4	2,9	3,0	4,1	4,2
10	1,3	1,5	3,2	3,3	4,5	4,7
20	2,7	3,0	6,3	6,7	9,0	9,3
30	4,0	4,5	9,5	10,0	13,5	14,0
40	5,3	6,0	12,7	13,3	18,0	18,7
50	6,7	7,5	15,8	16,7	22,5	23,3

56°

33°

33°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\bar{1}$,74 189	0,32	$\bar{1}$,92 111	0,15	$\bar{1}$,82 078	0,47	0,17 922	0,47	30′
31	74 208	32	92 102	13	82 106	45	17 894	45	29
32	74 227	32	92 094	13	82 133	47	17 867	47	28
33	74 246	32	92 086	15	82 161	45	17 839	45	27
34	74 265	0,32	92 077	0,13	82 188	0,45	17 812	0,45	26
35	74 284	32	92 069	15	82 215	47	17 785	47	25
36	74 303	32	92 060	13	82 243	45	17 757	45	24
37	74 322	32	92 052	13	82 270	47	17 730	47	23
38	74 341	32	92 044	15	82 298	45	17 702	45	22
39	74 360	0,32	92 035	0,13	82 325	0,45	17 675	0,45	21
40′	$\bar{1}$,74 379	32	$\bar{1}$,92 027	15	$\bar{1}$,82 352	47	0,17 648	47	20′
41	74 398	32	92 018	13	82 380	45	17 620	45	19
42	74 417	32	92 010	13	82 407	47	17 593	47	18
43	74 436	32	92 002	15	82 435	45	17 565	45	17
44	74 455	0,32	91 993	0,13	82 462	0,45	17 538	0,45	16
45	74 474	32	91 985	15	82 489	47	17 511	47	15
46	74 493	32	91 976	13	82 517	45	17 483	45	14
47	74 512	32	91 968	15	82 544	45	17 456	45	13
48	74 531	30	91 959	13	82 571	47	17 429	47	12
49	74 549	0,32	91 951	0,15	82 599	0,45	17 401	0,45	11
50′	$\bar{1}$,74 568	32	$\bar{1}$,91 942	13	$\bar{1}$,82 626	45	0,17 374	45	10′
51	74 587	32	91 934	15	82 653	47	17 347	47	9
52	74 606	32	91 925	13	82 681	45	17 319	45	8
53	74 625	32	91 917	15	82 708	45	17 292	45	7
54	74 644	0,30	91 908	0,13	82 735	0,45	17 265	0,45	6
55	74 662	32	91 900	15	82 762	47	17 238	47	5
56	74 681	32	91 891	13	82 790	45	17 210	45	4
57	74 700	32	91 883	15	82 817	45	17 183	45	3
58	74 719	30	91 874	13	82 844	45	17 156	45	2
59	74 737	0,32	91 866	0,15	82 871	0,47	17 129	0,47	1
60′	$\bar{1}$,74 756		$\bar{1}$,91 857		$\bar{1}$,82 899		0,17 101		0′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	56°

P. P.

d 1″	0,13	0,15	0,30	0,32	0,45	0,47
6″	0,8	0,9	1,8	1,9	2,7	2,8
7	0,9	1,1	2,1	2,2	3,2	3,3
8	1,1	1,2	2,4	2,5	3,6	3,7
9	1,2	1,4	2,7	2,9	4,1	4,2
10	1,3	1,5	3,0	3,2	4,5	4,7
20	2,7	3,0	6,0	6,3	9,0	9,3
30	4,0	4,5	9,0	9,5	13,5	14,0
40	5,3	6,0	12,0	12,7	18,0	18,7
50	6,7	7,5	15,0	15,8	22,5	23,3

56°

34°

34°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,74 756	0,32	$\overline{1}$,91 857	0,13	$\overline{1}$,82 899	0,45	0,17 101	0,45	**60′**
1	74 775	32	91 849	15	82 926	45	17 074	45	**59**
2	74 794	30	91 840	13	82 953	45	17 047	45	**58**
3	74 812	32	91 832	15	82 980	47	17 020	47	**57**
4	74 831	0,32	91 823	0,13	83 008	0,45	16 992	0,45	**56**
5	74 850	30	91 815	15	83 035	45	16 965	45	**55**
6	74 868	32	91 806	13	83 062	45	16 938	45	**54**
7	74 887	32	91 798	15	83 089	47	16 911	47	**53**
8	74 906	30	91 789	13	83 117	45	16 883	45	**52**
9	74 924	0,32	91 781	0,15	83 144	0,45	16 856	0,45	**51**
10′	$\overline{1}$,74 943	30	$\overline{1}$,91 772	15	$\overline{1}$,83 171	45	0,16 829	45	**50′**
11	74 961	32	91 763	13	83 198	45	16 802	45	**49**
12	74 980	32	91 755	15	83 225	45	16 775	45	**48**
13	74 999	30	91 746	13	83 252	47	16 748	47	**47**
14	75 017	0,32	91 738	0,15	83 280	0,45	16 720	0,45	**46**
15	75 036	30	91 729	15	83 307	45	16 693	45	**45**
16	75 054	32	91 720	13	83 334	45	16 666	45	**44**
17	75 073	30	91 712	15	83 361	45	16 639	45	**43**
18	75 091	32	91 703	13	83 388	45	16 612	45	**42**
19	75 110	0,30	91 695	0,15	83 415	0,45	16 585	0,45	**41**
20′	$\overline{1}$,75 128	32	$\overline{1}$,91 686	15	$\overline{1}$,83 442	47	0,16 558	47	**40′**
21	75 147	30	91 677	13	83 470	45	16 530	45	**39**
22	75 165	32	91 669	15	83 497	45	16 503	45	**38**
23	75 184	30	91 660	15	83 524	45	16 476	45	**37**
24	75 202	0,32	91 651	0,13	83 551	0,45	16 449	0,45	**36**
25	75 221	30	91 643	15	83 578	45	16 422	45	**35**
26	75 239	32	91 634	15	83 605	45	16 395	45	**34**
27	75 258	30	91 625	13	83 632	45	16 368	45	**33**
28	75 276	30	91 617	15	83 659	45	16 341	45	**32**
29	75 294	0,32	91 608	0,15	83 686	0,45	16 314	0,45	**31**
30′	$\overline{1}$,75 313		$\overline{1}$,91 599		$\overline{1}$,83 713		0,16 287		**30′**
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	**55°**

P. P.

d 1″	0,13	0,15	0,30	0,32	0,45	0,47
6″	0,8	0,9	1,8	1,9	2,7	2,8
7	0,9	1,1	2,1	2,2	3,2	3,3
8	1,1	1,2	2,4	2,5	3,6	3,7
9	1,2	1,4	2,7	2,9	4,1	4,2
10	1,3	1,5	3,0	3,2	4,5	4,7
20	2,7	3,0	6,0	6,3	9,0	9,3
30	4,0	4,5	9,0	9,5	13,5	14,0
40	5,3	6,0	12,0	12,7	18,0	18,7
50	6,7	7,5	15,0	15,8	22,5	23,3

55°

34°

34°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\overline{1}$,75 313	0,30	$\overline{1}$,91 599	0,13	$\overline{1}$,83 713	0,45	0,16 287	0,45	30′
31	75 331	32	91 591	15	83 740	47	16 260	47	29
32	75 350	30	91 582	15	83 768	45	16 232	45	28
33	75 368	30	91 573	13	83 795	45	16 205	45	27
34	75 386	0,32	91 565	0,15	83 822	0,45	16 178	0,45	26
35	75 405	30	91 556	15	83 849	45	16 151	45	25
36	75 423	30	91 547	15	83 876	45	16 124	45	24
37	75 441	30	91 538	13	83 903	45	16 097	45	23
38	75 459	32	91 530	15	83 930	45	16 070	45	22
39	75 478	0,30	91 521	0,15	83 957	0,45	16 043	0,45	21
40′	$\overline{1}$,75 496	30	$\overline{1}$,91 512	13	$\overline{1}$,83 984	45	0,16 016	45	20′
41	75 514	32	91 504	15	84 011	45	15 989	45	19
42	75 533	30	91 495	15	84 038	45	15 962	45	18
43	75 551	30	91 486	15	84 065	45	15 935	45	17
44	75 569	0,30	91 477	0,13	84 092	0,45	15 908	0,45	16
45	75 587	30	91 469	15	84 119	45	15 881	45	15
46	75 605	32	91 460	15	84 146	45	15 854	45	14
47	75 624	30	91 451	15	84 173	45	15 827	45	13
48	75 642	30	91 442	15	84 200	45	15 800	45	12
49	75 660	0,30	91 433	0,13	84 227	0,45	15 773	0,45	11
50′	$\overline{1}$,75 678	30	$\overline{1}$,91 425	15	$\overline{1}$,84 254	43	0,15 746	43	10′
51	75 696	30	91 416	15	84 280	45	15 720	45	9
52	75 714	32	91 407	15	84 307	45	15 693	45	8
53	75 733	30	91 398	15	84 334	45	15 666	45	7
54	75 751	0,30	91 389	0,18	84 361	0,45	15 639	0,45	6
55	75 769	30	91 381	15	84 388	45	15 612	45	5
56	75 787	30	91 372	15	84 415	45	15 585	45	4
57	75 805	30	91 363	15	84 442	45	15 558	45	3
58	75 823	30	91 354	15	84 469	45	15 531	45	2
59	75 841	0,30	91 345	0,15	84 496	0,45	15 504	0,45	1
60′	$\overline{1}$,75 859		$\overline{1}$,91 336		$\overline{1}$,84 523		0,15 477		0′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	55°

P. P.

d 1″	0,13	0,15	0,30	0,32	0,43	0,45	0,47
6″	0,8	0,9	1,8	1,9	2,6	2,7	2,8
7	0,9	1,1	2,1	2,2	3,0	3,2	3,3
8	1,1	1,2	2,4	2,5	3,5	3,6	3,7
9	1,2	1,4	2,7	2,9	3,9	4,1	4,2
10	1,3	1,5	3,0	3,2	4,3	4,5	4,7
20	2,7	3,0	6,0	6,3	8,7	9,0	9,3
30	4,0	4,5	9,0	9,5	13,0	13,5	14,0
40	5,3	6,0	12,0	12,7	17,3	18,0	18,7
50	6,7	7,5	15,0	15,8	21,7	22,5	23,3

55°

35°

35°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\overline{1}$,75 859	0,30	$\overline{1}$,91 336	0,13	$\overline{1}$,84 523	0,45	0,15 477	0,45	60′
1	75 877	30	91 328	15	84 550	43	15 450	43	59
2	75 895	30	91 319	15	84 576	45	15 424	45	58
3	75 913	30	91 310	15	84 603	45	15 397	45	57
4	75 931	0,30	91 301	0,15	84 630	0,45	15 370	0,45	56
5	75 949	30	91 292	15	84 657	45	15 343	45	55
6	75 967	30	91 283	15	84 684	45	15 316	45	54
7	75 985	30	91 274	13	84 711	45	15 289	45	53
8	76 003	30	91 266	15	84 738	43	15 262	43	52
9	76 021	0,30	91 257	0,15	84 764	0,45	15 236	0,45	51
10′	$\overline{1}$,76 039	30	$\overline{1}$,91 248	15	$\overline{1}$,84 791	45	0,15 209	45	50′
11	76 057	30	91 239	15	84 818	45	15 182	45	49
12	76 075	30	91 230	15	84 845	45	15 155	45	48
13	76 093	30	91 221	15	84 872	45	15 128	45	47
14	76 111	0,30	91 212	0,15	94 899	0,43	15 101	0,43	46
15	76 129	28	91 203	15	84 925	45	15 075	45	45
16	76 146	30	91 194	15	84 952	45	15 048	45	44
17	76 164	30	91 185	15	84 979	45	15 021	45	43
18	76 182	30	91 176	15	85 006	45	14 994	45	42
19	76 200	0,30	91 167	0,15	85 033	0,43	14 967	0,43	41
20′	$\overline{1}$,76 218	30	$\overline{1}$,91 158	15	$\overline{1}$,85 059	45	0,14 941	45	40′
21	76 236	28	91 149	13	85 086	45	14 914	45	39
22	76 253	30	91 141	15	85 113	45	14 887	45	38
23	76 271	30	91 132	15	85 140	43	14 860	43	37
24	76 289	0,30	91 123	0,15	85 166	0,45	14 834	0,45	36
25	76 307	28	91 114	15	85 193	45	14 807	45	35
26	76 324	30	91 105	15	85 220	45	14 780	45	34
27	76 342	30	91 096	15	85 247	43	14 753	43	33
28	76 360	30	91 087	15	85 273	45	14 727	45	32
29	76 378	0,28	91 078	0,15	85 300	0,45	14 700	0,45	31
30′	$\overline{1}$,76 395		$\overline{1}$,91 069		$\overline{1}$,85 327		0,14 673		30′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	54°

P. P.

d 1″	0,13	0,15	0,28	0,30	0,43	0,45
6″	0,8	0,9	1,7	1,8	2,6	2,7
7	0,9	1,1	2,0	2,1	3,0	3,2
8	1,1	1,2	2,3	2,4	3,5	3,6
9	1,2	1,4	2,6	2,7	3,9	4,1
10	1,3	1,5	2,8	3,0	4.3	4,5
20	2,7	3,0	5,7	6,0	8,7	9,0
30	4,0	4,5	8,5	9,0	13,0	13,5
40	5,3	6,0	11,3	12,0	17,3	18,0
50	6,7	7,5	14,2	15,0	21,7	22,5

54°

35°

35°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\overline{1}$,76 393	0,30	$\overline{1}$,91 069	0,15	$\overline{1}$,85 327	0,45	0,14 673	0,45	**30′**
31	76 413	30	91 060	15	85 354	43	14 646	43	**29**
32	76 431	28	91 051	15	85 380	45	14 620	45	**28**
33	76 448	30	91 042	15	85 407	45	14 593	45	**27**
34	76 466	0,30	91 033	0,17	85 434	0,43	14 566	0,43	**26**
35	76 484	28	91 023	15	85 460	45	14 540	45	**25**
36	76 501	30	91 014	15	85 487	45	14 513	45	**24**
37	76 519	30	91 005	15	85 514	43	14 486	43	**23**
38	76 537	28	90 996	15	85 540	45	14 460	45	**22**
39	76 554	0,30	90 987	0,15	85 567	0,45	14 433	0,45	**21**
40′	$\overline{1}$,76 572	30	$\overline{1}$,90 978	15	$\overline{1}$,85 594	43	0,14 406	43	**20′**
41	76 590	28	90 969	15	85 620	45	14 380	45	**19**
42	76 607	30	90 960	15	85 647	45	14 353	45	**18**
43	76 625	28	90 951	15	85 674	43	14 326	43	**17**
44	76 642	0,30	90 942	0,15	85 700	0,45	14 300	0,45	**16**
45	76 660	28	90 933	15	85 727	45	14 273	45	**15**
46	76 677	30	90 924	15	85 754	43	14 246	43	**14**
47	76 695	28	90 915	15	85 780	45	14 220	45	**13**
48	76 712	30	90 906	17	85 807	45	14 193	45	**12**
49	76 730	0,28	90 896	0,15	85 834	0,43	14 166	0,43	**11**
50′	$\overline{1}$,76 747	30	$\overline{1}$,90 887	15	$\overline{1}$,85 860	45	0,14 140	45	**10′**
51	76 765	28	90 878	15	85 887	43	14 113	43	**9**
52	76 782	30	90 869	15	85 913	45	14 087	45	**8**
53	76 800	28	90 860	15	85 940	45	14 060	45	**7**
54	76 817	0,30	90 851	0,15	85 967	0,43	14 033	0,43	**6**
55	76 835	28	90 842	17	85 993	45	14 007	45	**5**
56	76 852	30	90 832	15	86 020	43	13 980	43	**4**
57	76 870	28	90 823	15	86 046	45	13 954	45	**3**
58	76 887	28	90 814	15	86 073	45	13 927	45	**2**
59	76 904	0,30	90 805	0,15	86 100	0,43	13 900	0,43	**1**
60′	$\overline{1}$,76 922		$\overline{1}$,90 796		$\overline{1}$,86 126		0,13 874		**0′**
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	54°

P. P.

d 1″	0,15	0,17	0,28	0,30	0,43	0,45
6″	0,9	1,0	1,7	1,8	2,6	2,7
7	1,1	1,2	2,0	2,1	3,0	3,2
8	1,2	1,3	2,3	2,4	3,5	3,6
9	1,4	1,5	2,6	2,7	3,9	4,1
10	1,5	1,7	2,8	3,0	4,3	4,5
20	3,0	3,3	5,7	6,0	8,7	9,0
30	4,5	5,0	8,5	9,0	13,0	13,5
40	6,0	6,7	11,3	12,0	17,3	18,0
50	7,5	8,3	14,2	15,0	21,7	22,5

54°

36°

36°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,76 922	0,28	$\overline{1}$,90 796	0,15	$\overline{1}$,86 126	0,45	0,13 874	0,45	**60′**
1	76 939	30	90 787	17	86 153	43	13 847	43	**59**
2	76 957	28	90 777	15	86 179	45	13 821	45	**58**
3	76 974	28	90 768	15	86 206	43	13 794	43	**57**
4	76 991	0,30	90 759	0,15	86 232	0,45	13 768	0,45	**56**
5	77 009	28	90 750	15	86 259	43	13 741	43	**55**
6	77 026	28	90 741	17	86 285	45	13 715	45	**54**
7	77 043	30	90 731	15	86 312	43	13 688	43	**53**
8	77 061	28	90 722	15	86 338	45	13 662	45	**52**
9	77 078	0,28	90 713	0,15	86 365	0,45	13 635	0,45	**51**
10′	$\overline{1}$,77 095	28	$\overline{1}$,90 704	17	$\overline{1}$,86 392	43	0,13 608	43	**50′**
11	77 112	30	90 694	15	86 418	45	13 582	45	**49**
12	77 130	28	90 685	15	86 445	43	13 555	43	**48**
13	77 147	28	90 676	15	86 471	45	13 529	45	**47**
14	77 164	0,28	90 667	0,17	86 498	0,43	13 502	0,43	**46**
15	77 181	30	90 657	15	86 524	45	13 476	45	**45**
16	77 199	28	90 648	15	86 551	43	13 449	43	**44**
17	77 216	28	90 639	15	86 577	43	13 423	43	**43**
18	77 233	28	90 630	17	86 603	45	13 397	45	**42**
19	77 250	0,30	90 620	0,15	86 630	0,43	13 370	0,43	**41**
20′	$\overline{1}$,77 268	28	$\overline{1}$,90 611	15	$\overline{1}$,86 656	45	0,13 344	45	**40′**
21	77 285	28	90 602	17	86 683	43	13 317	43	**39**
22	77 302	28	90 592	15	86 709	45	13 291	45	**38**
23	77 319	28	90 583	15	86 736	43	13 264	43	**37**
24	77 336	0,28	90 574	0,15	86 762	0,45	13 238	0,45	**36**
25	77 353	28	90 565	17	86 789	43	13 211	43	**35**
26	77 370	28	90 555	15	86 815	45	13 185	45	**34**
27	77 387	30	90 546	15	86 842	43	13 158	43	**33**
28	77 405	28	90 537	17	86 868	43	13 132	43	**32**
29	77 422	0,28	90 527	0,15	86 894	0,45	13 106	0,45	**31**
30′	$\overline{1}$,77 439		$\overline{1}$,90 518		$\overline{1}$,86 921		0,13 079		**30′**
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	**53°**

P. P.

d 1″	**0,15**	**0,17**	**0,28**	**0,30**	**0,43**	**0,45**
6″	0,9	1,0	1,7	1,8	2,6	2,7
7	1,1	1,2	2,0	2,1	3,0	3,2
8	1,2	1,3	2,3	2,4	3,5	3,6
9	1,4	1,5	2,6	2,7	3,9	4,1
10	1,5	1,7	2,8	3,0	4,3	4,5
20	3,0	3,3	5,7	6,0	8,7	9,0
30	4,5	5,0	8,5	9,0	13,0	13,5
40	6,0	6,7	11,3	12,0	17,3	18,0
50	7,5	8,3	14,2	15,0	21,7	22,5

53°

36°

36°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	1̄,77 439	0,28	1̄,90 518	0,15	1̄,86 921	0,43	0,13 079	0,43	30′
31	77 456	28	90 509	17	86 947	45	13 053	45	29
32	77 473	28	90 499	15	86 974	43	13 026	43	28
33	77 490	28	90 490	17	87 000	45	13 000	45	27
34	77 507	0,28	90 480	0,15	87 027	0,43	12 973	0,43	26
35	77 524	28	90 471	15	87 053	43	12 947	43	25
36	77 541	28	90 462	17	87 079	45	12 921	45	24
37	77 558	28	90 452	15	87 106	43	12 894	43	23
38	77 575	28	90 443	15	87 132	43	12 868	43	22
39	77 592	0,28	90 434	0,17	87 158	0,45	12 842	0,45	21
40′	1̄,77 609	28	1̄,90 424	15	1̄,87 185	43	0,12 815	43	20′
41	77 626	28	90 415	17	87 211	45	12 789	45	19
42	77 643	28	90 405	15	87 238	43	12 762	43	18
43	77 660	28	90 396	17	87 264	43	12 736	43	17
44	77 677	0,28	90 386	0,15	87 290	0,45	12 710	0,45	16
45	77 694	28	90 377	15	87 317	43	12 683	43	15
46	77 711	28	90 368	17	87 343	43	12 657	43	14
47	77 728	27	90 358	15	87 369	45	12 631	45	13
48	77 744	28	90 349	17	87 396	43	12 604	43	12
49	77 761	0,28	90 339	0,15	87 422	0,43	12 578	0,43	11
50′	1̄,77 778	28	1̄,90 330	17	1̄,87 448	45	0,12 552	45	10′
51	77 795	28	90 320	15	87 475	43	12 525	43	9
52	77 812	28	90 311	17	87 501	43	12 499	43	8
53	77 829	28	90 301	15	87 527	45	12 473	45	7
54	77 846	0,27	90 292	0,17	87 554	0,43	12 446	0,43	6
55	77 862	28	90 282	15	87 580	43	12 420	43	5
56	77 879	28	90 273	17	87 606	45	12 394	45	4
57	77 896	28	90 263	15	87 633	43	12 367	43	3
58	77 913	28	90 254	17	87 659	43	12 341	43	2
59	77 930	0,27	90 244	0,15	87 685	0,43	12 315	0,43	1
60′	1̄,77 946		1̄,90 235		1̄,87 711		0,12 289		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	53°

P. P.

d 1″	0,15	0,17	0,27	0,28	0,43	0,45
6″	0,9	1,0	1,6	1,7	2,6	2,7
7	1,1	1,2	1,9	2,0	3,0	3,2
8	1,2	1,3	2,1	2,3	3,5	3,6
9	1,4	1,5	2,4	2,6	3,9	4,1
10	1,5	1,7	2,7	2,8	4,3	4,5
20	3,0	3,3	5,3	5,7	8,7	9,0
30	4,5	5,0	8,0	8,5	13,0	13,5
40	6,0	6,7	10,7	11,3	17,3	18,0
50	7,5	8,3	13,3	14,2	21,7	22,5

53°

37°

37°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\overline{1}$,77 946	0,28	$\overline{1}$,90 235	0,17	$\overline{1}$,87 711	0,45	0,12 289	0,45	60′
1	77 963	28	90 225	15	87 738	43	12 262	43	59
2	77 980	28	90 216	17	87 764	43	12 236	43	58
3	77 997	27	90 206	15	87 790	45	12 210	45	57
4	78 013	0,28	90 197	0,17	87 817	0,43	12 183	0,43	56
5	78 030	28	90 187	15	87 843	43	12 157	43	55
6	78 047	27	90 178	17	87 869	43	12 131	43	54
7	78 063	28	90 168	15	87 895	45	12 105	45	53
8	78 080	28	90 159	17	87 922	43	12 078	43	52
9	78 097	0,27	90 149	0,17	87 948	0,43	12 052	0,43	51
10′	$\overline{1}$,78 113	28	$\overline{1}$,90 139	15	$\overline{1}$,87 974	43	0,12 026	43	50′
11	78 130	28	90 130	17	88 000	45	12 000	45	49
12	78 147	27	90 120	15	88 027	43	11 973	43	48
13	78 163	28	90 111	17	88 053	43	11 947	43	47
14	78 180	0,28	90 101	0,17	88 079	0,43	11 921	0,43	46
15	78 197	27	90 091	15	88 105	43	11 895	43	45
16	78 213	28	90 082	17	88 131	45	11 869	45	44
17	78 230	27	90 072	15	88 158	43	11 842	43	43
18	78 246	28	90 063	17	88 184	43	11 816	43	42
19	78 263	0,28	90 053	0,17	88 210	0,43	11 790	0,43	41
20′	$\overline{1}$,78 280	27	$\overline{1}$,90 043	15	$\overline{1}$,88 236	43	0,11 764	43	40′
21	78 296	28	90 034	17	88 262	45	11 738	45	39
22	78 313	27	90 024	17	88 289	43	11 711	43	38
23	78 329	28	90 014	15	88 315	43	11 685	43	37
24	78 346	0,27	90 005	0,17	88 341	0,43	11 659	0,43	36
25	78 362	28	89 995	17	88 367	43	11 633	43	35
26	78 379	27	89 985	15	88 393	45	11 607	45	34
27	78 395	28	89 976	17	88 420	43	11 580	43	33
28	78 412	27	89 966	17	88 446	43	11 554	43	32
29	78 428	0,28	89 956	0,15	88 472	0,43	11 528	0,43	31
30′	$\overline{1}$,78 445		$\overline{1}$,89 947		$\overline{1}$,88 498		0,11 502		30′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	52°

P. P.

d1″	0,15	0,17	0,27	0,28	0,43	0,45
6″	0,9	1,0	1,6	1,7	2,6	2,7
7	1,1	1,2	1,9	2,0	3,0	3,2
8	1,2	1,3	2,1	2,3	3,5	3,6
9	1,4	1,5	2,4	2,6	3,9	4,1
10	1,5	1,7	2,7	2,8	4,3	4,5
20	3,0	3,3	5,3	5,7	8,7	9,0
30	4,5	5,0	8,0	8,5	13,0	13,5
40	6,0	6,7	10,7	11,3	17,3	18,0
50	7,5	8,3	13,3	14,2	21,7	22,5

52°

37°

37°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\bar{1}$,78 445	0,27	$\bar{1}$,89 947	0,17	$\bar{1}$,88 498	0,43	0,11 502	0,43	30′
31	78 461	28	89 937	17	88 524	43	11 476	43	29
32	78 478	27	89 927	15	88 550	45	11 450	45	28
33	78 494	27	89 918	17	88 577	43	11 423	43	27
34	78 510	0,28	89 908	0,17	88 603	0,43	11 397	0,43	26
35	78 527	27	89 898	17	88 629	43	11 371	43	25
36	78 543	28	89 888	15	88 655	43	11 345	43	24
37	78 560	27	89 879	17	88 681	43	11 319	43	23
38	78 576	27	89 869	17	88 707	43	11 293	43	22
39	78 592	0,28	89 859	0,17	88 733	0,43	11 267	0,43	21
40′	$\bar{1}$,78 609	27	$\bar{1}$,89 849	15	$\bar{1}$,88 759	45	0,11 241	45	20′
41	78 625	28	89 840	17	88 786	43	11 214	43	19
42	78 642	27	89 830	17	88 812	43	11 188	43	18
43	78 658	27	89 820	17	88 838	43	11 162	43	17
44	78 674	0,28	89 810	0,15	88 864	0,43	11 136	0,43	16
45	78 691	27	89 801	17	88 890	43	11 110	43	15
46	78 707	27	89 791	17	88 916	43	11 084	43	14
47	78 723	27	89 781	17	88 942	43	11 058	43	13
48	78 739	28	89 771	17	88 968	43	11 032	43	12
49	78 756	0,27	89 761	0,15	88 994	0,43	11 006	0,43	11
50′	$\bar{1}$,78 772	27	$\bar{1}$,89 752	17	$\bar{1}$,89 020	43	0,10 980	43	10′
51	78 788	28	89 742	17	89 046	45	10 954	45	9
52	78 805	27	89 732	17	89 073	43	10 927	43	8
53	78 821	27	89 722	17	89 099	43	10 901	43	7
54	78 837	0,27	89 712	0,17	89 125	0,43	10 875	0,43	6
55	78 853	27	89 702	15	89 151	43	10 849	43	5
56	78 869	28	89 693	17	89 177	43	10 823	43	4
57	78 886	27	89 683	17	89 203	43	10 797	43	3
58	78 902	27	89 673	17	89 229	43	10 771	43	2
59	78 918	0,27	89 663	0,17	89 255	0,43	10 745	0,43	1
60′	$\bar{1}$,78 934		$\bar{1}$,89 653		$\bar{1}$,89 281		0,10 719		0′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	52°

P. P.

d 1″	0,15	0,17	0,27	0,28	0,43	0,45
6″	0,9	1,0	1,6	1,7	2,6	2,7
7	1,1	1,2	1,9	2,0	3,0	3,2
8	1,2	1,3	2,1	2,3	3,5	3,6
9	1,4	1,5	2,4	2,6	3,9	4,1
10	1,5	1,7	2,7	2,8	4,3	4,5
20	3,0	3,3	5,3	5,7	8,7	9,0
30	4,5	5,0	8,0	8,5	13,0	13,5
40	6,0	6,7	10,7	11,3	17,3	18,0
50	7,5	8,3	13,3	14,2	21,7	22,5

52°

38°

38°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	—d 1″	lg cotg	—d 1″	
0′	$\overline{1}$,78 934	0,27	$\overline{1}$,89 653	0,17	$\overline{1}$,89 281	0,43	0,10 719	0,43	60′
1	78 950	28	89 643	17	89 307	43	10 693	43	59
2	78 967	27	89 633	15	89 333	43	10 667	43	58
3	78 983	27	89 624	17	89 359	43	10 641	43	57
4	78 999	0,27	89 614	0,17	89 385	0,43	10 615	0,43	56
5	79 015	27	89 604	17	89 411	43	10 589	43	55
6	79 031	27	89 594	17	89 437	43	10 563	43	54
7	79 047	27	89 584	17	89 463	43	10 537	43	53
8	79 063	27	89 574	17	89 489	43	10 511	43	52
9	79 079	0,27	89 564	0,17	89 515	0,43	10 485	0,43	51
10′	$\overline{1}$,79 095	27	$\overline{1}$,89 554	17	$\overline{1}$,89 541	43	0,10 459	43	50′
11	79 111	28	89 544	17	89 567	43	10 433	43	49
12	79 128	27	89 534	17	89 593	43	10 407	43	48
13	79 144	27	89 524	17	89 619	43	10 381	43	47
14	79 160	0,27	89 514	0,17	89 645	0,43	10 355	0,43	46
15	79 176	27	89 504	15	89 671	43	10 329	43	45
16	79 192	27	89 495	17	89 697	43	10 303	43	44
17	79 208	27	89 485	17	89 723	43	10 277	43	43
18	79 224	27	89 475	17	89 749	43	10 251	43	42
19	79 240	0,27	89 465	0,17	89 775	0,43	10 225	0,43	41
20′	$\overline{1}$,79 256	27	$\overline{1}$,89 455	17	$\overline{1}$,89 801	43	0,10 199	43	40′
21	79 272	27	89 445	17	89 827	43	10 173	43	39
22	79 288	27	89 435	17	89 853	43	10 147	43	38
23	79 304	25	89 425	17	89 879	43	10 121	43	37
24	79 319	0,27	89 415	0,17	89 905	0,43	10 095	0,43	36
25	79 335	27	89 405	17	89 931	43	10 069	43	35
26	79 351	27	89 395	17	89 957	43	10 043	43	34
27	79 367	27	89 385	17	89 983	43	10 017	43	33
28	79 383	27	89 375	18	90 009	43	09 991	43	32
29	79 399	0,27	89 364	0,17	90 035	0,43	09 965	0,43	31
30′	$\overline{1}$,79 415		$\overline{1}$,89 354		$\overline{1}$,90 061		0,09 939		30′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	51°

P. P.

d 1″	0,15	0,17	0,18	0,25	0,27	0,28	0,43
6″	0,9	1,0	1,1	1,5	1,6	1,7	2,6
7	1,1	1,2	1,3	1,8	1,9	2,0	3,0
8	1,2	1,3	1,5	2,0	2,1	2,3	3,5
9	1,4	1,5	1,7	2,3	2,4	2,6	3,9
10	1,5	1,7	1,8	2,5	2,7	2,8	4,3
20	3,0	3,3	3,7	5,0	5,3	5,7	8,7
30	4,5	5,0	5,5	7,5	8,0	8,5	13,0
40	6,0	6,7	7,3	10,0	10,7	11,3	17,3
50	7,5	8,3	9,2	12,5	13,3	14,2	21,7

51°

38°

38°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\bar{1}$ 79 415		$\bar{1}$,89 354		$\bar{1}$,90 061		0,09 939		**30′**
		0,27		0,17		0,42		0,42	
31	79 431		89 344		90 086		09 914		**29**
		27		17		43		43	
32	79 447		89 334		90 112		09 888		**28**
		27		17		43		43	
33	79 463		89 324		90 138		09 862		**27**
		25		17		43		43	
34	79 478		89 314		90 164		09 836		**26**
		0,27		0,17		0,43		0,43	
35	79 494		89 304		90 190		09 810		**25**
		27		17		43		43	
36	79 510		89 294		90 216		09 784		**24**
		27		17		43		43	
37	79 526		89 284		90 242		09 758		**23**
		27		17		43		43	
38	79 542		89 274		90 268		09 732		**22**
		27		17		43		43	
39	79 558		89 264		90 294		09 706		**21**
		0,25		0,17		0,43		0,43	
40′	$\bar{1}$,79 573		$\bar{1}$,89 254		$\bar{1}$,90 320		0,09 680		**20′**
		27		17		43		43	
41	79 589		89 244		90 346		09 654		**19**
		27		18		42		42	
42	79 605		89 233		90 371		09 629		**18**
		27		17		43		43	
43	79 621		89 223		90 397		09 603		**17**
		25		17		43		43	
44	79 636		89 213		90 423		09 577		**16**
		0,27		0,17		0,43		0,43	
45	79 652		89 203		90 449		09 551		**15**
		27		17		43		43	
46	79 668		89 193		90 475		09 525		**14**
		27		17		43		43	
47	79 684		89 183		90 501		09 499		**13**
		25		17		43		43	
48	79 699		89 173		90 527		09 473		**12**
		27		18		43		43	
49	79 715		89 162		90 553		09 447		**11**
		0,27		0,17		0,42		0,42	
50′	$\bar{1}$,79 731		$\bar{1}$,89 152		$\bar{1}$,90 578		0,09 422		**10′**
		25		17		43		43	
51	79 746		89 142		90 604		09 396		**9**
		27		17		43		43	
52	79 762		89 132		90 630		09 370		**8**
		27		17		43		43	
53	79 778		89 122		90 656		09 344		**7**
		25		17		43		43	
54	79 793		89 112		90 682		09 318		**6**
		0,27		0,18		0,43		0,43	
55	79 809		89 101		90 708		09 292		**5**
		27		17		43		43	
56	79 825		89 091		90 734		09 266		**4**
		25		17		42		42	
57	79 840		89 081		90 759		09 241		**3**
		27		17		43		43	
58	79 856		89 071		90 785		09 215		**2**
		27		18		43		43	
59	79 872		89 060		90 811		09 189		**1**
		0,25		0,17		0,43		0,43	
60′	$\bar{1}$,79 887		$\bar{1}$,89 050		$\bar{1}$,90 837		0,09 163		**0′**
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	**51°**

P. P.

d 1″	0,17	0,18	0,25	0,27	0,42	0,43
6″	1,0	1,1	1,5	1,6	2,5	2,6
7	1,2	1,3	1,8	1,9	2,9	3,0
8	1,3	1,5	2,0	2,1	3,3	3,5
9	1,5	1,7	2,3	2,4	3,8	3,9
10	1,7	1,8	2,5	2,7	4,2	4,3
20	3,3	3,7	5,0	5,3	8,3	8,7
30	5,0	5,5	7,5	8,0	12,5	13,0
40	6,7	7,3	10,0	10,7	16,7	17,3
50	8,3	9,2	12,5	13,3	20,8	21,7

51°

39°

39°	lg sin	+d 1"	lg cos	−d 1"	lg tg	+d 1"	lg cotg	−d 1"	
0'	$\bar{1}$,79 887	0,27	$\bar{1}$,89 050	0,17	$\bar{1}$,90 837	0,43	0,09 163	0,43	60'
1	79 903	25	89 040	17	90 863	43	09 137	43	59
2	79 918	27	89 030	17	90 889	42	09 111	42	58
3	79 934	27	89 020	18	90 914	43	09 086	43	57
4	79 950	0,25	89 009	0,17	90 940	0,43	09 060	0,43	56
5	79 965	27	88 999	17	90 966	43	09 034	43	55
6	79 981	25	88 989	18	90 992	43	09 008	43	54
7	79 996	27	88 978	17	91 018	42	08 982	42	53
8	80 012	25	88 968	17	91 043	43	08 957	43	52
9	80 027	0,27	88 958	0,17	91 069	0,43	08 931	0,43	51
10'	$\bar{1}$,80 043	25	$\bar{1}$,88 948	18	$\bar{1}$,91 095	43	0,08 905	43	50'
11	80 058	27	88 937	17	91 121	43	08 879	43	49
12	80 074	25	88 927	17	91 147	42	08 853	42	48
13	80 089	27	88 917	18	91 172	43	08 828	43	47
14	80 105	0,25	88 906	0,17	91 198	0,43	08 802	0,43	46
15	80 120	27	88 896	17	91 224	43	08 776	43	45
16	80 136	25	88 886	18	91 250	43	08 750	43	44
17	80 151	25	88 875	17	91 276	42	08 724	42	43
18	80 166	27	88 865	17	91 301	43	08 699	43	42
19	80 182	0,25	88 855	0,18	91 327	0,43	08 673	0,43	41
20'	$\bar{1}$,80 197	27	$\bar{1}$,88 844	17	$\bar{1}$,91 353	43	0,08 647	43	40'
21	80 213	25	88 834	17	91 379	42	08 621	42	39
22	80 228	27	88 824	18	91 404	43	08 596	43	38
23	80 244	25	88 813	17	91 430	43	08 570	43	37
24	80 259	0,25	88 803	0,17	91 456	0,43	08 544	0,43	36
25	80 274	27	88 793	18	91 482	42	08 518	42	35
26	80 290	25	88 782	17	91 507	43	08 493	43	34
27	80 305	25	88 772	18	91 533	43	08 467	43	33
28	80 320	27	88 761	17	91 559	43	08 441	43	32
29	80 336	0,25	88 751	0,17	91 585	0,42	08 415	0,42	31
30'	$\bar{1}$,80 351		$\bar{1}$,88 741		$\bar{1}$,91 610		0,08 390		30'
	lg cos	−d 1"	lg sin	+d 1"	lg cotg	−d 1"	lg tg	+d 1"	50°

P. P.

d 1"	0,17	0,18	0,25	0,27	0,42	0,43
6"	1,0	1,1	1,5	1,6	2,5	2,6
7	1,2	1,3	1,8	1,9	2,9	3,0
8	1,3	1,5	2,0	2,1	3,3	3,5
9	1,5	1,7	2,3	2,4	3,8	3,9
10	1,7	1,8	2,5	2,7	4,2	4,3
20	3,3	3,7	5,0	5,3	8,3	8,7
30	5,0	5,5	7,5	8,0	12,5	13,0
40	6,7	7,3	10,0	10,7	16,7	17,3
50	8,3	9,2	12,5	13,3	20,8	21,7

50°

39°

39°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\bar{1}$,80 351	0,25	$\bar{1}$,88 741	0,18	$\bar{1}$,91 610	0,43	0,08 390	0,43	**30′**
31	80 366	27	88 730	17	91 636	43	08 364	43	**29**
32	80 382	25	88 720	18	91 662	43	08 338	43	**28**
33	80 397	25	88 709	17	91 688	42	08 312	42	**27**
34	80 412	0,27	88 699	0,18	91 713	0,43	08 287	0,43	**26**
35	80 428	25	88 688	17	91 739	43	08 261	43	**25**
36	80 443	25	88 678	17	91 765	43	08 235	43	**24**
37	80 458	25	88 668	18	91 791	42	08 209	42	**23**
38	80 473	27	88 657	17	91 816	43	08 184	43	**22**
39	80 489	0,25	88 647	0,18	91 842	0,43	08 158	0,43	**21**
40′	$\bar{1}$,80 504	25	$\bar{1}$,88 636	17	$\bar{1}$,91 868	42	0,08 132	42	**20′**
41	80 519	25	88 626	18	91 893	43	08 107	43	**19**
42	80 534	27	88 615	17	91 919	43	08 081	43	**18**
43	80 550	25	88 605	18	91 945	43	08 055	43	**17**
44	80 565	0,25	88 594	0,17	91 971	0,42	08 029	0,42	**16**
45	80 580	25	88 584	18	91 996	43	08 004	43	**15**
46	80 595	25	88 573	17	92 022	43	07 978	43	**14**
47	80 610	25	88 563	18	92 048	42	07 952	42	**13**
48	80 625	27	88 552	17	92 073	43	07 927	43	**12**
49	80 641	0,25	88 542	0,18	92 099	0,43	07 901	0,43	**11**
50′	$\bar{1}$,80 656	25	$\bar{1}$,88 531	17	$\bar{1}$,92 125	42	0,07 875	42	**10′**
51	80 671	25	88 521	18	92 150	43	07 850	43	**9**
52	80 686	25	88 510	18	92 176	43	07 824	43	**8**
53	80 701	25	88 499	17	92 202	42	07 798	42	**7**
54	80 716	0,25	88 489	0,18	92 227	0,43	07 773	0,43	**6**
55	80 731	25	88 478	17	92 253	43	07 747	43	**5**
56	80 746	27	88 468	18	92 279	42	07 721	42	**4**
57	80 762	25	88 457	17	92 304	43	07 696	43	**3**
58	80 777	25	88 447	18	92 330	43	07 670	43	**2**
59	80 792	0,25	88 436	0,18	92 356	0,42	07 644	0,42	**1**
60′	$\bar{1}$,80 807		$\bar{1}$,88 425		$\bar{1}$,92 381		0,07 619		**0′**
	lg cos	−d 1″	**lg sin**	+d 1″	**lg cotg**	−d 1″	**lg tg**	+d 1″	**50°**

P. P.

d 1″	**0,17**	**0,18**	**0,25**	**0,27**	**0,42**	**0,43**
6″	1,0	1,1	1,5	1,6	2,5	2,6
7	1,2	1,3	1,8	1,9	2,9	3,0
8	1,3	1,5	2,0	2,1	3,3	3,5
9	1,5	1,7	2,3	2,4	3,8	3,9
10	1,7	1,8	2,5	2,7	4,2	4,3
20	3,3	3,7	5,0	5,3	8,3	8,7
30	5,0	5,5	7,5	8,0	12,5	13,0
40	6,7	7,3	10,0	10,7	16,7	17,3
50	8,3	9,2	12,5	13,3	20,8	21,7

50°

40°

40°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\bar{1}$,80 807	0,25	$\bar{1}$,88 425	0,17	$\bar{1}$,92 381	0,43	0,07 619	0,43	60′
1	80 822	25	88 415	18	92 407	43	07 593	43	59
2	80 837	25	88 404	17	92 433	42	07 567	42	58
3	80 852	25	88 394	18	92 458	43	07 542	43	57
4	80 867	0,25	88 383	0,18	92 484	0,43	07 516	0,43	56
5	80 882	25	88 372	17	92 510	42	07 490	42	55
6	80 897	25	88 362	18	92 535	43	07 465	43	54
7	80 912	25	88 351	18	92 561	43	07 439	43	53
8	80 927	25	88 340	17	92 587	42	07 413	42	52
9	80 942	0,25	88 330	0,18	92 612	0,43	07 388	0,43	51
10′	$\bar{1}$,80 957	25	$\bar{1}$,88 319	18	$\bar{1}$,92 638	42	0,07 362	42	50′
11	80 972	25	88 308	17	92 663	43	07 337	43	49
12	80 987	25	88 298	18	92 689	43	07 311	43	48
13	81 002	25	88 287	18	92 715	42	07 285	42	47
14	81 017	0,25	88 276	0,17	92 740	0,43	07 260	0,43	46
15	81 032	25	88 266	18	92 766	43	07 234	43	45
16	81 047	23	88 255	18	92 792	42	07 208	42	44
17	81 061	25	88 244	17	92 817	43	07 183	43	43
18	81 076	25	88 234	18	92 843	42	07 157	42	42
19	81 091	0,25	88 223	0,18	92 868	0,43	07 132	0,43	41
20′	$\bar{1}$,81 106	25	$\bar{1}$,88 212	18	$\bar{1}$,92 894	43	0,07 106	43	40′
21	81 121	25	88 201	17	92 920	42	07 080	42	39
22	81 136	25	88 191	18	92 945	43	07 055	43	38
23	81 151	25	88 180	18	92 971	42	07 029	42	37
24	81 166	0,23	88 169	0,18	92 996	0,43	07 004	0,43	36
25	81 180	25	88 158	17	93 022	43	06 978	43	35
26	81 195	25	88 148	18	93 048	42	06 952	42	34
27	81 210	25	88 137	18	93 073	43	06 927	43	33
28	81 225	25	88 126	18	93 099	42	06 901	42	32
29	81 240	0,23	88 115	0,17	93 124	0,43	06 876	0,43	31
30′	$\bar{1}$,81 254		$\bar{1}$,88 105		$\bar{1}$,93 150		0,06 850		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	49°

P. P.

d 1″	0,17	0,18	0,23	0,25	0,42	0,43
6″	1,0	1,1	1,4	1,5	2,5	2,6
7	1,2	1,3	1,6	1,8	2,9	3,0
8	1,3	1,5	1,9	2,0	3,3	3,5
9	1,5	1,7	2,1	2,3	3,8	3,9
10	1,7	1,8	2,3	2,5	4,2	4,3
20	3,3	3,7	4,7	5,0	8,3	8,7
30	5,0	5,5	7,0	7,5	12,5	13,0
40	6,7	7,3	9,3	10,0	16,7	17,3
50	8,3	9,2	11,7	12,5	20,8	21,7

49°

40°

40°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{1}$,81 254	0,25	$\overline{1}$,88 105	0,18	$\overline{1}$,93 150	0,42	0,06 850	0,42	30′
31	81 269	25	88 094	18	93 175	43	06 825	43	29
32	81 284	25	88 083	18	93 201	43	06 799	43	28
33	81 299	25	88 072	18	93 227	42	06 773	42	27
34	81 314	0,23	88 061	0,17	93 252	0,43	06 748	0,43	26
35	81 328	25	88 051	18	93 278	42	06 722	42	25
36	81 343	25	88 040	18	93 303	43	06 697	43	24
37	81 358	23	88 029	18	93 329	42	06 671	42	23
38	81 372	25	88 018	18	93 354	43	06 646	43	22
39	81 387	0,25	88 007	0,18	93 380	0,43	06 620	0,43	21
40′	$\overline{1}$,81 402	25	$\overline{1}$,87 996	18	$\overline{1}$,93 406	42	0,06 594	42	20′
41	81 417	23	87 985	17	93 431	43	06 569	43	19
42	81 431	25	87 975	18	93 457	42	06 543	42	18
43	81 446	25	87 964	18	93 482	43	06 518	43	17
44	81 461	0,23	87 953	0,18	93 508	0,42	06 492	0,42	16
45	81 475	25	87 942	18	93 533	43	06 467	43	15
46	81 490	25	87 931	18	93 559	42	06 441	42	14
47	81 505	23	87 920	18	93 584	43	06 416	43	13
48	81 519	25	87 909	18	93 610	43	06 390	43	12
49	81 534	0,25	87 898	0,18	93 636	0,42	06 364	0,42	11
50′	$\overline{1}$,81 549	23	$\overline{1}$,87 887	17	$\overline{1}$,93 661	43	0,06 339	43	10′
51	81 563	25	87 877	18	93 687	42	06 313	42	9
52	81 578	23	87 866	18	93 712	43	06 288	43	8
53	81 592	25	87 855	18	93 738	42	06 262	42	7
54	81.607	0,25	87 844	0,18	93 763	0,43	06 237	0,43	6
55	81 622	23	87 833	18	93 789	42	06 211	42	5
56	81 636	25	87 822	18	93 814	43	06 186	43	4
57	81 651	23	87 811	18	93 840	42	06 160	42	3
58	81 665	25	87 800	18	93 865	43	06 135	43	2
59	81 680	0,23	87 789	0,18	93 891	0,42	06 109	0,42	1
60′	$\overline{1}$,81 694		$\overline{1}$,87 778		$\overline{1}$,93 916		0,06 084		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	49°

P. P.

d 1″	0,17	0,18	0,23	0,25	0,42	0,43
6″	1,0	1,1	1,4	1,5	2,5	2,6
7	1,2	1,3	1,6	1,8	2,9	3,0
8	1,3	1,5	1,9	2,0	3,3	3,5
9	1,5	1,7	2,1	2,3	3,8	3,9
10	1,7	1,8	2,3	2,5	4,2	4,3
20	3,3	3,7	4,7	5,0	8,3	8,7
30	5,0	5,5	7,0	7,5	12,5	13,0
40	6,7	7,3	9,3	10,0	16,7	17,3
50	8,3	9,2	11,7	12,5	20,8	21,7

49°

41°

41°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,81 694	0,25	$\overline{1}$,87 778	0,18	$\overline{1}$,93 916	0,43	0,06 084	0,43	60′
1	81 709	23	87 767	18	93 942	42	06 058	42	59
2	81 723	25	87 756	18	93 967	43	06 033	43	58
3	81 738	23	87 745	18	93 993	42	06 007	42	57
4	81 752	0,25	87 734	0,18	94 018	0,43	05 982	0,43	56
5	81 767	23	87 723	18	94 044	42	05 956	42	55
6	81 781	25	87 712	18	94 069	43	05 931	43	54
7	81 796	23	87 701	18	94 095	42	05 905	42	53
8	81 810	25	87 690	18	94 120	43	05 880	43	52
9	81 825	0,23	87 679	0,18	94 146	0,42	05 854	0,42	51
10′	$\overline{1}$,81 839	25	$\overline{1}$,87 668	18	$\overline{1}$,94 171	43	0,05 829	43	50′
11	81 854	23	87 657	18	94 197	42	05 803	42	49
12	81 868	23	87 646	18	94 222	43	05 778	43	48
13	81 882	25	87 635	18	94 248	42	05 752	42	47
14	81 897	0,23	87 624	0,18	94 273	0,43	05 727	0,43	46
15	81 911	25	87 613	20	94 299	42	05 701	42	45
16	81 926	23	87 601	18	94 324	43	05 676	43	44
17	81 940	25	87 590	18	94 350	42	05 650	42	43
18	81 955	23	87 579	18	94 375	43	05 625	43	42
19	81 969	0,23	87 568	0,18	94 401	0,42	05 599	0,42	41
20′	$\overline{1}$,81 983	25	$\overline{1}$,87 557	18	$\overline{1}$,94 426	43	0,05 574	43	40′
21	81 998	23	87 546	18	94 452	42	05 548	42	39
22	82 012	23	87 535	18	94 477	43	05 523	43	38
23	82 026	25	87 524	18	94 503	42	05 497	42	37
24	82 041	0,23	87 513	0,20	94 528	0,43	05 472	0,43	36
25	82 055	23	87 501	18	94 554	42	05 446	42	35
26	82 069	25	87 490	18	94 579	42	05 421	42	34
27	82 084	23	87 479	18	94 604	43	05 396	43	33
28	82 098	23	87 468	18	94 630	42	05 370	42	32
29	82 112	0,23	87 457	0,18	94 655	0,43	05 345	0,43	31
30′	$\overline{1}$,82 126		$\overline{1}$,87 446		$\overline{1}$,94 681		0,05 319		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	48°

P. P.

d 1″	0,18	0,20	0,23	0,25	0,42	0,43
6″	1,1	1,2	1,4	1,5	2,5	2,6
7	1,3	1,4	1,6	1,8	2,9	3,0
8	1,5	1,6	1,9	2,0	3,3	3,5
9	1,7	1,8	2,1	2,3	3,8	3,9
10	1,8	2,0	2,3	2,5	4,2	4,3
20	3,7	4,0	4,7	5,0	8,3	8,7
30	5,5	6,0	7,0	7,5	12,5	13,0
40	7,3	8,0	9,3	10,0	16,7	17,3
50	9,2	10,0	11,7	12,5	20,8	21,7

48°

41°

41°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	1̄,82 126	0,25	1̄,87 446	0,20	1̄,94 681	0,42	0,05 319	0,42	30′
31	82 141	23	87 434	18	94 706	43	05 294	43	29
32	82 155	23	87 423	18	94 732	42	05 268	42	28
33	82 169	25	87 412	18	94 757	43	05 243	43	27
34	82 184	0,23	87 401	0,18	94 783	0,42	05 217	0,42	26
35	82 198	23	87 390	20	94 808	43	05 192	43	25
36	82 212	23	87 378	18	94 834	42	05 166	42	24
37	82 226	23	87 367	18	94 859	42	05 141	42	23
38	82 240	25	87 356	18	94 884	43	05 116	43	22
39	82 255	0,23	87 345	0,18	94 910	0,42	05 090	0,42	21
40′	1̄,82 269	23	1̄,87 334	20	1̄,94 935	43	0,05 065	43	20′
41	82 283	23	87 322	18	94 961	42	05 039	42	19
42	82 297	23	87 311	18	94 986	·43	05 014	43	18
43	82 311	25	87 300	20	95 012	42	04 988	42	17
44	82 326	0,23	87 288	0,18	95 037	0,42	04 963	0,42	16
45	82 340	23	87 277	18	95 062	·43	04 938	43	15
46	82 354	23	87 266	18	95 088	42	04 912	42	14
47	82 368	23	87 255	20	95 113	43	04 887	43	13
48	82 382	23	87 243	18	95 139	42	04 861	42	12
49	82 396	0,23	87 232	0,18	95 164	0,43	04 836	0,43	11
50′	1̄,82 410	23	1̄,87 221	20	1̄,95 190	42	0,04 810	42	10′
51	82 424	25	87 209	18	95 215	42	04 785	42	9
52	82 439	23	87 198	18	95 240	43	04 760	43	8
53	82 453	23	87 187	20	95 266	42	04 734	42	7
54	82 467	0,23	87 175	0,18	95 291	0,43	04 709	0,43	6
55	82 481	23	87 164	18	95 317	42	04 683	42	5
56	82 495	23	87 153	20	95 342	43	04 658	43	4
57	82 509	23	87 141	18	95 368	42	04 632	42	3
58	82 523	23	87 130	18	95 393	42	04 607	42	2
59	82 537	0,23	87 119	0,20	95 418	0,43	04 582	0,43	1
60′	1̄,82 551		1̄,87 107		1̄,95 444		0,04 556		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	48°

P. P.

d 1″	0,18	0,20	0,23	0,25	0,42	0,43
6″	1,1	1,2	1,4	1,5	2,5	2,6
7	1,3	1,4	1,6	1,8	2,9	3,0
8	1,5	1,6	1,9	2,0	3,3	3,5
9	1,7	1,8	2,1	2,3	3,8	3,9
10	1,8	2,0	2,3	2,5	4,2	4,3
20	3,7	4,0	4,7	5,0	8,3	8,7
30	5,5	6,0	7,0	7,5	12,5	13,0
40	7,3	8,0	9,3	10,0	16,7	17,3
50	9,2	10,0	11,7	12,5	20,8	21,7

48°

42°

42°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,82 551	0,23	$\overline{1}$,87 107	0,18	$\overline{1}$,95 444	0,42	0,04 556	0,42	60′
1	82 565	23	87 096	18	95 469	43	04 531	43	59
2	82 579	23	87 085	20	95 495	42	04 505	42	58
3	82 593	23	87 073	18	95 520	42	04 480	42	57
4	82 607	0,23	87 062	0,20	95 545	0,43	04 455	0,43	56
5	82 621	23	87 050	18	95 571	42	04 429	42	55
6	82 635	23	87 039	18	95 596	43	04 404	43	54
7	82 649	23	87 028	20	95 622	42	04 378	42	53
8	82 663	23	87 016	18	95 647	42	04 353	42	52
9	82 677	0,23	87 005	0,20	95 672	0,43	04 328	0,43	51
10′	$\overline{1}$,82 691	23	$\overline{1}$,86 993	18	$\overline{1}$,95 698	42	0,04 302	42	50′
11	82 705	23	86 982	20	95 723	42	04 277	42	49
12	82 719	23	86 970	18	95 748	43	04 252	43	48
13	82 733	23	86 959	20	95 774	42	04 226	42	47
14	82 747	0,23	86 947	0,18	95 799	0,43	04 201	0,43	46
15	82 761	23	86 936	20	95 825	42	04 175	42	45
16	82 775	22	86 924	18	95 850	42	04 150	42	44
17	82 788	23	86 913	18	95 875	43	04 125	43	43
18	82 802	23	86 902	20	95 901	42	04 099	42	42
19	82 816	0,23	86 890	0,18	95 926	0,43	04 074	0,43	41
20′	$\overline{1}$,82 830	23	$\overline{1}$,86 879	20	$\overline{1}$,95 952	42	0,04 048	42	40′
21	82 844	23	86 867	20	95 977	42	04 023	42	39
22	82 858	23	86 855	18	96 002	43	03 998	43	38
23	82 872	22	86 844	20	96 028	42	03 972	42	37
24	82 885	0,23	86 832	0,18	96 053	0,42	03 947	0,42	36
25	82 899	23	86 821	20	96 078	43	03 922	43	35
26	82 913	23	86 809	18	96 104	42	03 896	42	34
27	82 927	23	86 798	20	96 129	43	03 871	43	33
28	82 941	23	86 786	18	96 155	42	03 845	42	32
29	82 955	0,22	86 775	0,20	96 180	0,42	03 820	0,42	31
30′	$\overline{1}$,82 968		$\overline{1}$,86 763		$\overline{1}$,96 205		0,03 795		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	47°

P. P.

d 1″	0,18	0,20	0,22	0,23	0,42	0,43
6″	1,1	1,2	1,3	1,4	2,5	2,6
7	1,3	1,4	1,5	1,6	2,9	3,0
8	1,5	1,6	1,7	1,9	3,3	3,5
9	1,7	1,8	2,0	2,1	3,8	3,9
10	1,8	2,0	2,2	2,3	4,2	4,3
20	3,7	4,0	4,3	4,7	8,3	8,7
30	5,5	6,0	6,5	7,0	12,5	13,0
40	7,3	8,0	8,7	9,3	16,7	17,3
50	9,2	10,0	10,8	11,7	20,8	21,7

47°

42°

42°	lg sin	+d 1″	lg cos	—d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	—d 1″	
30′	$\overline{1}$,82 968	0,23	$\overline{1}$,86 763	0,18	$\overline{1}$,96 205	0,43	0,03 795	0,43	30′
31	82 982	23	86 752	20	96 231	42	03 769	42	29
32	82 996	23	86 740	20	96 256	42	03 744	42	28
33	83 010	22	86 728	18	96 281	43	03 719	43	27
34	83 023	0,23	86 717	0,20	96 307	0,42	03 693	0,42	26
35	83 037	23	86 705	18	96 332	42	03 668	42	25
36	83 051	23	86 694	20	96 357	43	03 643	43	24
37	83 065	22	86 682	20	96 383	42	03 617	42	23
38	83 078	23	86 670	18	96 408	42	03 592	42	22
39	83 092	0,23	86 659	0,20	96 433	0,43	03 567	0,43	21
40′	$\overline{1}$,83 106	23	$\overline{1}$,86 647	20	$\overline{1}$,96 459	42	0,03 541	42	20′
41	83 120	22	86 635	18	96 484	43	03 516	43	19
42	83 133	23	86 624	20	96 510	42	03 490	42	18
43	83 147	23	86 612	20	96 535	42	03 465	42	17
44	83 161	0,22	86 600	0,18	96 560	0,43	03 440	0,43	16
45	83 174	23	86 589	20	96 586	42	03 414	42	15
46	83 188	23	86 577	20	96 611	42	03 389	42	14
47	83 202	22	86 565	18	96 636	43	03 364	43	13
48	83 215	23	86 554	20	96 662	42	03 338	42	12
49	83 229	0,22	86 542	0,20	96 687	0,42	03 313	0,42	11
50′	$\overline{1}$,83 242	23	$\overline{1}$,86 530	20	$\overline{1}$,96 712	43	0,03 288	43	10′
51	83 256	23	86 518	18	96 738	42	03 262	42	9
52	83 270	22	86 507	20	96 763	42	03 237	42	8
53	83 283	23	86 495	20	96 788	43	03 212	43	7
54	83 297	0,22	86 483	0,18	96 814	0,42	03 186	0,42	6
55	83 310	23	86 472	20	96 839	42	03 161	42	5
56	83 324	23	86 460	20	96 864	43	03 136	43	4
57	83 338	22	86 448	20	96 890	42	03 110	42	3
58	83 351	23	86 436	18	96 915	42	03 085	42	2
59	83 365	0,22	86 425	0,20	96 940	0,43	03 060	0,43	1
60′	$\overline{1}$,83 378		$\overline{1}$,86 413		$\overline{1}$,96 966		0,03 034		0′
	lg cos	—d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	—d 1″	lg tg	+d 1″	47°

P. P.

d 1″	0,18	0,20	0,22	0,23	0,42	0,43
6″	1,1	1,2	1,3	1,4	2,5	2,6
7	1,3	1,4	1,5	1,6	2,9	3,0
8	1,5	1,6	1,7	1,9	3,3	3,5
9	1,7	1,8	2,0	2,1	3,8	3,9
10	1,8	2,0	2,2	2,3	4,2	4,3
20	3,7	4,0	4,3	4,7	8,3	8,7
30	5,5	6,0	6,5	7,0	12,5	13,0
40	7,3	8,0	8,7	9,3	16,7	17,3
50	9,2	10,0	10,8	11,7	20,8	21,7

47°

43°

43°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	1̄,83 378	0,23	1̄,86 413	0,20	1̄,96 966	0,42	0,03 034	0,42	60′
1	83 392	22	86 401	20	96 991	42	03 009	42	59
2	83 405	23	86 389	20	97 016	43	02 984	43	58
3	83 419	22	86 377	18	97 042	42	02 958	42	57
4	83 432	0,23	86 366	0,20	97 067	0,42	02 933	0,42	56
5	83 446	22	86 354	20	97 092	43	02 908	43	55
6	83 459	23	86 342	20	97 118	42	02 882	42	54
7	83 473	22	86 330	20	97 143	42	02 857	42	53
8	83 486	23	86 318	20	97 168	42	02 832	42	52
9	83 500	0,22	86 306	0,18	97 193	0,43	02 807	0,43	51
10′	1̄,83 513	23	1̄,86 295	20	1̄,97 219	42	0,02 781	42	50′
11	83 527	22	86 283	20	97 244	42	02 756	42	49
12	83 540	23	86 271	20	97 269	43	02 731	43	48
13	83 554	22	86 259	20	97 295	42	02 705	42	47
14	83 567	0,23	86 247	0,20	97 320	0,42	02 680	0,42	46
15	83 581	22	86 235	20	97 345	43	02 655	43	45
16	83 594	23	86 223	20	97 371	42	02 629	42	44
17	83 608	22	86 211	18	97 396	42	02 604	42	43
18	83 621	22	86 200	20	97 421	43	02 579	43	42
19	83 634	0,23	86 188	0,20	97 447	0,42	02 553	0,42	41
20′	1̄,83 648	22	1̄,86 176	20	1̄,97 472	42	0,02 528	42	40′
21	83 661	22	86 164	20	97 497	43	02 503	43	39
22	83 674	23	86 152	20	97 523	42	02 477	42	38
23	83 688	22	86 140	20	97 548	42	02 452	42	37
24	83 701	0,23	86 128	0,20	97 573	0,42	02 427	0,42	36
25	83 715	22	86 116	20	97 598	43	02 402	43	35
26	83 728	22	86 104	20	97 624	42	02 376	42	34
27	83 741	23	86 092	20	97 649	42	02 351	42	33
28	83 755	22	86 080	20	97 674	43	02 326	43	32
29	83 768	0,22	86 068	0,20	97 700	0,42	02 300	0,42	31
30′	1̄,83 781		1̄,86 056		1̄,97 725		0,02 275		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	46°

P. P.

d 1″	0,18	0,20	0,22	0,23	0,42	0,43
6″	1,1	1,2	1,3	1,4	2,5	2,6
7	1,3	1,4	1,5	1,6	2,9	3,0
8	1,5	1,6	1,7	1,9	3,3	3,5
9	1,6	1,8	2,0	2,1	3,8	3,9
10	1,8	2,0	2,2	2,3	4,2	4,3
20	3,7	4,0	4,3	4,7	8,3	8,7
30	5,5	6,0	6,5	7,0	12,5	13,0
40	7,3	8,0	8,7	9,3	16,7	17,3
50	9,2	10,0	10,8	11,7	20,8	21,7

46°

43°

43°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	1̅,83 781	0,23	1̅,86 056	0,20	1̅,97 725	0,42	0,02 275	0,42	30′
31	83 795	22	86 044	20	97 750	43	02 250	43	29
32	83 808	22	86 032	20	97 776	42	02 224	42	28
33	83 821	22	86 020	20	97 801	42	02 199	42	27
34	83 834	0,23	86 008	0,20	97 826	0,42	02 174	0,42	26
35	83 848	22	85 996	.20	97 851	43	02 149	43	25
36	83 861	22	85 984	20	97 877	42	02 123	42	24
37	83 874	22	85 972	20	97 902	42	02 098	42	23
38	83 887	23	85 960	20	97 927	43	02 073	43	22
39	83 901	0,22	85 948	0,20	97 953	0,42	02 047	0,42	21
40′	1̅,83 914	22	1̅,85 936	20	1̅,97 978	42	0,02 022	42	20′
41	83 927	22	85 924	20	98 003	43	01 997	43	19
42	83 940	23	85 912	20	98 029	42	01 971	42	18
43	83 954	22	85 900	20	98 054	42	01 946	42	17
44	83 967	0,22	85 888	0,20	98 079	0,42	01 921	0,42	16
45	83 980	22	85 876	20	98 104	43	01 896	43	15
46	83 993	22	85 864	22	98 130	42	01 870	42	14
47	84 006	23	85 851	20	98 155	42	01 845	42	13
48	84 020	22	85 839	20	98 180	43	01 820	43	12
49	84 033	0,22	85 827	0,20	98 206	0,42	01 794	0,42	11
50′	1̅,84 046	22	1̅,85 815	20	1̅,98 231	42	0,01 769	42	10′
51	84 059	22	85 803	20	98 256	42	01 744	42	9
52	84 072	22	85 791	20	98 281	43	01 719	43	8
53	84 085	22	85 779	22	98 307	42	01 693	42	7
54	84 098	0,23	85 766	0,20	98 332	0,42	01 668	0,42	6
55	84 112	22	85 754	20	98 357	43	01 643	43	5
56	84 125	22	85 742	20	98 383	42	01 617	42	4
57	84 138	22	85 730	20	98 408	42	01 592	42	3
58	84 151	22	85 718	20	98 433	42	01 567	42	2
59	84 164	0,22	85 706	0,22	98 458	0,43	01 542	0,43	1
60′	1̅,84 177		1̅,85 693		1̅,98 484		0,01 516		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	46°

P. P.

d 1″	0,20	0,22	0,23	0,42	0,43
6″	1,2	1,3	1,4	2,5	2,6
7	1,4	1,5	1,6	2,9	3,0
8	1,6	1,7	1,9	3,3	3,5
9	1,8	2,0	2,1	3,8	3,9
10	2,0	2,2	2,3	4,2	4,3
20	4,0	4,3	4,7	8,3	8,7
30	6,0	6,5	7,0	12,5	13,0
40	8,0	8,7	9,3	16,7	17,3
50	10,0	10,8	11,7	20,8	21,7

46°

44°

44°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
0′	$\overline{1}$,84 177	0,22	$\overline{1}$,85 693	0,20	$\overline{1}$,98 484	0,42	0,01 516	0,42	60′
1	84 190	22	85 681	20	98 509	42	01 491	42	59
2	84 203	22	85 669	20	98 534	43	01 466	43	58
3	84 216	22	85 657	20	98 560	42	01 440	42	57
4	84 229	0,22	85 645	0,22	98 585	0,42	01 415	0,42	56
5	84 242	22	85 632	20	98 610	42	01 390	42	55
6	84 255	23	85 620	20	98 635	43	01 365	43	54
7	84 269	22	85 608	20	98 661	42	01 339	42	53
8	84 282	22	85 596	22	98 686	42	01 314	42	52
9	84 295	0,22	85 583	0,20	98 711	0,43	01 289	0,43	51
10′	$\overline{1}$,84 308	22	$\overline{1}$,85 571	20	$\overline{1}$,98 737	42	0,01 263	42	50′
11	84 321	22	85 559	20	98 762	42	01 238	42	49
12	84 334	22	85 547	22	98 787	42	01 213	42	48
13	84 347	22	85 534	20	98 812	43	01 188	43	47
14	84 360	0,22	85 522	0,20	98 838	0,42	01 162	0,42	46
15	84 373	20	85 510	22	98 863	42	01 137	42	45
16	84 385	22	85 497	20	98 888	42	01 112	42	44
17	84 398	22	85 485	20	98 913	43	01 087	43	43
18	84 411	22	85 473	22	98 939	42	01 061	42	42
19	84 424	0,22	85 460	0,20	98 964	0,42	01 036	0,42	41
20′	$\overline{1}$,84 437	22	$\overline{1}$,85 448	20	$\overline{1}$,98 989	43	0,01 011	43	40′
21	84 450	22	85 436	22	99 015	42	00 985	42	39
22	84 463	22	85 423	20	99 040	42	00 960	42	38
23	84 476	22	85 411	20	99 065	42	00 935	42	37
24	84 489	0,22	85 399	0,22	99 090	0,43	00 910	0,43	36
25	84 502	22	85 386	20	99 116	42	00 884	42	35
26	84 515	22	85 374	22	99 141	42	00 859	42	34
27	84 528	20	85 361	20	99 166	42	00 834	42	33
28	84 540	22	85 349	20	99 191	43	00 809	43	32
29	84 553	0,22	85 337	0,22	99 217	0,42	00 783	0,42	31
30′	$\overline{1}$,84 566		$\overline{1}$,85 324		$\overline{1}$,99 242		0,00 758		30′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	45°

P. P.

d 1″	0,20	0,22	0,23	0,42	0,43
6″	1,2	1,3	1,4	2,5	2,6
7	1,4	1,5	1,6	2,9	3,0
8	1,6	1,7	1,9	3,3	3,5
9	1,8	2,0	2,1	3,8	3,9
10	2,0	2,2	2,3	4,2	4,3
20	4,0	4,3	4,7	8,3	8,7
30	6,0	6,5	7,0	12,5	13,0
40	8,0	8,7	9,3	16,7	17,3
50	10,0	10,8	11,7	20,8	21,7

45°

44°

44°	lg sin	+d 1″	lg cos	−d 1″	lg tg	+d 1″	lg cotg	−d 1″	
30′	$\overline{1}$,84 566	0,22	$\overline{1}$,85 324	0,20	$\overline{1}$,99 242	0,42	0,00 758	0,42	30
31	84 579	22	85 312	22	99 267	43	00 733	43	29
32	84 592	22	85 299	20	99 293	42	00 707	42	28
33	84 605	22	85 287	22	99 318	42	00 682	42	27
34	84 618	0,20	85 274	0,20	99 343	0,42	00 657	0,42	26
35	84 630	22	85 262	20	99 368	43	00 632	43	25
36	84 643	22	85 250	22	99 394	42	00 606	42	24
37	84 656	22	85 237	20	99 419	42	00 581	42	23
38	84 669	22	85 225	22	99 444	42	00 556	42	22
39	84 682	0,20	85 212	0,20	99 469	0,43	00 531	0,43	21
40′	$\overline{1}$,84 694	22	$\overline{1}$,85 200	22	$\overline{1}$,99 495	42	0,00 505	42	20′
41	84 707	22	85 187	20	99 520	42	00 480	42	19
42	84 720	22	85 175	22	99 545	42	00 455	42	18
43	84 733	20	85 162	20	99 570	43	00 430	43	17
44	84 745	0,22	85 150	0,22	99 596	0,42	00 404	0,42	16
45	84 758	22	85 137	20	99 621	42	00 379	42	15
46	84 771	22	85 125	22	99 646	43	00 354	43	14
47	84 784	20	85 112	20	99 672	42	00 328	42	13
48	84 796	22	85 100	22	99 697	42	00 303	42	12
49	84 809	0,22	85 087	0,22	99 722	0,42	00 278	0,42	11
50′	$\overline{1}$,84 822	22	$\overline{1}$,85 074	20	$\overline{1}$,99 747	43	0,00 253	43	10′
51	84 835	20	85 062	22	99 773	42	00 227	42	9
52	84 847	22	85 049	20	99 798	42	00 202	42	8
53	84 860	22	85 037	22	99 823	42	00 177	42	7
54	84 873	0,20	85 024	0,20	99 848	0,43	00 152	0,43	6
55	84 885	22	85 012	22	99 874	42	00 126	42	5
56	84 898	22	84 999	22	99 899	42	00 101	42	4
57	84 911	20	84 986	20	99 924	42	00 076	42	3
58	84 923	22	84 974	22	99 949	43	00 051	43	2
59	84 936	0,22	84 961	0,20	99 975	0,42	00 025	0,42	1
60′	$\overline{1}$,84 949		$\overline{1}$,84 949		0,00 000		0,00 000		0′
	lg cos	−d 1″	lg sin	+d 1″	lg cotg	−d 1″	lg tg	+d 1″	45°

P. P.

d 1″	0,20	0,22	0,42	0,43
6″	1,2	1,3	2,5	2,6
7	1,4	1,5	2,9	3,0
8	1,6	1,7	3,3	3,5
9	1,8	2,0	3,8	3,9
10	2,0	2,2	4,2	4,3
20	4,0	4,3	8,3	8,7
30	6,0	6,5	12,5	13,0
40	8,0	8,7	16,7	17,3
50	10,0	10,8	20,8	21,7

45°

Fizica 2



Notaţii

A — arie (suprafaţă), număr de masă (număr nucleonic).
a — acceleraţia mişcării rectilinii.
B — inducţia magnetică, strălucirea.
C — concentraţia, capacitatea calorică, capacitatea electrostatică.
°C — grade Celsius (centigrade).
c — căldura specifică (capacitatea calorică specifică), viteza luminii în vid.
D — coeficientul de difuzie.
d — simbolul deuteronului în fizica nucleară, distanţa, densitatea relativă a corpurilor solide.
E — densitatea de energie acustică, modulul de elasticitate (modulul lui Young), iluminarea, intensitatea cîmpului electric, tensiunea electromotoare.
e — sarcina electronului, simbolul electronului în fizica nucleară.
F — forţa, numărul lui Faraday.
f — frecvenţa oscilaţiilor.
G — greutatea unui corp în vid.
g — acceleraţia căderii libere (acceleraţia gravitaţiei).
g_n — valoarea normală a acceleraţiei căderii libere.
H — înălţimea barometrului, intensitatea cîmpului magnetic, componenta orizontală a magnetismului terestru.
h — constanta lui Planck.
I — intensitatea curentului, intensitatea luminii.
J — momentul de inerţie, echivalentul mecanic al caloriei,
K — coeficientul de transfer termic.
°K — grade absolute (grade Kelvin).
k — constanta lui Boltzmann.
L — lucrul mecanic, inductanţa, căldura latentă, cantitatea de iluminare.
l — lungimea, căldura latentă specifică.
M — masa moleculară.
M_A — masa atomică.
M_r — masa atomică relativă.
m — masa.
m_H — masa atomului de hidrogen.

m_n — masa neutronului.
m_p — masa protonului.
m_e — masa de repaus a electronului.
N — numărul lui Avogadro.
n — indicele de refracţie a luminii; simbolul neutronului în fizica nucleară.
P — greutatea unui corp în aer, puterea.
p — presiunea, simbolul protonului în fizica nucleară.
Q — cantitatea de căldură, cantitatea de lumină, energia reacţiilor nucleare.
q — sarcina electrică.
R — constanta gazelor perfecte, rezistenţa electrică, constanta lui Rydberg, radianţa.
r — rază, eroare probabilă a măsurărilor.
s — deplasare (drum) în mişcarea de translaţie.
S — entropia specifică, entropia, aria (suprafaţa).
T — Timp, perioadă, temperatura absolută.
$T_{\frac{1}{2}}$ — timpul de înjumătăţire prin dezintegrare al substanţelor radioactive.
t — timp, temperatura în scara Celsius.
U — diferenţa de potenţial electric (tensiunea electrică).
u — viteza moleculelor, mobilitatea ionilor.
$\bar{u}$ — viteza medie a mişcării moleculare.
V — volum, potenţial electric.
V_0 — volumul molar (volumul unei molecule-gram)
v — viteza în mişcarea rectilinie, volum specific.
W — energia.
Z — număr atomic (număr de ordine).
α — coeficientul de dilatare liniară a corpurilor, coeficientul de întindere (alungire), acceleraţia unghiulară, coeficientul de cedare termică, simbolul particulei α în fizica nucleară.
β — simbolul particulei β în fizica nucleară, coeficientul de compresie (contracţie) transversală.
γ — greutatea specifică, coeficientul de dilatare în volum.
δ — eroarea relativă a măsurărilor.
ε — eroarea absolută a măsurărilor.
η — coeficientul de frecare internă, viscozitate dinamică.
λ — coeficientul de conductivitate termică, lungimea de undă.
μ — coeficientul de contracţie transversală (coeficientul lui Poisson), permeabilitatea magnetică.
ν — frecvenţa oscilaţiilor, viscozitatea cinematică.
ρ — densitatea (masa specifică), rezistivitatea.
σ — coeficientul de tensiune superficială, eroarea medie pătratică a măsurărilor.
Φ — fluxul luminos.
φ — deplasarea unghiulară.
χ — susceptibilitatea magnetică.
ω — viteza unghiulară.

2.1
Mărimile fizice, dimensiunile și unitățile lor de măsură

§ 2.1. Sistemul metric de măsură și sistemele fundamentale de unități

Ca mărimi fundamentale în sistemul metric, elaborat la sfîrșitul secolului XVIII de o comisie de oameni de știință francezi, au fost alese *lungimea* L, *masa* M și *timpul* T, iar ca unități de măsură a acestor mărimi au fost alese *metrul*, *gramul* (apoi kilogramul) și *secunda*. În legătură cu aceste unități trebuie făcute următoarele observații.

1. Ca unitate fundamentală de lungime, numită *metru*, comisia franceză a hotărît să aleagă lungimea egală cu a zecea milioana parte din sfertul meridianului pămîntesc. Pe baza rezultatelor măsurărilor geodezice corespunzătoare s-a preparat din platină primul etalon al metrului, care a primit după aceea denumirea de *prototip de arhivă al metrului* sau *„metru de arhivă"*. Lungimea lui la 0°C s-a luat inițial egală cu 10^{-7} parte dintr-un sfert din meridianul pămîntesc, însă din cercetările ulterioare s-a văzut că lungimea metrului de arhivă este ceva mai mică decît această mărime, deși diferența este foarte mică.

2. Ca unitate fundamentală de masă, numită *gram*, comisia franceză a hotărît să ia masa apei pure (distilate), al cărei volum la 4°C (temperatura apei la densitate maximă) este egal cu un centimetru cub. Primul etalon al unității de masă, egal cu 1 000 g, făcut din platină, a primit denumirea de *kilogram*. Masa sa a fost luată egală cu masa apei pure, care are la 4°C volum egal cu 1 000 cm^3. Acest prim etalon al kilogramului a primit denumirea de *prototip de arhivă al kilogramului* sau *„kilogram internațional"*. Ulterior s-a constatat că kilogramul de arhivă are o masă ceva mai mare decît s-a presupus inițial; în prezent se consideră că kilogramul de arhivă corespunde unei mase de apă, care are la 4°C un volum egal cu 1 000,028 cm^3.

3. Unitatea fundamentală de timp, *secunda*, a fost definită de comisia franceză ca intervalul de timp egal cu $1/24 \cdot 60 \cdot 60$, adică 1/86400 din ziua solară medie.

În 1889 a fost convocată la Paris prima Conferință Generală de Măsuri și Greutăți, care a studiat problemele stabilirii definitive a unităților fundamentale de *lungime* (L), *masă* (M) și *timp* (T). Unitatea de timp *secunda* și definiția ei au fost lăsate fără modificări importante; în ceea ce privește unitățile pentru L și M, la conferință s-a hotărît să se aleagă ca unități fundamentale de lungime și masă, lungimea metrului de arhivă și masa kilogramului de arhivă, deși ele nu mai corespundeau definiției lor inițiale. Ulterior s-au făcut copii cît mai exacte ale modelelor metrului și kilogramului de arhivă. Ca material pentru copii s-a folosit un aliaj de 90% platină și 10% iridiu, care posedă o rigiditate suficientă, un coeficient mic de dilatare termică

şi o rezistenţă chimică foarte mare. Două din cele mai bune copii ale metrului şi kilogramului, adică exemplarele care corespund cel mai bine modelelor de arhivă, au fost predate la Biroul Internaţional de măsuri şi greutăţi, unde se păstrează ca etaloane internaţionale de unităţi de lungime şi masă; celelalte copii au fost distribuite statelor, care au participat la crearea Biroului Internaţional, şi servesc în fiecare stat ca etaloane naţionale de metru şi kilogram. Diferenţele foarte mici dintre diferitele copii-etalon, cercetate minuţios, au o importanţă foarte mică în condiţiile dezvoltării moderne a tehnicii şi a metodelor de măsură.

În 1960 a fost convocată cea de a 11-a Conferinţă Generală de Măsuri şi Greutăţi care a adoptat ca unic sistem de măsurare, sistemul bazat pe şase mărimi fundamentale şi anume: lungimea, masa, timpul, intensitatea curentului electric, temperatura termodinamică şi intensitatea luminoasă. Totodată s-a stabilit ca acest sistem să se numească Sistem Internaţional de unităţi de măsură, avînd prescurtarea internaţională SI, iar denumirile multiplilor şi submultiplilor să fie alcătuite cu ajutorul prefixelor. Conform H.C.M. 550 din 30.VIII.1961 şi STAS 737-62, SI este singurul sistem de unităţi de măsură legal şi obligatoriu în R.P.R. Unităţile sistemului SI sînt:

Metrul (m) este lungimea egală cu 1 650 763,73 lungimi de undă, în vid, ale radiaţiei care corespunde tranziţiei atomului de kripton 86 între nivelele sale $2\ p_{10}$ şi $5\ d_5$.

Kilogramul (kg) este masa „kilogramului internaţional", prototip de platină iridiată adoptat în 1889 de Conferinţa Generală de Măsuri şi Greutăţi şi păstrat la Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi de la Sèvres-Franţa.

Secunda (s) este fracţiunea 1/31556925,9747 din anul tropic pentru 1900 ianuarie 0, la orele 12 ale timpului efemeridelor[1]).

Amperul (A) este intensitatea unui curent electric constant, care menţinut în doi conductori paraleli, rectilinii, de lungime infinită şi de secţiune circulară neglijabilă, aşezaţi în vid la o distanţă de un metru unul de altul, ar produce între aceşti doi conductori o forţă egală cu $2 \cdot 10^{-7}$ kg · m · s^{-2} (newtoni) pe metru de lungime.

Gradul Kelvin (°K) este unitatea de măsură în scara termodinamică în care pentru punctul triplu al apei s-a atribuit valoarea numerică de 273,16.

Candela (cd) este intensitatea luminoasă, emisă în direcţie normală, la temperatura de solidificare a platinei şi presiunea atmosferică normală, de către suprafaţa unui radiator integral (corp negru) cu aria 1/600000 m^2.

Denumirile multiplilor şi submultiplilor unităţilor fundamentale se formează din denumirile acestora cu ajutorul unor prefixe. Aceste prefixe şi simbolurile lor sînt date în tabela 2.1 (vezi STAS 669-61).

Pentru unităţile derivate mai mari decît secunda s-au păstrat denumirile şi definiţiile vechi, corespunzătoare multiplului de 12: *minutul* (min), *ora* (h), *ziua* (d).

---

[1]) Definiţia anului tropic şi definiţia timpului efemeridelor sînt arătate în STAS 3331-62.

Tabela 2.1. **Prefixe şi simboluri**

Prefixe	Simboluri	Factorii cu care sînt înmulţite unităţile de referinţă		
pico	p	10^{-12}	sau	0,000 000 000 001
nano	n	10^{-9}	sau	0,000 000 001
micro	μ	10^{-6}	sau	0,000 001
mili	m	10^{-3}	sau	0,001
centi	c	10^{-2}	sau	0,01
deci	d	10^{-1}	sau	0,1
deca	da	10^{1}	sau	10
hecto	h	10^{2}	sau	100
kilo	k	10^{3}	sau	1 000
mega	M	10^{6}	sau	1 000 000
giga	G	10^{9}	sau	1 000 000 000
tera	T	10^{12}	sau	1 000 000 000 000

Sistemul metric de măsură a fost în prezent adoptat peste tot, însă în unele ţări, de exemplu în Anglia şi America, se folosesc unităţi de măsură vechi alături de cele metrice, în special în tehnică (vezi Anexele).

Sistemul metric de măsură a servit ca bază pentru elaborarea unor sisteme de unităţi, care se deosebesc atît prin mărimile unităţilor fundamentale cît şi uneori prin alegerea lor. Dintre aceste sisteme de unităţi, mai importante sînt trei. În două din ele, ca mărimi fundamentale sînt alese *lungimea* L, *masa* M şi *timpul* T. În al treilea sistem de unităţi, mărimile fundamentale sînt *lungimea* L, *forţa* F şi *timpul* T.

Primele două sisteme diferă între ele numai prin valorile unităţilor fundamentale; aceste două sisteme sînt:

a) Sistemul CGS care are unităţile fundamentale alese *centimetrul* (cm), *gramul* (g) şi *secunda* (s).

b) Sistemul MKS care are ca unităţi fundamentale alese *metrul* (m), *kilogramul* (kg) şi *secunda* (s); acest sistem, constituie o parte a sistemului SI.

În legătură cu această tabelă trebuie făcute următoarele observaţii:

1) Dimensiunile pătrate şi cubice în sistemul metric se notează obişnuit, adică cu puterile 2 şi 3 la simbolurile unităţilor respective, de exemplu, m^2 (metru pătrat), m^3 (metru cub) etc.

2) Nu toate prefixele sînt folosite în acelaşi mod, astfel: a) se obişnuieşte să se spună zece grame, o sută de grame în loc de un decagram, un hectogram; b) foarte rar se folosesc denumirile unor unităţi derivate ca decametru, hectometru etc.

3) Unele unităţi derivate au primit denumiri speciale, din care se formează uneori alte unităţi derivate cu ajutorul aceloraşi prefixe, astfel: a) volumul egal aproximativ cu 1 000 cm^3, sau 1 dm^3, se numeşte *litru* (l); *litrul* este unitatea fundamentală pentru volumul (capacitatea) vaselor şi formează un sistem propriu de unităţi derivate, de exemplu, *decalitru* (dal), *decilitru* (dl), *mililitru* (ml) etc.; b) 100 m^2

se notează cu un ar (1 a), de unde rezultă unitatea derivată cunoscută *hectarul* (1 ha) = 100 ar; c) 100 kg şi 1 000 kg se numesc respectiv *chintal* şi *tonă* etc.

4) Derivatele unităţii de timp, *secunda*, care sînt mai mici decît ea, se denumesc după principiul diviziunii zecimale, cu ajutorul prefixelor respective, de exemplu, *milisecunda* (ms), egală cu 10^{-3} s, *microsecunda* (µs), egală cu 10^{-6}s etc. Analog cu sistemul MKS de unităţi fundamentale este sistemul MTS în care unităţile sînt: metrul (m), tona (t) şi secunda (s).

În al treilea sistem de unităţi, ca unităţi fundamentale sînt alese: *metrul* (m), kilogramul-forţă (kgf) şi secunda (s). Acest sistem de unităţi se numeşte MKfS; el mai purta şi denumirea de *sistem tehnic*.

În tabela 2.2 sînt date măsurile fundamentale şi unităţile fundamentale ale acestor trei sisteme.

Tabela 2.2. **Mărimile şi unităţile fundamentale ale sistemelor CGS, MKS şi MKfS**

Sistemul	Mărimile fundamentale	Unităţile fundamentale	Notaţia
CGS	Lungimea L Masa M Timpul T	centimetrul gramul secunda	cm g s
MKS	Lungimea L Masa M Timpul T	metrul kilogramul secunda	m kg s
MKfS	Lungimea L Forţa F Timpul T	metrul kilogramul-forţă secunda	m kgf s

Astfel, numai unitatea de timp (s) este comună în toate cele trei sisteme. În ceea ce priveşte *formulele de dimensiuni*, în sistemele CGS şi MKS ele sînt aceleaşi, dar diferă de cele din sistemul MKfS.

§ 2.2. Analiza dimensională

Mărimile fizice sînt legate între ele prin relaţii, care reprezintă *legi ale fenomenelor fizice* caracterizate prin mărimile respective.

Legat de aceasta, în legile fizice nu pot fi adunaţi algebric decît termeni de acelaşi fel (cu aceeaşi dimensiune), respectiv nu pot fi egalaţi decît termeni de acelaşi fel.

Ca urmare directă, rezultă aşa-numitele *formule dimensionale* care se stabilesc pe baza legilor fizice şi care arată că unităţile de măsură dintr-o relaţie ce exprimă o anumită lege fizică sînt legate între ele.

Astfel spre exemplu în mecanică, formula bine cunoscută a lui Newton care exprimă legea căderii corpurilor, leagă mărimile fizice forţă, acceleraţie şi masă. Notînd forţa cu F, acceleraţia cu a şi masa cu m, formula se scrie

$$F = m \cdot a. \tag{2.1}$$

Formula dimensională este o ecuaţie convenţională, scrisă între paranteze drepte, care urmează formula ce reprezintă legea fizică şi care exprimă faptul că dimensiunile fiecărui termen al egalităţii (şi ale sumei atunci cînd este cazul) sînt egale

$$[F] = [m] \cdot [a]. \tag{2.2}$$

Ţinînd seama de faptul că mărimile au dimensiuni care sînt legate între ele, în fizică s-a urmărit unificarea cît mai completă a dimensiunilor, unificare care să cuprindă toate capitolele fizicii.

Această tendinţă, care reprezintă astăzi rezultatul evoluţiei istorice (§ 2.1), a dus la *dimensiuni fundamentale* (legate de mărimile fundamentale) la un sistem format din: L (lungime); M (masă), T (timp), Θ (temperatura termodinamică) I (intensitatea curentului electric) şi I′ (intensitatea luminoasă), restul dimensiunilor (legate de celelalte mărimi derivate) denumite *dimensiuni derivate* fiind obţinute din produsul primelor, ridicate fiecare la o anumită putere care poate fi întreagă sau fracţionară, pozitivă sau negativă sau egală cu zero.

Astfel, de exemplu, în relaţia (2.2) avînd

$$[a] = L^1M^0T^{-2}\ \Theta^0I^0I'^0 = L'T^{-2}, \tag{2.3}$$

rezultă

$$[F] = [m]\,[a] = L'M'T^{-2}I^0I'^0 = LMT^{-2}. \tag{2.4}$$

În mod asemănător, pornind de la legea schimbului de căldură, pentru căldura specifică c, raportată la unitatea de masă se poate scrie

$$c = \frac{W}{m \cdot \Delta\theta}, \tag{2.5}$$

unde W este energia (sau lucrul mecanic), cu dimensiunea

$$[W] = L^2M^1\ T^{-2}\ \Theta^0\ I^0\ I'^0 = L^2M\ T^{-2}. \tag{2.6}$$

m este masa, cu dimensiunea

$$[m] = L^0M^1T^0\ \Theta^0I^0\ I'^0 = M \tag{2.7}$$

şi $\Delta\theta$ diferenţa de temperatură, cu dimensiunea

$$[\Delta\theta] = L^0M^0T^0\ \Theta^1I^0I'^0 = \Theta. \tag{2.8}$$

Cu aceasta, în baza relaţiei (2.5), rezultă formula dimensională şi dimensiunea căldurii specifice

$$[c] = \frac{[W]}{[m][\Delta\theta]} = L^2M^0T^{-2}\Theta^{-1}I^0I'^0 = L^2T^{-2}\Theta^{-1}. \quad (2.9)$$

În electricitate legea lui Ohm dă rezistenţa electrică R pentru relaţia

$$R = \frac{\Delta U}{I}, \quad (2.10)$$

în care I este intensitatea curentului electric şi ΔU este căderea de tensiune, determinată în funcţie de puterea consumată P_c

$$\Delta U = \frac{P_c}{I}, \quad (2.11)$$

astfel încît

$$R = \frac{P_c}{I^2} = \frac{W}{I^2t}. \quad (2.12)$$

Dimensional, W este dat de relaţia (26), I este dat de

$$[I] = L^0M^0T^0\Theta^0I^1I'^0 = I \quad (2.13)$$

şi t de

$$[t] = L^0M^0T^1\Theta^0I^0I'^0 = t, \quad (2.14)$$

astfel încît, din (2.12) rezultă

$$[R] = \frac{[W]}{[I^2][t]} = L^2M^1T^{-3}\Theta^0I^{-2}I'^0 = L^2MT^{-3}I^{-2}. \quad (2.15)$$

Tot astfel în optică legea care dă fluxul luminos Φ este

$$\Phi = I' \cdot \omega, \quad (2.16)$$

în care I' este intensitatea de radiaţie, iar ω unghiul solid în care se măsoară fluxul.

Cunoscînd că ω unghiul solid este fără dimensiuni:

$$[\omega] = L^0M^0T^0\Theta^0I^0I'^0, \quad (2.17)$$

rezultă pentru fluxul luminos:

$$[\Phi] = [I'] = L^0M^0T^0\Theta^0I^0I'^1 = I'. \quad (2.18)$$

Revenind în urma exemplelor date la partea generală, se arată că *pentru mărimile fundamentale se pot alege unităţi de măsură absolut arbitrare*, fără ca aceasta să afecteze în vreun fel scrierea legilor fizice, în formulele matematice.

În această situație însă mărimile derivate au unități de măsură determinate, schimbarea unităților de măsură necesitînd introducerea în formulele care reprezintă legile fizice ale unor coeficienți dimensionali, care fac aceste formule omogene, adică fac termenii acestor formule echidimensionali, necesitate despre care s-a vorbit la începutul acestui paragraf.

Urmărind cele arătate înainte rezultă necesitatea introducerii într-un sistem de unități de măsură, a definirii unităților care pot fi alese arbitrar. Astfel în sistemul SI după cum s-a arătat în § 2.1 s-au definit unitățile metrice (pentru lungime), kilogramul (pentru masă), secunda (pentru timp), gradul Kelvin sau absolut (pentru temperatură), amperul (pentru intensitatea electrică) și candela (pentru intensitatea luminoasă).

Analiza dimensională se bazează pe faptul că legile fizice sînt exprimate prin formule matematice care au termenii echidimensionali.

Ea are la bază trei axiome și anume:

— valoarea numerică n, a unei mărimi fizice A, este egală cu raportul dintre mărime și unitatea ei de măsură a:

$$A = n\ a; \tag{2.19}$$

— mărimea fizică A nu depinde de unitatea ei de măsură a;

— formulele care reprezintă legi fizice, compuse din valori numerice și anumite mărimi fizice, sînt independente de unitățile alese pentru mărimile fizice fundamentale.

Din cele arătate înainte, rezultă că într-o formulă matematică ce reprezintă legea unui anumit fenomen fizic, pot fi luate cel mult șase mărimi fundamentale. Se observă că nu este obligatoriu ca cele șase mărimi să fie cele considerate anterior (L,M,T, Θ,I,I′) condiția fiind însă ca acele mărimi care au fost alese ca fundamentale să fie independente între ele.

Determinarea numărului de mărimi fundamentale într-o formulă se face luînd fiecare mărime componentă a acesteia și scriindu-i ecuația dimensională în funcție de cele șase mărimi indicate înainte. Numărul de mărimi diferite care intervin în toate ecuațiile dimensionale, reprezintă numărul de mărimi fundamentale care pot fi alese în ecuația respectivă.

Evident că avînd la mărimi fundamentale și $n - k$ mărimi derivate într-o formulă ce reprezintă o anumită lege fizică, se pot realiza $n - k$ complexe adimensionale (denumite *criterii*) sub formă de produse la anumite puteri, care determină o anumită formă sub care poate fi scrisă formula respectivă. Aceasta reprezintă *legea de bază a analizei dimensionale care este denumită legea produselor*.

Această lege a analizei dimensionale dă posibilitatea de a se deduce o anumită lege fizică atunci cînd se cunosc mărimile fizice care intervin în legea respectivă.

Folosirea ei este extrem de convenabilă atunci cînd

$$n - k = 1; \tag{2.20}$$

n fiind numărul total de mărimi care intră în legea fizică și k numărul mărimilor fundamentale așa cum s-a arătat înainte. În această situație

numărul criteriilor adimensionale care intră în formulă este egal cu $n - k = 1$, astfel încît notînd acest criteriu cu Π, formula este de forma

$$\Pi = \text{const}, \tag{2.21}$$

constanta fiind determinată experimental, iar criteriul Π determinat pe baza analizei dimensionale în forma arătată înainte, astfel încît el să nu aibă dimensiuni.

De exemplu, folosind analiza dimensională se va determina legea gazelor perfecte, în care mărimile conținute sînt: presiunea $\left(p = \frac{F}{A}\right)$, volumul (V), masa (m), constanta caracteristică a gazului perfect $\left(R = \frac{W}{m\theta}\right)$ și temperatura absolută (T).

Dimensiunile acestor mărimi sînt

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{L'M'T^{-2}\Theta^{0}I^{0}I'^{0}}{L^{2}M^{0}T^{0}\Theta^{0}I^{0}I'^{0}} = L^{-1}M'T^{-2}\Theta^{0}I^{0}I'^{0} = L^{-1}MT^{-2}; \tag{2.22}$$

$$[V] = L^{3}M^{0}T^{0}\Theta^{0}I^{0}I'^{0} = L^{3}; \tag{2.23}$$

$$[m] = L^{0}M'T^{0}\Theta^{0}I^{0}I'^{0} = M; \tag{2.24}$$

$$[R] = \frac{[W]}{[m][\theta]} = \frac{L^{2}M^{1}T^{-2}\Theta^{0}I^{0}I'^{0}}{(L^{0}M^{1}T^{0}\Theta^{0}I^{0}I'^{0})(L^{0}M^{0}T^{0}\Theta^{1}I^{0}I'^{0})} =$$
$$= L^{2}M^{0}T^{-2}\Theta^{-1}I^{0}I'^{0} = L^{2}T^{-2}\Theta^{-1}; \tag{2.25}$$

$$T = L^{0}M^{0}T^{0}\Theta'I^{0}I'^{0} = \Theta. \tag{2.26}$$

Din relațiile (2.22) — (2.26) se vede că numărul mărimilor fundamentale (în partea dreaptă a ecuațiilor) este $k = 4$:L,M,T și Θ. Numărul total al mărimilor fiind $n = 5$ rezultă că $n = 5 - 4 = 1$, deci formula care reprezintă legea fizică are un singur termen adimensional, fiind de forma (2.21).

Pentru determinarea criteriului se folosește analiza dimensională ținîndu-se seama de (2.22) — (2.26).

$$[\Pi] = [p]^{\alpha}[V]^{\beta}[M]^{\gamma}[R]^{\delta}[T]^{\varepsilon} =$$
$$= L^{-\alpha}M^{\alpha}T^{-2\alpha}\cdot L^{3\beta}\cdot M^{\gamma}\cdot L^{2\delta}T^{-2\delta}\Theta^{-\delta}\Theta^{\varepsilon} =$$
$$= L^{-\alpha+3\beta+2\delta}M^{\alpha+\gamma}\cdot T^{-2\alpha-2\delta}\cdot\Theta^{-\delta+\varepsilon}, \tag{2.27}$$

din care Π fiind adimensional (criteriu), rezultă că puterile dimensiunilor din partea din dreapta a relației (2.27) sînt nule

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta + 2\delta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\delta = 0 \\ -\delta + \varepsilon = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

de unde din rezolvarea sistemului, la alegerea lui α egal cu unitatea, rezultă

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1, \delta = -1, \varepsilon = -1. \quad (2.29)$$

Revenind la relaţia lui Π se va scrie

$$\Pi = p'V'M^{-1}R^{-1}T^{-1} = \frac{pV}{MRT} = \text{const}, \quad (2.30)$$

determinîndu-se constanta pe cale experimentală.

În cazul acestei legi denumită şi legea Mendeleev-Clapeyron, constanta este egală cu unitatea şi astfel rezultă binecunoscuta lege a gazelor perfecte

$$pV = MRT, \quad (2.31)$$

sau încă:

$$pV_0 = RT. \quad (2.32)$$

De observat că în fizică m, masa are obişnuit ca unitate de măsură molul, astfel încît volumul specific determinat de relaţia (2.32) $V_0 = \frac{V}{M}$ cum şi constanta caracteristică R sînt raportate la 1 mol.

O altă aplicaţie directă a analizei dimensionale în fizică este stabilirea legăturii dintre unităţile de măsură în acelaşi sistem şi în diferite sisteme de unităţi de măsură.

Astfel, conform axiomelor analizei dimensionale, scriind că mărimea fizică A este independentă de sistemul de unităţi de măsură

$$A = n_1 a_1, \quad (2.33)$$

$$A = n_2 a_2, \quad (2.34)$$

rezultă prin identificare

$$a_2 = \frac{n_1}{n_2} a_1, \text{ sau } n_2 = n_1 \frac{a_1}{a_2}, \quad (2.35)$$

relaţie aplicabilă în acelaşi sistem de unităţi de măsură sau în sisteme diferite.

Ca exemplu se va urmări legătura dintre unităţile de măsură pentru energie în sistemul SI şi sistemul MKfS, respectiv dintre J (Joule) şi kgfm (kilogram forţă metru).

Folosind dimensiunile fundamentale L,M,T,Θ,I,I' şi L,F,T,Θ,I,I', vom scrie

$$[W] = \mathrm{L^2M^1T^{-2}\,\Theta^0I^0I'^0} = \mathrm{L^2MT^{-2}}, \quad (2.36)$$

$$[W] = \mathrm{L^1F^1T^0\,\Theta^0I^0I'^0} = \mathrm{LF}. \quad (2.37)$$

Din aceasta folosind definiţia pentru 1 J, ca fiind lucrul mecanic efectuat de o forţă de 1 N (Newton), pe o distanţă de 1 m în direcţia şi sensul ei

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2\ s^{-2}} = 1\ \mathrm{Nm} \quad (2.38)$$

și definiția pentru 1 kgf, ca fiind forța cu care acționează gravitația asupra unei mase de 1 kg considerîndu-se accelerația căderii libere normală, $g_n = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$$1\ \mathrm{kgf} = \mathrm{m} \cdot g_n = 9{,}81\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}} = 9 \cdot 81\ \mathrm{N}, \qquad (2.39)$$

rezultă

$$1\ \mathrm{kfgm} = 1\ \mathrm{kgf} \times 1\ \mathrm{m} = 9{,}81\ \mathrm{Nm} = 9{,}81\ \mathrm{J}, \qquad (2.40)$$

respectiv

$$1\ \mathrm{J} = \frac{1}{9{,}81}\ \mathrm{kgfm}. \qquad (2.41)$$

Tot ca aplicație directă a analizei dimensionale este verificarea calitativă a corectitudinii formulelor, care reprezintă legi fizice. Astfel, dacă o astfel de formulă nu are termenii echidimensionali, ea nu este corectă, reciproca nefiind valabilă totdeauna și anume nu este suficient ca o formulă care reprezintă o lege fizică să aibă termenii echidimensionali pentru a fi corectă.

În încheiere este de menționat că deși analiza dimensională, dă posibilitatea de a deduce foarte simplu legi ale anumitor fenomene fizice, fără a recurge la operații matematice complicate, în acest domeniu ea poate duce la concluzii greșite dacă nu se ține seama de următoarele:

— omisiuni în alegerea mărimilor fizice determinante, falsifică rezultatele;

— mărimile echidimensionale pot fi determinate cu greu în aplicarea analizei dimensionale;

— mărimile adimensionale, ies de sub controlul analizei dimensionale;

— mărimile introduse, care nu apar în fenomenul urmărit, falsifică rezultatele.

Ținînd seama de aceasta și de faptul că în cazul în care numărul criteriilor este mare analiza dimensională nu dă rezultate, în fizică se preferă, aplicarea unor metode mult mai complicate atît în ceea ce privește fundamentarea cît și aplicarea practică, anume metodele similitudinii și analogiilor.

§ 2.3. Sistemul SI și trecerea de la un sistem de unități la altul

Sistemul de unități cel mai des folosit în fizică era sistemul CGS. Însă în 1960, cea de a 11-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți a adoptat Sistemul Internațional de unități de măsură SI care, prin H.C.M. nr. 550 din 30.VIII.1961, a fost adoptat și la noi (STAS 737-62). Drept urmare, toate celelalte sisteme de unități de măsură vor trebui să dispară, termenele limită de folosire fiind stabilite prin instrucțiuni ale Direcției Generale pentru Metrologie, Standarde și Invenții.

Unităţile fundamentale ale sistemului SI au fost menţionate anterior (metrul, kilogramul, secunda, amperul, gradul Kelvin şi candela). Unităţile multipli şi submultipli ai unităţilor sistemului SI se notează cu ajutorul prefixelor date în tabela 2.1.

În fizică întîlnim foarte des mărimi avînd valori extrem de mici, cum sînt de exemplu lungimile de undă ale radiaţiilor luminoase şi Röntgen, masele atomilor şi moleculelor etc. Pentru a măsura aceste mărimi avînd valori atît de mici, sînt necesare unităţi submultipli foarte mici pentru care se folosesc de exemplu prefixele mano şi pico (vezi tabela 2.3). Totuşi aceste prefixe nu se folosesc prea des, deoarece au mai fost introduse cîteva unităţi speciale, cu denumiri speciale, care au fost adoptate pe plan internaţional şi anume:

a) Pentru măsurarea lungimilor foarte mici se folosesc unităţile menţionate în tabela 2.3.

Tabela 2.3. **Unităţi pentru măsurarea lungimilor mici**

Denumirea	Simbol	Valoarea în metri
Micron	μ	10^{-6}
Nanometru (Milimicron)	nm ($m\mu$)	10^{-9}
Ångström	Å	10^{-10}
Picometru (Micromicron)	pm ($\mu\mu$)	10^{-12}
Unitate X	X	10^{-13}

b) Pentru măsurarea maselor foarte mici se foloseşte microgramul (10^{-6} g) care se mai numeşte gamma şi se notează cu simbolul γ. De aici s-a ajuns la alte două unităţi derivate: miligamma ($m\gamma$), uneori $\gamma\gamma$, $= 10^{-9}$ g) şi microgamma ($\mu\gamma$, uneori $\gamma\gamma\gamma$, $= 10^{-12}$ g).

Foarte răspîndit este şi un alt fel de scriere a valorilor mărimilor foarte mici; astfel de valori se scriu în unităţile fundamentale ale sistemului SI, înmulţite cu factorul 10 la o putere negativă corespunzătoare. Astfel, în loc de 1 Å se scrie 10^{-10} m; masa atomului de hidrogen se scrie $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg; constanta lui Plank, h se scrie $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s etc.

Acest fel de scriere se foloseşte şi în cazul mărimilor cu valori foarte mari, mărimi întîlnite adesea în fizică. În acest caz intervine factorul 10 la o putere pozitivă corespunzătoare. Astfel, pentru viteza luminii în vid se ia valoarea aproximativă $3 \cdot 10^{8}$ m/s; numărul de molecule dintr-un centimetru cub de gaz, în condiţii normale, se ia egal cu $2{,}687 \cdot 10^{19}$ etc.

Mai înainte am menţionat că la 4 °C, o masă de apă egală cu 1 kg are un volum de 1000,028 cm³. De aici rezultă că la 4°C masa de apă aflată într-un volum de 1000 cm³ = 1 dm³ este mai mică decît 1 kg: ea se ia egală cu 0,999972 kg. Deoarece volumul de un litru este volumul ocupat de 1 kg de apă la 4 °C, rezultă că un litru nu este riguros egal cu 1000 cm³ = 1 dm³, aşa cum se consideră de obicei, ci este de

1000,028 cm³ = 1,000028 dm³. Tot astfel la 4°C, masa apei dintr-un volum de 1 cm³ nu este riguros egală cu 1 g, ci cu 0,999972 g. Diferența dintre litru și decimetru cub (sau dintre gram și masa unui centimetru cub de apă la 4°C) este atît de mică încît nu prezintă importanță în lucrările de laborator obișnuite, însă la măsurări foarte precise, de exemplu în cazul în care eroarea relativă a rezultatului nu trebuie să depășească 0,01%, această diferență trebuie luată în considerare.

Sistemul SI se folosește în toate domeniile (inclusiv în fizică). Uneori, însă, trebuie să recurgem și la alte sisteme, sau trebuie să introducem alte unități. La o astfel de trecere de la un sistem de unități la altul se aplică reguli speciale, care pot fi explicate în modul următor. Formula dimensională a unei anumite mărimi fizice derivate A, poate fi scrisă în general astfel:

$$[A] = L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}\Theta^{\delta}I^{\varepsilon}I'^{\eta} \qquad (2.42)$$

unde L, M, T Θ, I, I' (lungimea, masa, timpul, temperatura, intensitatea de curent electric, intensitatea luminoasă) sînt considerate unități fundamentale ale sistemului dat, iar exponenții $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ și η sînt numere întregi sau fracționare, pozitive sau negative.

Orice altă mărime A_1, omogenă cu A, are aceeași dimensiune, adică aceleași puteri $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ și η în partea dreaptă a expresiei (2.42). Notînd raportul dintre A_1 și A cu litera n, se poate scrie

$$A_1 = nA = n(L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}\Theta^{\delta}I^{\varepsilon}I'^{\eta}).$$

În această expresie se poate considera mărimea A ca unitate de măsură a mărimii A_1, iar n — rezultatul numeric al unei astfel de măsurări.

Să presupunem că în locul unităților fundamentale de mai înainte L,M,Θ,I și I', introducem unități fundamentale noi L_1,M_1,T_1,Θ_1,I_1 și I'_1, raportul lor față de unitățile anterioare îl vom nota respectiv cu x,y,z,u,v și w adică

$$\frac{L_1}{L} = x, \quad \frac{M_1}{M} = y, \frac{T_1}{T} = z, \quad \frac{\Theta_1}{\Theta} = u, \quad \frac{I_1}{I} = v, \quad \frac{I'_1}{I'} = w. \qquad (2.43)$$

Evident că unitatea anterioară (A) de măsură a mărimii A_1 va fi înlocuită printr-o nouă unitate (A') și, respectiv, rezultatul anterior n al măsurărilor printr-un nou rezultat n'.

Deoarece unitatea nouă A' servește la măsurarea aceleiași mărimi A_1 și se obține în urma trecerii la noile unități L_1,M_1,T_1,Θ_1,I_1 și I'_1, putem scrie

$$(A') = L_1^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}\Theta_1^{\delta}I_1^{\varepsilon}I_1'^{\eta}.$$

De aici, pe baza ecuațiilor (2.42) și (2.43), rezultă

$$A' = x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}u^{\delta}v^{\varepsilon}w^{\eta}\,(L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}\Theta^{\delta}I^{\varepsilon}I_1^{\gamma}) = x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}u^{\delta}w^{\eta}(A). \qquad (2.44)$$

Astfel, trecînd la noile unități fundamentale ale sistemului, *noua unitate a unei mărimi derivate oarecare este egală cu unitatea veche, înmulțită cu expresia dimensională a mărimii date, în care în locul*

unităţilor fundamentale ale sistemului trebuie introduse raporturile noilor unităţi fundamentale faţă de cele vechi.

Tot astfel, pe baza ecuaţiilor (2.35) şi (2.44), rezultă

$$\frac{n'}{n} = \frac{A}{A'} = \frac{A}{A_x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} u^{\delta} v^{\varepsilon} w^{\eta}} = \frac{1}{x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} u^{\delta} v^{\varepsilon} w^{\eta}},$$

de unde se obţine

$$n' = \frac{n}{x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} u^{\delta} v^{\varepsilon} w^{\eta}}, \qquad (2.45)$$

adică trecînd la noi unităţi fundamentale ale sistemului, reuzltatul măsurării unei mărimi derivate oarecare cu noua unitate, este egal cu *rezultatul măsurărilor ei cu unitatea veche, împărţit la expresia dimensională a mărimii date, în care în locul unităţilor fundamentale ale sistemului trebuie să se pună raportul noilor unităţi fundamentale faţă de cele vechi.*

Aceste reguli pot fi, desigur, aplicate şi la trecerea de la un sistem de unităţi la altul, deoarece o astfel de trecere poate fi considerată ca o înlocuire într-un sistem al unităţilor fundamentale vechi prin unităţi noi, luate din celălalt sistem.

Să considerăm cîteva exemple.

Exemplul 2.1. Să se găsească raportul dintre unitatea de forţă în sistemul MTS folosit înainte (stenă) şi unitatea de forţă din sistemul SI newton. Vom considera această problemă ca o substituire a unităţilor fundamentale ale sistemului SI prin noile unităţi (metru, tonă, secundă), luate din sistemul MTS.

Se calculează rapoartele unităţilor fundamentale ale celor două sisteme, adică valorile x, y şi z din ecuaţiile (2.43), x şi z fiind egale evident, cu unitatea, deoarece unitatea de lungime şi respectiv de timp în ambele sisteme coincid

$$x = \frac{1\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}} = 1, \quad y = \frac{1\ \mathrm{t}}{1\ \mathrm{kg}} = 10^3, \quad z = \frac{1\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{s}} = 1.$$

Pe baza ecuaţiei (2.44), presupunînd că

$$A' = 1\ \mathrm{sn}\ \text{şi}\ A = 1\ \mathrm{N}$$

şi aplicînd formula (2.4), se obţine

$$1\ \mathrm{sn} = 1^1 \cdot 10^3 \cdot 1^{-2}\ \mathrm{N}\ \text{sau}\ 1\ \mathrm{sn} = 10^3\ \mathrm{N}.$$

Această relaţie trebuie folosită, conform formulei (2.45), în cazurile cînd rezultatul unei măsurări, dat în stene, trebuie recalculat în newtoni sau invers.

***Exemplul 2.2.* Să se găsească raportul dintre unitatea de lucru mecanic din sistemul MKfS (kilogram forţă metru) şi unitatea de lucru mecanic din sistemul SI (Joule). Deoarece unitatea de lungime şi respectiv de timp în ambele sisteme este aceeaşi, adică $x = 1$ şi**

respectiv $z = 1$, problema aceasta poate fi considerată ca înlocuirea unităţii fundamentale din sistemul SI, kilogram, prin unitatea nouă, kilogramforţă-secundă la pătrat pe metru (egală cu 9,81 kg).

Să determinăm valoarea lui y

$$y = \frac{9,81\ \text{kg}}{1\ \text{kg}} = 9,81.$$

Pe baza ecuaţiei (2.44), punînd în ea

$$A' = 1\ \text{kgf}\cdot\text{m și } A = 1\ \text{J}$$

şi aplicînd formula (2.6) se obţine

$$1\ \text{kgf}\cdot\text{m} = 1^2\cdot 9,81\cdot 1^{-2}\ \text{J} = 9,81\ \text{J}.$$

Exemplul 2.3. Să se găsească raportul dintre unităţile de presiune în sistemul MKfS şi SI. Presiunea se defineşte ca forţa raportată la unitatea de suprafaţă,

$$p = \frac{F}{S}.$$

De aici se obţin dimensiunile presiunii în sistemul SI

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \text{L}^{-1}\,\text{MT}^{-2}.$$

Unitatea de presiune a acestui sistem este $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$; unitatea de presiune în sistemul MKfS, este $\text{kgf}\cdot\text{m}^{-2}$. Problema pusă poate fi considerată ca substituţia unităţii fundamentale a sistemului SI kilogram, prin noua unitate kilogram forţă-secundă la pătrat pe metru; raportul acestor unităţi a fost calculat mai înainte. De aceea, punînd în ecuaţia (2.45),

$$A' = 1\ \text{kgf}\cdot\text{m}^{-2}\ \text{și}\ A = 1\ \text{N}\cdot\text{m}^{-2}$$

şi ţinînd seama de formula (2.44), obţinem

$$1\ \text{kgf}\cdot\text{m}^{-2} = 1^{-1}\cdot 9,81\cdot 1^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m}^2 = 9,81\ \text{N}\cdot\text{m}^2.$$

§ 2.4. Mărimi mecanice şi acustice, dimensiunile şi unităţile de măsură

În tabela 2.4 sînt date denumirile mărimilor fundamentale mecanice şi acustice, notaţiile lor şi formulele de definiţie, dimensiunile mărimilor mecanice în sistemele SI, CGS şi MKfS şi ale celor acustice în sistemele SI şi CGS, precum şi unităţile de măsură ale mărimilor în sistemul SI.

Tabela 2.4. **Mărimi şi unităţi mecanice şi acustice**

Denumirea	Notaţii şi formule	Dimensiuni în sistemele SI şi CGS	Dimensiuni în sistemul MKfS	Unităţi în sistemul SI
Lungime	l	L	L	m
Spaţiu (drum)	s	L	L	m
Deplasare unghiulară	φ	Dimensiunea zero		rad
Masă	m	M	$L^{-1}FT^2$	kg
Timp	t	T	T	s
Suprafaţă	$A, S = l^2$	L^2	L^2	m^2
Volum	$V = l^3$	L^3	L^3	m^3
Viteză[1])	$v = \frac{s}{t}$	LT^{-1}	LT^{-1}	m/s
Viteză unghiulară	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	T^{-1}	T^{-1}	rad/s
Acceleraţie	$a = \frac{v}{t}$	LT^{-2}	LT^{-2}	m/s^2
Acceleraţie unghiulară	$\alpha = \frac{\omega}{t}$	T^{-2}	T^{-2}	rad/s^2
Moment de inerţie	$J = \Sigma m_i r_i^2$	L^2M	LFT^2	$kg \cdot m^2$
Forţă[2])	$F = ma$	LMT^{-2}	F	N(newton)
Momentul unei forţe	$M = Fl$	L^2MT^{-2}	LF	N·m
Presiune[3])	$p = \frac{F}{S}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	N/m^2
Lucru mecanic[4])	$L = F \cdot l$	L^2MT^{-2}	LF	J(joule)
Energie	$W = \frac{mv^2}{2}$	L^2MT^{-2}	LF	J
Putere[5])	$P = \frac{W}{t}$	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}	W(watt)
Densitate	$\rho = \frac{m}{v}$	$L^{-3}M$	$L^{-4}FT^2$	kg/m^3
Volum specific	$v = \frac{V}{m}$	L^3M^{-1}	$L^4F^{-1}T^{-2}$	m^3/kg
Greutate (în vid)	$G = mg$	LMT^{-2}	F	N
Greutate specifică	$\gamma = \frac{G}{V}$	$L^{-2}MT^{-2}$	$L^{-3}F$	N/m^3

Tabela 2.4. (*continuare*)

Denumirea	Notații și formule	Dimensiuni în sistemele SI și CGS	Dimensiuni în sistemul MKfS	Unități în sistemul SI
Efort unitar normal tensiune normală	$\sigma = \frac{F_n}{S}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	N/m^2
Efort unitar tangențial (tensiune tangențială)	$\tau = \frac{F_t}{S}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	N/m^2
Coeficient de întindere (alungire)	$\alpha = \frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{l}$	$LM^{-1}T^2$	L^2F^{-1}	m^2/N
Coeficient de compresiune (contracție) transversală	$\beta = \frac{1}{\sigma}\frac{\Delta d}{d}$	$LM^{-1}T^2$	L^2F^{-1}	m^2/N
Coeficientul lui Poisson	$\mu = \frac{\beta}{\alpha}$	dimensiunea zero		
Modul de elasticitate (modulul lui Young)	$E = \frac{1}{\alpha}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	N/m^2
Modul de elasticitate transversal	$G = \frac{\tau}{\varphi}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	N/m^2
Frecvența oscilațiilor acustice	$\nu, f = \frac{n}{t} = \frac{1}{T}$	T^{-1}		Hz(hertz)
Perioada oscilațiilor	$T = \frac{t}{n} = \frac{1}{f}$	T		s
Densitate de energie acustică	$E = \frac{W}{V}$	$L^{-1}MT^{-2}$		J/m^3
Presiune acustică	$p = \frac{F}{S}$	$L^{-1}MT^{-2}$		N/m^2
Intensitatea acustică	$I = \frac{W}{St}$	MT^{-3}		W/m^2

Note la tabela 2.4. 1) Viteza v se exprimă în practică în diferite unități, de exemplu în cm/s, m/s, m/min, km/h etc. La trecerea de la unele unități la altele putem folosi următoarele relații (aproximative):

1 cm/s = 0,01 m/s = 0,6 m/min = 0,036 km/h,
1 m/s = 60 m/min = 3,6 km/h = 100 cm/s,
1 m/min = 0,06 km/h = 1,67 cm/s = 0,0167 m/s,
1 km/h = 27,78 cm/s = 0,2778 m/s = 16,67 m/min.

Viteza unghiulară ω se exprimă de asemenea în diferite unităţi, de exemplu în radiani pe secundă, grade pe secundă, rotaţii pe minut etc.

Pentru trecerea de la unele unităţi la altele se pot folosi următoarele relaţii aproximative:

$$1 \text{ rad/s} = 57°,296/\text{s} = 9,5493 \text{ rot/min},$$

$$1°/\text{s} = 0,01745 \text{ rad/s} = 0,1667 \text{ rot/min},$$

$$1 \text{ rot/min} = 6°/\text{s} = 0,1047 \text{ rad/s}.$$

2) Unităţile de forţă cele mai des întîlnite sînt: newtonul (N) în sistemul SI, dina (dyn) (în sistemul CGS) şi kilogramulforţă (kgf) (în sistemul MKfS). Pentru trecerea de la o unitate de forţă la alta, se pot folosi următoarele relaţii (aproximative):

$$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N} = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ kgf},$$

$$1 \text{ N} = 0,102 \text{ kgf} = 10^{5} \text{ dyn},$$

$$1 \text{ kgf} = 9,81 \cdot 10^{5} \text{ dyn} = 9,81 \text{ N}.$$

3) Presiunea se măsoară în diferite unităţi: N/M^2 (în sistemul SI), atmosfere fizice (atm), atmosferice tehnice (at), bari, barii (barye) (în sistemul CGS), tori (torr) (sau mm Hg) şi, mai rar, piezi (pz). În barometria meteorologică este des utilizat milibarul (cu simbolul prescurtat mb). Între aceste unităţi există următoarele relaţii aproximative:

$$1 \text{ N/m}^2 = 10^{-5} \text{ bar} = 10 \text{ barye} = 1,019 \cdot 10^{-5} \text{ at} = 0,987 \cdot 10^{-5} \text{ atm} = 0,0075 \text{ torr},$$

$$1 \text{ barye} = 1 \text{ μbar} = 1 \text{ dyn/cm}^2 = 0,1 \text{ N/m}^2 = 1,019 \cdot 10^{-6} \text{ at} = 0,987 \cdot 10^{-6} \text{ at} = 0,00075 \text{ torr},$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ N/cm}^2 = 10^6 \text{ barye} = 1,019 \text{ at} = 0,987 \text{ atm} = 750 \text{ torr},$$

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ torr (sau mm Hg)} = 101\,325 \text{ N/m}^2 = 1,01325 \text{ bar} = 0,96784 \text{ at},$$

$$1 \text{ at} = 1 \text{ kgf/cm}^2 = 98066,5 \text{ N/m}^2 = 0,980665 \text{ bar} = 1,0332 \text{ atm} = 785,23 \text{ torr},$$

$$1 \text{ torr} = 1,31579 \cdot 10^{-3} \text{ atm} = 1,27347 \cdot 10^{-3} \text{ at} = 133,322 \text{ N/m}^2 = 1333,22 \text{ μbar},$$

$$1 \text{ pz} = 1 \text{ sn/m}^2 = 10^3 \text{ N/m}^3 = 10^{-2} \text{ bar} = 102 \text{ kgf/m}^2 = 1,02 \cdot 10^{-2} \text{ at} = 9,87 \cdot 10^{-3} \text{ atm} = 7,5 \text{ torr}.$$

4) Unităţile de lucru mecanic şi energie sînt: joule — J — (în sistemul SI). erg (în sistemul CGS) şi kilogramforţă-metru (în sistemul MKfS). Deoarece şi căldura este o formă de energie (energie calorică), ea se exprimă în jouli (prin intermediul echivalentului mecanic al caloriei J) sau în calorii.

$$J = \frac{1\ \text{cal}}{1\ \text{J}} = 4{,}1855$$

deci 1 cal = 4,1855 J.

O altă unitate de energie, des utilizată, este kilowattora (kWh). Toate aceste unităţi sînt legate între ele prin relaţiile aproximative:

$$1\ \text{erg} = 10^{-7}\ \text{J} = 1{,}02 \cdot 10^{-8}\ \text{kgf} \cdot \text{m} = 2{,}39 \cdot 10^{-8}\ \text{cal},$$

$$1\ \text{J} = 0{,}102\ \text{kgf} \cdot \text{m} = 0{,}239\ \text{cal} = 10^{7}\ \text{erg},$$

$$1\ \text{kgf} \cdot \text{m} = 2{,}34\ \text{cal} = 9{,}81 \cdot 10^{7}\ \text{erg} = 9{,}81\ \text{J},$$

$$1\ \text{cal} = 4{,}1855 \cdot 10^{7}\ \text{erg} = 4{,}1855\ \text{J} = 0{,}427\ \text{kgf} \cdot \text{m},$$

$$1\ \text{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^{6}\ \text{J} = 3{,}672 \cdot 10^{5}\ \text{kgf} \cdot \text{m} = 3{,}6 \cdot 10^{13}\ \text{erg}.$$

5) Unităţile de putere utilizate sînt: watt (W) (în sistemul SI) erg/s (în sistemul CGS şi kgf · m/s (în sistemul MKfS); în afară de acestea se mai utilizează unitatea numită cal putere (CP). Unităţile de putere sînt legate între ele prin următoarele relaţii:

$$1\ \text{erg/s} = 10^{-7}\ \text{W} = 1{,}02 \cdot 10^{-8}\ \text{kgf} \cdot \text{m} = 1{,}36 \cdot 10^{-10}\ \text{CP},$$

$$1\ \text{W} = 0{,}102\ \text{kgf} \cdot \text{m/s} = 1{,}36 \cdot 10^{-3}\ \text{CP} = 10^{7}\ \text{erg/s},$$

$$1\ \text{kgf} \cdot \text{m/s} = 1{,}33 \cdot 10^{-2}\ \text{CP},$$

$$1\ \text{CP} = 75\ \text{kgf} \cdot \text{m/s} = 735{,}499\ \text{W} = 735{,}499 \cdot 10^{7}\ \text{erg/s}.$$

6) Măsurarea nivelului intensităţii sonore, L_I, se face într-o scară logaritmică, iar unitatea de măsură este belul (b), stabilită pentru logaritmul zecimal al raportului intensităţilor I şi I_0 a două sunete: $\lg(I/I_0)$. Aşadar, două sunete diferă după intensitate cu 1,2,3,...beli, dacă intensităţilor lor I şi I_0 sînt în rapoartele $1/10$, $1/10^2$, $1/10^3$,... În practică însă se utilizează mai mult unitatea.

§ 2.5. Mărimi moleculare şi termice, dimensiunile şi unităţile de măsură

În tabela 2.5 sînt date denumirile mărimilor fundamentale moleculare şi termice, notaţiile şi formulele lor de definiţie, dimensiunile mărimilor în sistemele SI şi CGS, precum şi unităţile de măsură în sistemul SI.

Tabela 2.5

Denumirea	Notaţii şi formule	Dimensiunile în sistemele SI şi CGS	Unităţi în sistemul SI
Viscozitate (sau coeficientul de frecare internă)	$\eta = \tau : \frac{dv}{dl}$	$L^{-1}MT^{-1}$	$N \cdot s/m^2$
Coeficient de tensiune superficială	$\sigma = \frac{F}{l} = \frac{L}{l^2}$	MT^{-2}	N/m (sau eventual kg/s^2)
Coeficient de difuzie	$D = \frac{M}{At \frac{\Delta\rho}{\Delta l}}$	L^2T^{-1}	m^2/s
Temperatură	T, Θ	Θ	°K
Cantitatea de căldură	$Q = W$	L^2MT^{-2}	J
Coeficient de dilatare liniară	$\alpha = \frac{\Delta l}{l\Delta\theta}$	Θ^{-1}	$°K^{-1}$
Coeficient de dilatare în volum	$\gamma = \frac{\Delta V}{V\Delta\theta}$	Θ^{-1}	$°K^{-1}$
Capacitate calorică	$C = \frac{Q}{\Delta\theta}$	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	J/°K
Căldură specifică (capacitate calorică specifică)	$c = \frac{Q}{m\Delta\theta}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	J/kg·°K
Căldură latentă specifică de topire	$l_t = \frac{Q}{m}$	L^2T^{-2}	J/kg
Căldură latentă specifică de vaporizare (fierbere)	$l_v = \frac{Q}{m}$	L^2T^{-2}	J/kg
Coeficient de conductibilitate termică (conductivitate termică)	$\lambda = \frac{\Phi_t}{A} : \frac{d\theta}{dl}$	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	W/m·°K
Entropie	$S = \int \frac{dQ}{T}$	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	J/°K
Entropie specifică	$s = \frac{S}{m}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	J/kg·°K
Energie internă (potenţial termodinamic)	$U = C_V T + U_0$	L^2MT^{-2}	J

Tabela 2.5 (*continuare*)

Denumirea	Notații și formule	Dimensiunile în sistemele SI și CGS	Unități în sistemul SI
Gradient de temperatură	$\frac{d\theta}{dl}$, $\frac{d\theta}{dn}$	$L^{-1}\Theta$	°K/m
Flux termic	$\Phi_t = \frac{dQ}{dt}$	L^2MT^{-3}	W
Densitate de flux termic	$q = \frac{d\Phi_t}{dA}$	MT^{-3}	W/m^2
Coeficient de cedare termică (Coeficient de transfer termic de suprafață)	$\alpha = \frac{q}{\Delta\theta}$	$MT^{-3}\Theta^{-1}$	$W/m^2 \cdot °K$
Coeficient total de transfer termic	$K = \frac{q}{\Delta\theta}$	$MT^{-3}\Theta^{-1}$	$W/m^2 \cdot °K$

Observație. Mult timp, pentru măsurarea cantității de căldură (energie calorice) Q, s-a folosit unitatea numită calorie, definită ca fiind cantitatea de căldură necesară unei mase de 1 g apă pură pentru a-și ridica temperatura cu 1°C. Această definiție s-a complicat ulterior datorită în special dependenței căldurii specifice a apei de temperatură (în intervalul 0 °C—100 °C căldura specifică a apei are un minim evident în apropierea temperaturii de 30 °C). Din această cauză valoarea caloriei și raportul ei față de joule s-a modificat de cîteva ori, deoarece la definirea caloriei s-au folosit diferite temperaturi inițiale ale apei (0 °C, 4 °C, 15 °C etc.). Pînă la urmă caloria a fost definită în felul următor: cantitatea de căldură necesară unei mase de 1 g de apă pură pentru a-și ridica temperatura de la 19,5 °C la 20,5 °C sub presiunea de 101 325 N/m^2 (= 1 atm).

§ 2.6. Mărimi electrice și magnetice, dimensiunile și unitățile lor de măsură

În tabelele 2.6 și 2.7 sînt date cîteva mărimi electrice și magnetice, denumirile și notațiile lor, formulele de definiție ale mărimilor și unitățile lor în sistemul CGS și anume pentru mărimile electrice în sistemul electrostatic ($CGS\varepsilon_0$), bazat pe legea lui Coulomb și sistemul electromagnetic ($CGS\mu_0$), bazat pe legea Biot-Savart. Relația dintre unitățile în sistemele $CGS\mu_0$ și $CGS\varepsilon_0$ se stabilește pe baza teoriei electromagnetice a luminii, după care raportul dintre unitățile de intensitate a curentului în cele două sisteme este egal cu $3 \cdot 10^{10}$ cm/s.

Tabela 2.6. **Sistemul CGSε_0**

Mărimi	Notaţii şi formule	Unităţi
Cantitatea de electricitate	$Q = \sqrt{F \cdot l^2}$	Franklin Fr
Densitatea superficială de sarcini	$\sigma = \frac{Q}{S}$	Fr/cm^2
Intensitatea cîmpului electric	$E = \frac{F}{Q}$	dyn/Fr
Potenţial	$U = \frac{L}{Q}$	u.CCSε_0 de potenţial
Capacitate	$C = \frac{Q}{U}$	cm $\cdot \mu_0$
Intensitatea curentului	$I = \frac{Q}{t}$	Fr/s
Rezistenţă electrică	$R = \frac{U}{I}$	u.CGSε_0 de rezistenţă

Tabela 2.7. **Sistemul CGSμ_0**

Mărimi	Notaţii şi formule	Unităţi
Cantitatea de electricitate	$Q = It$	u. CGSμ_0 de sarcină
Potenţial	$U = IR$	u. CGSμ_0 de potenţial
Capacitate	$C = \frac{Q}{U}$	u. CGSμ_0 de capacitate
Intensitatea curentului	$I = \frac{rH}{2}$	u. CGSμ_0 de intensitate
Rezistenţă electrică	$R = \frac{U}{I}$	u. CGSμ_0 de rezistenţă
Inductanţă	$L = \frac{U}{I/t}$	cm
Intensitatea cîmpului magnetic	$H = \frac{2I}{r}$	Oersted Oe
Inducţie magnetică	$B = \mu H$	Gauss Gs

În tabela 2.8 sînt cuprinse datele pentru aceleași mărimi electrice și magnetice, însă în sistemul SI.

În sistemul SI pentru forma raționalizată a ecuațiilor cîmpului electromagnetic, ε_0 și μ_0 se iau egale cu: $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot c^2} 10^7$ F/m și $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, unde c este valoarea numerică a vitezei luminii în vid, exprimată în m/s.

Tabela 2.8. **Sistemul SI**

Mărimi	Relații de definiție	Dimensiuni	Unități	Relații de transformare
Intensitatea curentului	$\frac{F}{l} = 2\mu_0 \frac{I_1 I_2}{d}$	I	Amper A	$1\ \text{A} = 10^{-1}$ u. CGSμ_0= $= 3 \cdot 10^9$ Fr/s
Tensiune electrică	$U = \frac{P}{I}$	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	Volt V	$1\ \text{V} = 10^8$ u. CGSμ_0 = $= \frac{1}{300}$ u. CGSε_0
Intensitatea cîmpului electric	$E = \frac{F}{Q}$	$LMT^{-3}I^{-1}$	V/m	$1\ \text{V} = 10^6$ u. CGSμ_0= $= \frac{1}{300}$ u. CGSε_0
Rezistență electrică	$R = \frac{U}{I}$	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	Ohm Ω	$1\ \Omega = 10^9$ u. CGSμ_0 = $= \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ u. CGSε_0
Capacitate	$C = \frac{Q}{U}$	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	Farad F	$1\ \text{F} = 10^{-9}$ u. CGSμ_0= $= 9 \cdot 10^{11}$ u. CGSε_0
Inductanță	$L = \frac{\Phi}{I}$	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	Henry H	$1\ \text{H} = 10^9$ cm μ_0
Intensitatea cîmpului magnetic	$H = \frac{2I}{r}$	$L^{-1}I$	Milioersted mOe	1 m Oe $= 10^{-3}$ Oe
Flux magnetic	$E = -\frac{d\Phi}{dt}$	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	Weber Wb	1 Wb $= 10^8$ Mx [Maxwellul (Mx) este unitatea CGSμ_0]
Inducția magnetică	$B = \frac{\Phi}{A}$	$MT^{-2}I^{-1}$	Tesla T	$1\ \text{T} = 1\ \text{Wb/m}^2 = 10^4$Gs

§ 2.7. Mărimi fotometrice şi unităţile lor de măsură

Mărimea fotometrică aleasă ca fundamentală este intensitatea luminoasă **I.** (În analiza dimensională am notat-o cu I' pentru a o deosebi de intensitatea curentului electric care se notează cu I). Unitatea ei fundamentală de măsură este candela. Celelalte mărimi fotometrice se află într-o anumită relaţie cu intensitatea luminoasă. În tabela 2.9 sînt date denumirile mărimilor fotometrice fundamentale,

Tabela 2.9

Denumirea	Notaţii şi formule	Dimensiunile în sistemul SI	Denumirile notaţiilor şi definiţiile unităţilor
Intensitatea luminoasă	I	I	Candela (cd) este intensitatea luminoasă emisă în direcţie normală, la temperatura de solidificare a platinei şi presiunea atmosferică normală de către suprafaţa unui radiator integral (corp negru) cu aria de 1/600000 m² (STAS 737-62)
Flux luminos	$\Phi = I\omega$	I	Lumenul (lm) este fluxul luminos emis, în unitatea de unghi solid (steradian), de către o sursă punctiformă şi uniformă avînd intensitatea de o candelă
Iluminare[1]	$E = \frac{\Phi}{S}$	$L^{-2}I$	Luxul (lx) este iluminarea unei suprafeţe care primeşte un flux luminos de un lumen, uniform repartizat pe o suprafaţă de 1 m²
Strălucire[2]	$B = \frac{I}{S}$	$L^{-2}I$	Candela pe metru pătrat (cd/m²) este strălucirea uniformă a unei surse luminoase plane, de 1 m², a cărei intensitate luminoasă, în direcţie normală pe plan, este de 1 cd
Radianţă[3] (Radierea luminoasă)	$R = \frac{\Phi}{S}$	$L^{2}I$	Radianţa de 1 lux (lx) este radianţa uniformă a unei suprafeţe care emite un flux de 1 lm pe 1 m²
Cantitatea[4] de lumină	$Q = \Phi \cdot T$	TI	Lumenul-secundă (lm·s) este cantitatea de lumină corespunzătoare unui flux luminos de 1 lm în timp de 1 s
Cantitate de iluminare[5]	$L = E \cdot t$	$L^{-2}TI$	Luxul-secundă (lx·s) este cantitatea produsă de o iluminare de 1 lx în timp de 1 s.

notațiile și formulele lor de definiție, unitățile lor de măsură în sistemul SI și definițiile adoptate în prezent ale unităților respective.

Note la tabela 2.9. 1) Pentru măsurarea iluminării E se mai folosește și unitatea denumită phot (ph) (în sistemul CGS), precum și un submultiplu al ei, miliphotul

$$1 \text{ ph} = \frac{1 \text{ lm}}{1 \text{ cm}^2} = 10^4 \text{ lx},$$

$$1 \text{ mph} = 10^{-3} \text{ ph} = 10 \text{ lx}.$$

2) Pentru măsurarea strălucirii B se mai folosește unitatea denumită stilb (sb) (în sistemul CGS), precum și unitățile denumite apostilb (asb), lambert (La) și mililambert (mLa)

$$1 \text{ sb} = \frac{1 \text{ cd}}{1 \text{ cm}^2} = 10^4 \text{ cd/m}^2,$$

$$1 \text{ asb} = \frac{1}{\pi} \text{ cd/m}^2 = \frac{1}{\pi \cdot 10^4} \text{ sb},$$

$$1 \text{ La} = \frac{1}{\pi} \text{ sb} = \frac{10^4}{\pi} \text{ cd/m}^2 = 10^4 \text{ asb},$$

$$1 \text{ mLa} = 10^{-3} \text{ La} = \frac{10}{\pi} \text{ cd/m}^2 = \frac{1}{\pi \cdot 10^3} \text{ sb} = 10 \text{ asb}.$$

3) Pentru măsurarea radianței *R* se mai folosește photul și miliphotul (mph)

$$1 \text{ ph} = 10^4 \text{ lx} = 10^3 \text{ mph}.$$

4) Pentru măsurarea cantității de lumină *Q* se mai folosește unitatea lumen-oră (lm · h)

$$1 \text{ lm} \cdot \text{h} = 3\,600 \text{ lm} \cdot \text{s}.$$

5) Pentru măsurarea cantității de iluminare se mai folosește unitatea phot-secundă

$$1 \text{ ph} \cdot \text{s} = 10^4 \text{ lx} \cdot \text{s}.$$

Note la tabela 2.10[1]). Deoarece în fizica atomică și nucleară se întîlnesc mase foarte mici, pentru măsurarea masei este foarte des utilizată unitatea atomică de masă (amu)[1]). O unitate atomică de masă este egală cu 1/16 din masa nuclidului ^{16}O.

$$1 \text{ amu} = 1{,}65979{:}10^{-27} \text{ kg} = 931 \text{ MeV} = 1{,}49 \cdot 10^{-10} \text{ J}.$$

[1]) Atomic mass united.

§ 2.8. Mărimi şi unităţi în fizica atomică şi nucleară

Tabela 2.10

Denumirea mărimii	Notaţii şi formule	Definiţii	Dimensiuni în sistemele SI şi CGS	Unităţi în sistemul SI
Masa de repaus a unei particule elementare[1])	m_0	Masa pe care o are particula elementară într-un sistem de referinţă, faţă de care ea se găseşte în repaus în acel moment În funcţie de particula elementară la care se referă simbolul, acesta va avea indicii după cum urmează: m_p pentru proton, m_n pentru neutron, m_e pentru electron etc.	M	kg
Energia de repaus a unei particule elementare[2])	w_0	Energia corespunzătoare masei de repaus m_0: $w_0 = m_0 \cdot c^2$ c este viteza undelor electromagnetice în vid	L^2MT^{-2}	J
Sarcina elementară[3])	e	Valoarea absolută a sarcinii electronului sau protonului	TI	C
Spinul unei particule elementare	s	Valoarea maximă exprimată în unităţi $\frac{h}{2\pi} = \hbar$ a proiecţiei momentului cinetic propriu al particulei elementare pe o direcţie fixă; h este constanta lui Planck (vezi STAS (2848-51), iar $\hbar$ este constanta raţionalizată a lui Planck	Număr pur	

Tabela 2.10 (*continuare*)

Denumirea mărimii	Notații și formule	Definiții	Dimensiuni în sistemele SI și CGS	Unități în sistemul SI
Spinul nuclear	I	Valoarea maximă exprimată în unități $h/2\pi = \hbar$ a proiecției momentului cinetic propriu al nucleului pe o direcție fixă	Număr pur	
Moment magnetic nuclear		Proiecția vectorului momentului magnetic al nucleului pe direcția momentului lui cinetic	L^2I	$A \cdot m^2$
Intensitatea de particule	J	Numărul de particule care traversează un element de suprafață perpendicular pe direcția fluxului raportat la acest element de suprafață și la durata traversării	L^{-2} T^{-1}	$m^{-2} \cdot s^{-1}$
Secțiunea eficace[5])	σ	Numărul de procese de un anumit tip pe unitatea de timp pentru o particulă țintă raportat la intensitatea de particule incidente	L^2	m^2
Secțiune eficace macroscopică	Σ	Produsul secțiunii eficace σ prin numărul N de particule țintă pe unitatea de volum	L^{-1}	m^{-1}
Parcurs	R	Distanța medie pe care o particulă o străbate într-un mediu pînă la oprire	L	m
Parcurs masic	R_m	Produsul dintre parcursul R și densitatea ρ a mediului respectiv	$L^{-2}M$	kg/m^2

Tabela 2.10 (*continuare*)

Denumirea mărimii	Notaţii şi formule	Definiţii	Dimensiuni în sistemele SI şi CGS	Unităţi în sistemul SI
Pierdere liniară de energie	S	$S = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ E este energia cinetică a particulei, x este distanţa străbătută de particulă pe traiectorie	LMT^{-2}	J/m
Ionizare liniară	N_e	Raportul dintre numărul de perechi de ioni ΔN produşi pe distanţa Δx şi această distanţă Δx	L^{-1}	m^{-1}
Distanţa de înjumătăţire	$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$	Distanţa în mediul atenuant pînă la care intensitatea fasciculului se reduce la jumătate	L	m
Distanţa de înjumătăţire masică	$D_{1/2}$	Produsul dintre distanţa de înjumătăţire şi densitatea ρ a mediului respectiv	$L^{-2}M$	kg/m^2
Coeficient de atenuare liniar	μ_l	Inversul distanţei la care intensitatea fasciculului care traversează un mediu scade pînă la $1/e$. Acest coeficient se foloseşte în cazul atenuării exponenţiale	L^{-1}	m^{-1}
Coeficient de atenuare masic	μ_m	Raportul dintre coeficientul de atenuare liniar şi densitatea ρ a mediului	L^2M^{-1}	m^2/kg
Constanta de dezintegrare	λ	Probabilitatea de dezintegrare a unei particule elementare sau a unui nucleu raportată la unitatea de timp	T^{-1}	s^{-1}

Tabela 2.10 (*continuare*)

Denumirea mărimii	Notații și formule	Definiții	Dimensiuni în sistemele SI și CGS	Unități în sistemul SI
Viața medie	$\tau = \frac{1}{\lambda}$	Intervalul de timp în decursul căruia numărul de nuclee N_0 scade în medie la N_0/e e este baza logaritmilor naturali	T	s
Timp de înjumătățire	$T_{1/2}$	Intervalul de timp în decursul căruia se dezintegrează în medie jumătate din numărul particulelor instabile respective	T	s
Activitatea unei surse[3]) (se mai numește și viteză de dezintegrare)	A	$A = -\frac{dN}{dt}$ N este numărul de nuclizi radioactivi la momentul t	T^{-1}	s^{-1}
Activitate specifică	A_s	Raportul dintre activitatea unei surse radioactive și masa acestei surse	$M^{-1}T^{-1}$	$s^{-1} \cdot kg^{-1}$

2) Unitatea cea mai frecvent folosită pentru măsurarea energiei (în fizica atomică și nucleară) este electronvoltul (eV). El se definește ca fiind energia pe care o cîștigă un electron care străbate o diferență de potențial de 1 V. Pe lîngă electronvolt se folosesc și multiplii lui: kiloelectronvoltul (keV), megaelectronvoltul (MeV) și gigaelectronvoltul (GeV)

$$1 \text{ eV} = 1{,}60206 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1{,}07 \cdot 10^{-9} \text{ amu},$$

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV},$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV},$$

$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV},$$

$$1 \text{ J} = 6{,}7 \cdot 10^9 \text{ amu} = 6{,}25 \cdot 10^{18} \text{ eV}.$$

3) Pentru măsurarea sarcinii electrice se foloseşte mult unitatea *e* (egală cu sarcina electronului sau a protonului luată în valoare absolută) numită sarcină elementară

$$1\,e = \frac{F}{N} = 1{,}60206 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C},$$

unde *F* este constanta lui Faraday, iar *N* este numărul lui Avogadro.

4) Pentru măsurarea momentelor magnetice sînt foarte mult folosiţi magnetonul Bohr (μ_B) şi magnetonul nuclear (μ_N)

$$1\,\mu_B = 5{,}05038 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{A \cdot m^2}$$

$$1\,\mu_N = 0{,}92731 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{A \cdot m^2}.$$

5) Pentru măsurarea secţiunilor eficace se foloseşte unitatea numită barn (b)

$$1\ \mathrm{b} = 10^{-28}\ \mathrm{m^2}.$$

6) Unitatea cea mai des folosită este curie-ul (c). Un curie este cantitatea dintr-o substanţă radioactivă în care au loc în fiecare secundă $3{,}7 \cdot 10^{10}$ procese de dezintegrare. O altă unitate, puţin folosită este rutherfordul (Rd). Pentru măsurarea radioactivităţii fluidelor se folosesc uneori unităţile eman şi Mach

$$1\ \mathrm{c} = 3{,}7 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{s^{-1}},$$

$$1\ \mathrm{Rd} = 10^{6}\ \mathrm{s^{-1}} = 2{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{c},$$

$$1\ \text{eman} = 10^{-10}\mathrm{c/l} = 0{,}2748\ \text{unităţi Mach},$$

$$1\ \text{unitate Mach} = 3{,}64 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{c/l} = 3{,}64\ \text{eman}.$$

§ 2.9. Constante fizice care se întîlnesc frecvent

Tabela 2.11.

	Notaţie	Valoarea numerică
Zero absolut de temperatură	0 °K	−273,16 °C
Lungimea de undă a liniei galbene a Na	—	5893 Å
Lungimea de undă a liniei roşii a Cd	—	6438,5 Å
Sarcina specifică a electronului	e/m	$1{,}7589 \cdot 10^{11}$ C/kg
Potenţialul de ionizare al hidrogenului	—	$13{,}527 = 2{,}16 \cdot 10^{-18}$ J

Tabela 2.11 (*continuare*)

	Notație	Valoarea numerică
Coeficientul de dilatare termică a gazelor la presiune constantă	C_p	$1/273{,}16\ ^\circ K^{-1} = 0{,}00366\ ^\circ K^{-1}$
Masa atomului de hidrogen	m_H	$1{,}6734 \cdot 10^{-27}$ kg
Masa neutronului	m_n	$1{,}67470 \cdot 10^{-27}$ kg = = 1,008984 amu
Masa protonului	m_p	$1{,}67239 \cdot 10^{-27}$ kg = = 1,007597 amu
Echivalentul mecanic al caloriei	J	4,1855 J/cal
Volumul unui mol (moleculă-gram) de gaz perfect în condiții normale	V_0	22,4207 l/mol = $= 2{,}24207 \cdot 10^{-2}\ m^3/mol$
Densitatea apei la 4°C	—	$0{,}999973 \cdot 10^3\ kg/m^3$
Densitatea mercurului la 0°C	—	$13{,}5951 \cdot 10^3\ kg/m^3$
Densitatea aerului uscat în condiții normale		$1{,}293\ kg/m^3$
Constanta lui Boltzman	$k = \frac{R}{N}$	$1{,}3804 \cdot 10^{-23}\ J/^\circ K$
Constanta lui Wien		$0{,}28978 \cdot 10^{-2}\ m \cdot {}^\circ K$
Constanta gazelor perfecte	R	$8{,}317 \cdot 10^7\ J \cdot mol^{-1} \cdot {}^\circ K$
Constanta gravitației	$\varkappa$	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
Constanta lui Planck	h	$6{,}624 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$
Constanta lui Rydberg pentru hidrogen	R_∞	$1{,}097373 \cdot 10^7\ m^{-1}$
Constanta lui Stephan-Boltzman	$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$	$5{,}693 \cdot 10^{-8}\ W/m^2 \cdot {}^\circ K^4$
Raza primei orbite a atomului de hidrogen		$0{,}528 \cdot 10^{-10}$ m
Viteza sunetului în aer în condiții normale		331,4 m/s
Viteza luminii în vid	c	$2{,}997925 \cdot 10^8$ m/s
Viteza electronului cu energia de 1 eV		$5{,}945 \cdot 10^3$ m/s
Accelerația gravitației (normală)	g_n	$9{,}80665\ m/s^2$
Numărul lui Avogadro	N	$6{,}023 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$
Numărul lui Loschmidt	$L_0 = \frac{N}{V_0}$	$2{,}6872 \cdot 10^{25}\ m^{-3}$
Numărul lui Faraday (scara chimică)	F	$9{,}6494 \cdot 10^4$ C/mol

Tabela 2.11 (*continuare*)

	Notaţie	Valoarea numerică
Numărul lui Faraday (scara fizică)		$9{,}6521 \cdot 10^4$ C/mol
Unele mărimi geofizice şi astronomice		
Raza ecuatorului globului pămîntesc		6378,3 km
Semiaxa polilor globului pămîntesc		6356,8 km
Densitatea medie a Pămîntului		$5{,}517 \cdot 10^3$ kg/m³
Densitatea medie a Pămîntului la suprafaţă		2,65 kg/m³
Distanţa medie de la Pămînt la Soare		$1{,}497 \cdot 10^{11}$ m
Distanţa medie de la Pămînt la Lună		$3{,}844 \cdot 10^8$ m 60,3 raze terestre

2.2
Prelucrarea rezultatelor măsurărilor (elemente de teoria erorilor)

§ 2.10. Erori sistematice şi întîmplătoare

Orice măsurare poate fi făcută, după cum se ştie, numai cu o anumită aproximaţie; cu alte cuvinte, precizia măsurărilor este întotdeauna limitată şi rezultatele măsurărilor efectuate oricît de exact, conţin totdeauna erori.

Toate erorile măsurărilor se împart în două categorii: erori sistematice şi erori întîmplătoare.

1. **Erorile sistematice,** în majoritatea cazurilor apar din cauza impreciziei indicaţiilor aparatelor, din cauza caracterului greşit al metodei de măsurare, sau, în sfîrşit, din cauza vreunui factor exterior, însă cu acţiune unilaterală. Astfel, rezultatele măsurării temperaturii cu un termometru, la care punctul de zero este deplasat, vor fi sistematic incorecte atîta timp cît în rezultatele măsurărilor nu se va introduce corecţia respectivă; tot astfel, încălzirea neuniformă a balansorului unui cîntar, de exemplu, cu razele soarelui sau prin căldura unui radiator, va provoca o eroare sistematică la cîntărire. Observarea şi eliminarea unei erori sistematice la măsurări este o problemă foarte

complicată. Aceasta se realizează în urma unui studiu atent al aparatelor prin verificarea şi corectarea lor şi, în sfîrşit, dacă este necesar, prin introducerea corecţiilor respective în rezultatele măsurărilor. În cele ce urmează vom presupune că erorile sistematice sînt complet excluse la măsurări.

2. **Erorile întîmplătoare**, sînt acele erori, care apar inevitabil la observarea indicaţiilor unui aparat şi la înregistrarea acestora; erorile nu urmează o lege constantă, deoarece la fiecare măsurare pot apare în aceeaşi măsură erori întîmplătoare, ce măresc valorile mărimilor măsurate, cît şi erori, ce le micşorează. Din această cauză, pentru erorile întîmplătoare trebuie folosite legile stabilite de teoria probabilităţilor în legătură cu repetarea multiplă a aşa-numitelor *fenomene întîmplătoare*. Este, desigur, imposibilă eliminarea la măsurări a erorilor întîmplătoare, însă teoria probabilităţilor a elaborat metode, care permit micşorarea influenţei acestor erori asupra rezultatului definitiv al măsurărilor. Elementele teoriei erorilor întîmplătoare pot fi expuse în modul următor.

Dacă repetăm de n ori măsurarea unei anumite mărimi şi dacă obţinem pentru ea n valori, $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$, se poate admite că valoarea medie aritmetică a tuturor valorilor obţinute, adică valoarea

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \tag{2.46}$$

trebuie să corespundă aproximativ valorii exacte a mărimii măsurate.

Acest „postulat al mediei aritmetice“, introdus de Gauss pe baza teoriei probabilităţilor, reprezintă numai situaţia cea mai probabilă, care însă devine cu atît mai sigură, cu cît numărul n este mai mare, adică cu cît s-au efectuat mai multe măsurări. De aici rezultă, în primul rînd, că fiecare măsurare fizică trebuie repetată de cîteva ori şi, în al doilea rînd, că la un număr suficient de mare de măsurări valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate este determinată de media aritmetică a tuturor valorilor obţinute la diferite măsurări.

§ 2.11. Erori absolute şi erori relative

Diferenţele dintre valoarea medie A a mărimii măsurate şi valorile ei obţinute la diferitele măsurări, adică valorile

$$A - a_1 = \varepsilon_1,\ A - a_2 = \varepsilon_2,\ A - a_3 = \varepsilon_3, \ldots, A - a_n = \varepsilon_n,$$

se numesc de obicei (deşi nu prea exact) *erori absolute* ale diferitelor măsurări. Evident, erorile absolute ε_i $(i = 1,2,3,\ldots,n)$ ale diferitelor măsurări pot fi şi pozitive şi negative.

Rapoartele dintre erorile absolute ale diferitelor măsurări şi valorile respective $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$, adică rapoartele

$$\frac{\varepsilon_1}{a_1}, \frac{\varepsilon_2}{a_2}, \frac{\varepsilon_3}{a_3}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{a_n},$$

se numesc *erori relative* ale diferitelor măsurări, adică

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{a_1}, \quad \delta_2 = \frac{\varepsilon_2}{a_2}, \quad \delta_3 = \frac{\varepsilon_3}{a_3}, \ldots, \delta_n = \frac{\varepsilon_n}{a_n}.$$

Tot astfel, raportul dintre eroarea absolută ε_A a rezultatului definitiv al măsurărilor și valoarea sa medie A se numește *eroarea relativă a rezultatului*

$$\delta_A = \frac{\varepsilon_A}{A}. \tag{2.47}$$

Erorile relative se exprimă de obicei în procente.

Erorile absolute nu depind de dimensiunile mărimii măsurate, adică sînt determinate numai de precizia măsurărilor, în timp ce în expresia erorilor relative, de exemplu în formula (2.47), intervine mărimea măsurată A, adică la o *aceeași precizie a măsurărilor eroarea lor relativă în diversele cazuri poate fi diferită*. Astfel, de exemplu, la măsurarea grosimii unor plăci cu un micrometru, a cărui precizie este de $\pm 0{,}01$ mm, eroarea absolută la toate măsurările va fi aceeași, și anume: nu mai mare ca $\pm$ 0,01 mm, dar eroarea relativă a măsurărilor a două plăci cu grosimea de 1 mm și respectiv de 1 cm, va fi, conform formulei (2.47), complet diferită; în primul caz ea nu va fi mai mare de $\pm$ 1%, iar în al doilea caz nu va fi mai mare de $\pm$ 0,1%. După cum se vede, erorile relative calculate dau posibilitatea să se evalueze foarte intuitiv precizia măsurărilor și de aceea la toate măsurările se obișnuiește să se calculeze eroarea relativă a rezultatelor.

§ 2.12. Erorile rezultatului măsurărilor. Eroarea medie pătratică, eroarea probabilă și eroarea medie

Pentru a găsi eroarea relativă a rezultatului unor măsurări, adică mărimile δ_A din formula (2.47), trebuie să determinăm eroarea absolută ε_A. Pentru această mărime se introduc în teoria erorilor întîmplătoare trei formule diferite; ele dau expresiile a trei erori diferite ε_A, care pot fi folosite pentru caracterizarea preciziei rezultatelor măsurării. Aceste erori sînt următoarele: *eroarea medie pătratică* σ_A, *eroarea probabilă* r_A și *eroarea medie* η_A. De obicei, se calculează eroarea medie pătratică σ_A a rezultatului măsurărilor, sau eroarea probabilă r_A; a treia eroare η_A se folosește mult mai rar.

Pentru eroarea medie pătratică σ_A teoria erorilor întîmplătoare conduce la expresia

$$\sigma_A = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n(n-1)}}, \tag{2.48}$$

adică pentru calculul erorii medii pătratice a unui rezultat trebuie să scoatem rădăcina pătrată din cîtul obținut prin împărțirea sumei pătratelor erorilor absolute a tuturor măsurărilor la expresia $n(n-1)$,

unde n reprezintă, ca şi înainte, numărul de măsurări. Este indicat să se determine erorile rezultatului (absolute şi relative), folosind formula (2.48), însă aceste calcule sînt uneori foarte laborioase.

Toate erorile măsurărilor sînt, evident, cuprinse între valorile maxime pozitive şi negative ale lui σ_A luate în valoare absolută, iar erorile întîmplătoare mari într-o direcţie sau în alta sînt mai puţin probabile decît erorile mici, adică trebuie să se întîlnească mai rar. De aceea, există motive de a introduce în formula (2.48) un coeficient mai mic decît 1; acest coeficient, calculat pe baza teoriei probabilităţilor, este de 0,6745, sau aproximativ 2/3. De aici, pentru eroarea probabilă r_A a rezultatului, se obţine expresia

$$r_A = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i^2)}{n(n-1)}}. \tag{2.49}$$

În formulele (2.48) şi (2.49) se introduc două semne, deoarece ambele semne sînt egal posibile, adică valoarea exactă a mărimii măsurate poate fi şi mai mare, şi mai mică (este egal de probabil) decît valoarea determinată prin formula (2.46). Ea poate să se deosebească de această valoare prin valoarea σ_A, însă probabil, nu diferă mai mult decît cu r_A. Din formulele (2.48) şi (2.49) se vede că dacă n creşte, eroarea rezultatului scade proporţional cu rădăcina pătrată din $n(n-1)$, adică la un număr suficient de mare de măsurări eroarea rezultatului poate fi foarte mică.

Aşadar, pe baza formulelor (2.46) şi (2.49), putem scrie valoarea definitivă a mărimii măsurate

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n(n-1)}}. \tag{2.50}$$

Primul termen din partea dreaptă a acestei expresii este valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate, iar al doilea termen eroarea probabilă.

Pentru familiarizarea în practică cu astfel de calcule, vom analiza următorul exemplu.

S-a măsurat rezistenţa electrică R a unei bobine. Măsurările au fost repetate de zece ori; rezultatele lor, exprimate în ohmi, sînt

6,270; 6,2777; 6,271; 6,273; 6,276; 6,272; 6,278; 6,275; 6,277; 6,274.

Din formula (2.46) găsim valoarea medie a rezultatului măsurărilor

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{10} R_i}{n} = 6{,}274(3)\,\Omega.$$

De aici se obţin erorile absolute ε_R ale tuturor măsurărilor şi se calculează pătratele lor ε_R^2. Rezultatele sînt date în tabela 2.12.

Tabela 2.12. **Erorile absolute ale măsurărilor şi pătratele lor**

ε_R	+0,004	−0,003	+0,003	+0,001	−0,002
ε_R^2	$16\cdot10^{-6}$	$9\cdot10^{-6}$	$9\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-6}$
ε_R	+0,002	−0,004	−0,001	−0,003	0,000
ε_R^2	$4\cdot10^{-6}$	$16\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-6}$	$9\cdot10^{-6}$	0

Din tabelă găsim suma pătratelor tuturor erorilor

$$\sum \varepsilon_R^2 = 0,000069.$$

Pe baza formulelor (2.48) şi (2.49) se calculează eroarea medie pătratică şi eroarea probabilă a rezultatului

$$\sigma_R = \pm\sqrt{\frac{0,000069}{10\cdot 9}} = \pm\, 0,0009,$$

$$r_R = \pm\, 0,6745\cdot 0,0009 = \pm\, 0,0006.$$

Rezultatul definitiv al măsurărilor poate fi scris astfel:

$$R = (6,274 \pm 0,0006)\ \Omega.$$

Primul termen din partea dreaptă a acestei egalităţi este valoarea probabilă maximă a rezistenţei R a bobinei, iar al doilea eroarea probabilă a măsurărilor sale.

Dacă în locul erorii probabile r_R se introduce eroarea medie pătratică σ_R, atunci acelaşi rezultat poate fi scris sub forma

$$R = (6,274 \pm 0,001)\ \Omega,$$

unde valoarea erorii medii pătratice este rotunjită pînă la zecimala a treia.

§ 2.13. Determinarea erorilor funcţiilor după erorile argumentelor

Se întîmplă uneori să se măsoare o anumită mărime în mod direct; astfel de măsurări se întîlnesc numai în cazurile cele mai simple, la măsurarea lungimilor, la determinarea greutăţii corpurilor cu cîntare obişnuite, la măsurarea intervalelor de timp. În majoritatea cazurilor, însă, trebuie să măsurăm în mod direct nu mărimea căutată, ci alte mărimi, legate de ea prin relaţii matematice cunoscute (formule),

care sînt determinate de legile fenomenului dat și care dau posibilitatea ca din rezultatele măsurărilor directe să se calculeze mărimea căutată, fără a recurge la măsurarea ei directă. În asemenea cazuri se constată că eroarea valorii obținute a mărimii căutate depinde nu numai de erorile comise la măsurările directe, ci și de felul formulei matematice, care leagă mărimea căutată de mărimile măsurate direct. La studiul acestor probleme s-a dovedit foarte indicată folosirea metodelor calculului diferențial, considerînd mărimea căutată ca o funcție, iar mărimile măsurate direct ca argumentele ei; felul dependenței funcționale este determinat de formula care leagă aceste mărimi.

Vom admite la început că măsurarea unei anumite mărimi A, (măsurarea care nu se poate efectua direct), se înlocuiește prin măsurarea altei mărimi x, legată de prima printr-o anumită relație

$$A = f(x). \tag{2.51}$$

Se presupune că la măsurarea mărimii x eroarea medie absolută a rezultatului este de $\pm\, \mathrm{d}x$. Această eroare, la calculul valorii A pe baza formulei (2.51), dă o eroare absolută egală cu $\pm\, \mathrm{d}A$. Deci

$$A + \mathrm{d}A = f(x + \mathrm{d}x).$$

Pe baza definiției generale a diferențialei se obține

$$\mathrm{d}A = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x. \tag{2.52}$$

Pe baza formulelor (2.47) și (2.51) eroarea relativă E în determinarea lui A, este

$$E = \frac{\mathrm{d}A}{A} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}{f(x)} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}.$$

Partea dreaptă a acestei ecuații este diferențiala logaritmului natural a lui $f(x)$

$$E = \frac{\mathrm{d}A}{A} = \mathrm{d}\ln f(x), \tag{2.53}$$

adică *eroarea relativă a funcției* este egală cu diferențiala logaritmului natural al acestei funcții.

Dacă pentru determinarea unei mărimi A trebuie să se efectueze măsurările cîtorva mărimi, să zicem două, x_1 și x_2, legate de mărimea A tot printr-o relație dată, atunci, în mod analog, se poate scrie

$$A = f(x_1, x_2). \tag{2.54}$$

Erorile absolute comise la măsurarea lui x_1 și x_2 le vom nota cu $\mathrm{d}x_1$ și $\mathrm{d}x_2$. Fiecare dintre aceste erori determină o eroare parțială

absolută la determinarea lui A; aceste erori parţiale absolute se notează cu dA_{x_1} şi dA_{x_2}. Evident, pentru a găsi pe $\frac{\partial A}{\partial x_1}$ trebuie să aplicăm formula (2.52), considerînd că x_2 este constant, iar pentru a găsi pe $\frac{\partial A}{\partial x_2}$ trebuie să aplicăm din nou aceeaşi formulă, considerînd pe x_1 constant; cu alte cuvinte, pentru determinarea lui $d_{x_1}A$ şi $d_{x_2}A$ trebuie să găsim derivatele parţiale ale funcţiei (2.54) în raport cu x_1 şi x_2; se obţin

$$d_{x_1}A = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1, \qquad d_{x_2}A = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2.$$

Să presupunem că are loc cazul cel mai nefavorabil, şi anume că eroarea absolută dA a rezultatului definitiv este egală cu suma valorilor absolute ale erorilor parţiale. Cu alte cuvinte, calculăm valoarea maximă posibilă a erorii absolute dA a rezultatului. Se obţine

$$dA = |dx_1A| + |dx_2A| = \left|\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1\right| + \left|\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2\right|. \qquad (2.55)$$

Conform formulei (2.47), pentru calculul valorii maxime posibile a erorii relative a rezultatului, se împart ambele părţi ale acestei ecuaţii cu A şi, avînd în vedere formula (2.52), se găseşte

$$\frac{dA}{A} = \left|\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{f(x_1, x_2)}\right| + \left|\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{f(x_1, x_2)}\right|.$$

Partea dreaptă a acestei expresii este, evident, egală cu diferenţiala totală a logaritmului natural al funcţiei (2.52), în care s-a luat suma valorilor absolute a tuturor termenilor

$$\frac{dA}{A} = d \ln f(x_1, x_2). \qquad (2.56)$$

Aceleaşi consideraţii pot fi făcute şi în cazul cînd determinarea unei mărimi cere măsurarea nu a altor două, ci a cîtorva mărimi, adică atunci cînd mărimea A este o funcţie de cîteva variabile independente

$$A = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Se obţin formule analoge cu (2.55) şi (2.56). De aici rezultă concluzia că la determinarea unei mărimi, care cere măsurarea altor cîtorva mărimi.

1) *valoarea maximă a erorii absolute* a rezultatului este egală cu diferenţiala totală a funcţiei, care determină dependenţa mărimii date de mărimile măsurate, iar la calculul diferenţialei trebuie să se

ia suma valorilor absolute ale tuturor derivatelor parţiale (toate erorile parţiale se adună);

2) *valoarea maximă a erorii relative* a rezultatului este egală cu diferenţiala totală a logaritmului natural al funcţiei, care determină dependenţa mărimii date de mărimile măsurate, iar la calculul diferenţialei trebuie să se ia suma valorilor absolute a diferenţialelor tuturor termenilor logaritmului (toate erorile parţiale se adună).

§ 2.14. Exemple de calcul al erorilor rezultatelor măsurărilor

1. Acceleraţia gravitaţiei se determină prin metoda pendulului. Din formula perioadei micilor oscilaţii ale pendulului

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Se obţine formula pentru calculul lui g

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}. \tag{2.57}$$

Măsurarea mărimilor, care intervin în partea dreaptă a formulei (2.57), a dat următoarele rezultate:

1. Lungimea l a pendulului, măsurată cu o precizie pînă la 0,1 mm, este egală cu 50,02 cm; astfel, erorile de măsurare a lungimii sînt: cea absolută, Δl egală cu $\pm$ 0,1 mm $= \pm$ 0,0001 m şi cea relativă $\Delta l/l$ determinată pe baza formulei (2.47), este $\pm$ 0,0002 $= \pm$ 0,02 %.

2. Perioada oscilaţiilor mici, măsurată cu o precizie pînă la 10^{-4} s, este egală cu 1,4196 s; aşadar, erorile de măsurare a perioadei sînt: cea absolută de $\pm$ 10^{-4} s, iar cea relativă $\Delta t/t$ de $\pm$ 0,00014 $= \pm$ $\pm$ 0,014 %.

Se cere să se calculeze valoarea maximă:

a) a erorii absolute şi

b) a erorii relative în determinarea lui g.

a) Pentru calculul erorilor parţiale la determinarea lui g, produse de erorile la măsurarea separată a lui l şi T, se calculează derivatele parţiale ale funcţiei (2.57) în raport cu l şi t

$$d_l g = \frac{\partial\left(4\pi^2\frac{l}{T^2}\right)}{\partial l}dl = \frac{4\pi^2}{T^2}dl \text{ şi } d_T g = \frac{\partial\left(4\pi^2\frac{l}{T^2}\right)}{\partial T}dT = -\frac{8\pi^2 l}{T^3}dT.$$

De aici, conform formulei (2.55), se ia suma mărimilor absolute ale diferenţialelor parţiale, se obţine:

$$dg = \frac{4\pi^2}{T^2}dl + 8\frac{\pi^2 l}{T^3}dT.$$

Înlocuind în această expresie valorile l şi dl (sau Δl), T şi dT (sau ΔT), se obţine

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{1{,}42^2\ \mathrm{s}^2}\cdot 0{,}0001\ \mathrm{m} + 8\,\frac{\pi^2\cdot 0{,}5002\ \mathrm{m}}{1{,}42^3\ \mathrm{s}^3}\cdot 10^{-4}\ \mathrm{s} =$$

$$= 0{,}00197\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 0{,}00277\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

adică valoarea maximă a erorii absolute la determinarea lui g cu aparatele date este aproximativ egală cu

$$\Delta g = \pm\ 0{,}0047\ \mathrm{m/s^2}.$$

b) Să calculăm logaritmul natural al expresiei (2.57)

$$\ln g = \ln 4 + 2\ln\pi + \ln l - 2\ln T;$$

luăm în partea dreaptă suma valorilor absolute ale termenilor, şi găsim diferenţiala acestei expresii

$$\mathrm{d}\ln g = \mathrm{d}\ln l + 2\,\mathrm{d}\ln T.$$

Efectuînd diferenţierea, obţinem

$$\frac{\mathrm{d}g}{g} = \frac{\mathrm{d}l}{l} \pm 2\,\frac{\mathrm{d}T}{T}.$$

Introducînd în această expresie valorile erorilor relative la determinarea lui l şi T, obţinem valoarea maximă a erorii relative la determinarea lui g cu aparatele date

$$\frac{\Delta g}{g} = \pm\ 0{,}00048,$$

sau aproximativ

$$\frac{\Delta g}{g} = \pm\ 0{,}05\ \%.$$

Toate calculele din acest exemplu au fost efectuate conform teoriei expuse mai înainte; totuşi, în practică ele pot fi efectuate mai simplu, deoarece determinînd una din erori (absolută sau relativă), cealaltă poate fi găsită direct din formula (2.47), dacă valoarea mărimii căutate este deja determinată, chiar şi aproximativ. Astfel, în acest exemplu, împărţind valoarea obţinută pentru eroarea absolută $\pm$ 0,0047 m/s^2 la valoarea medie a lui g (adică 9,80 m/s^2), obţinem direct valoarea erorii relative.

Mai departe trebuie îndreptată atenţia asupra faptului că, deşi eroarea relativă la măsurarea lui T (0,014%) este mai mică decît eroarea relativă la măsurarea lui l (0,02 %), influenţa primei erori asupra mărimii erorii rezultatului este mare; aceasta se explică prin faptul că în formula (2.57) T intervine la puterea a doua şi deci eroarea se dublează în rezultatul final.

II. Coeficientul de frecare internă al unui lichid η se determină prin metoda tubului capilar; pentru calculul lui η, din rezultatele măsurărilor se foloseşte formula lui Poiseuille

$$\eta = \frac{\pi p r^4 t}{8 l V} \tag{2.58}$$

unde p este presiunea sub care se află lichidul, r raza capilarului, l lungimea sa şi t timpul, în care se scurge volumul V de lichid.

Valorile acestor mărimi şi erorile măsurărilor lor, după cum a arătat un studiu preliminar al aparatelor sînt următoarele (tabela 2.13):

Tabela 2.13. **Erorile absolute şi erorile relative ale măsurărilor**

Mărimea măsurată	Valoarea aproximativă	Eroarea absolută a măsurării	Eroarea relativă
p	20 cm Hg	$\pm$ 0,1 mm Hg	$\pm$ 0,0005
r	0,001 m	$\pm$ 0,0001 m	$\pm$ 0,01
l	0,1 m	$\pm$ 0,0001 m	$\pm$ 0,001
t	25 s	$\pm$ 0,1 s	$\pm$ 0,004
V	$5 \cdot 10^{-6}$ m³	$\pm$ 10^{-9} m³	$\pm$ 0,0002

După aceste date trebuia să calculăm eroarea relativă la determinarea lui η. Să logaritmăm formula (2.58)

$$\ln \eta = \ln \pi + \ln p + 4 \ln r + \ln t - \ln l - \ln V$$

şi să diferenţiem această expresie

$$\mathrm{d} \ln \eta = \mathrm{d} \ln p + 4 \mathrm{d} \ln r + \mathrm{d} \ln t - \mathrm{d} \ln l - \mathrm{d} \ln V.$$

Executînd diferenţierea şi luînd în partea dreaptă suma valorilor absolute, ale tuturor termenilor (toate erorile se adună), obţinem

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} = \frac{\mathrm{d}p}{p} + 4\frac{\mathrm{d}r}{r} + \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{\mathrm{d}l}{l} + \frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Înlocuind în partea dreaptă a acestei expresii erorile relative obţinute mai sus pentru toate măsurările, rezultă:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \pm\, 0{,}0005 + 4 \cdot 0{,}01 + 0{,}004 + 0{,}001 + 0{,}0002,$$

adică eroarea relativă la determinarea lui η este

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \pm\, 0{,}0457,$$

sau aproximativ

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \pm\, 4{,}6\%.$$

După cum vedem, în cazul dat, influenţa mai mare asupra erorii rezultatului are eroarea la măsurarea razei r a capilarului, în primul rînd deoarece eroarea relativă la măsurarea sa este mai mare decît celelalte erori şi, în al doilea rînd, pentru că în formula (2.58) r intervine la puterea a patra, adică eroarea măsurării lui r în rezultatul final creşte de patru ori. De aici rezultă că dacă dorim să mărim precizia determinării coeficientului de frecare internă prin această metodă, trebuie mai întîi să micşorăm eroarea la măsurarea lui r, adică să efectuăm măsurarea razei capilarului cu un grad de precizie cît mai mare.

§ 2.15. Determinarea condiţiilor celor mai favorabile pentru măsurări

Prin aceleaşi metode ale calculului diferenţial se reuşeşte să se rezolve, deşi nu totdeauna, problema găsirii condiţiilor celor mai favorabile pentru măsurări.

Condiţiile cele mai favorabile pentru măsurări vor fi, evident, acelea pentru care eroarea rezultatului este minimă. De aici rezultă că din punct de vedere matematic problema se reduce la găsirea condiţiilor de minim ale expresiilor (2.53) în cazul cel mai simplu şi (2.56) într-un caz mai complex. Pentru aceasta trebuie să folosim regulile generale din calculul diferenţial, pentru găsirea minimelor funcţiilor de una sau mai multe variabile, după cum urmează:

1. În primul caz trebuie să găsim derivata expresiei (2.52) în raport cu x şi s-o egalăm cu zero, determinînd de aici valoarea respectivă pentru x; să presupunem că ea este a. Luăm derivata a doua a funcţiei (2.52) în raport cu x şi în expresia ei să înlocuim pe x cu valoarea a; dacă pentru $x = a$ derivata a doua este pozitivă, funcţia (2.52) pentru $x = a$ prezintă un minim.

2. În al doilea caz trebuie să găsim derivatele parţiale de ordinul întîi ale expresiei (2.56) după toate variabilele independente şi din ecuaţiile obţinute, prin anularea acestor derivate, să determinăm valorile tuturor variabilelor. Condiţiile suplimentare ale minimului cer din nou determinarea semnului derivatelor parţiale de ordinul doi pentru valorile găsite ale variabilelor.

Determinarea condiţiilor celor mai favorabile pentru măsurări nu dă totdeauna un rezultat pozitiv, deoarece nu toate funcţiile au un minim. În anumite cazuri, însă, determinarea condiţiilor de minim ale erorii, adică determinarea condiţiilor celor mai favorabile pentru măsurări poate fi făcută foarte simplu.

Exemplu. La determinarea rezistenţei conductorilor prin metoda punţii cu fir rezistenţa R_x se calculează cu formula

$$R_x = R_0 \frac{l_1}{l_2}, \tag{2.59}$$

unde R_0 este etalonul de rezistenţă, iar l_1 şi l_2 sînt lungimile celor două părţi ale firului punţii, în care el este împărţit prin contactul

mobil, atunci cînd se obține devierea zero a galvanometrului. Să determinăm poziția optimă a contactului mobil (adică lungimea relativă l_1 și l_2), pentru care eroarea măsurărilor este minimă.

Lungimea întregului conductor de măsurat o vom considera constantă, notînd cu l. Evident,

$$l_1 + l_2 = l$$

și formula (2.59) poate fi scrisă sub forma

$$R_x = R_0 \frac{l_1}{l - l_1}.$$

Aplicînd logaritmii naturali acestei expresii

$$nR_x = \ln R_0 + \ln l_1 - \ln (l - l_1).$$

Să calculăm diferențiala acestei expresii, luînd în prima parte suma valorilor absolute ale tuturor termenilor, adică să găsim, conform (2.53), valoarea erorii relative a măsurărilor

$$\frac{dR_x}{R_x} = \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l - l_1}\right) dl.$$

Această expresie va avea un minim atunci, cînd coeficientul lui dl va fi minim; să-l notăm cu Z, adică să punem

$$Z = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l - l_1}. \tag{2.60}$$

Să calculăm prima și a doua derivată a lui Z în raport cu l_1

$$\frac{dZ}{dl_1} = \frac{1}{(l - l_1)^2} - \frac{1}{l_1^2}, \quad \frac{d^2Z}{dl_1^2} = \frac{2}{(l - l_1)^3} + \frac{2}{l_1^3}.$$

Pentru toate valorile posibile l_1, derivata a doua este pozitivă, deoarece l_1 este totdeauna mai mic decît l. De aceea, funcția (2.60) are un minim pentru o valoare a lui l_1, care se obține, dacă egalăm cu zero prima derivată; așadar,

$$\frac{1}{(l - l_1)^2} - \frac{1}{l_1^2} = 0,$$

de unde obținem

$$l_1 = \frac{l}{2}, \tag{2.61}$$

adică condițiile cele mai bune de măsurare vor fi realizate în cazul în care contactul mobil se află la mijlocul ($l_1 = l_2 = l/2$) conductorului de măsurat. Conform formulei (2.59), pentru aceasta este necesar ca etalonul R_0 și rezistența măsurată R_x să fie aproximativ de același ordin de mărime.

2.3
Tabele fizice

§ 2.16. Proprietăţile generale ale corpurilor

Tabela 2.14. **Masele atomice relative (greutăţile atomice) ale elementelor chimice**

În tabelă sînt date: denumirile elementelor chimice în ordine alfabetică, simbolurile lor, numerele de ordine şi masele atomice relative după datele din 1960.

Parantezele drepte indică elementele obţinute în mod artificial; pentru ele este dată masa atomică relativă a izotopului cu perioada de înjumătăţire cea mai mare.

Tabela 2.14

Denumirea	Simbol	Numărul de ordine Z	Masa atomică relativă M_A	Denumirea	Simbol	Numărul de ordine Z	Masa atomică relativă M_A
Actiniu	Ac	89	[227]	Cositor			
Aluminiu	Al	13	26,9815	(Staniu)	Sn	50	118,69
Americiu	Am	95	[243]	Crom	Cr	24	51,996
Argint	Ag	47	107,870	Cupru	Cu	29	63,54
Argon	Ar	18	39,948	Curium	Cm	96	[247]
Arsen	As	33	74,9216	Dysprosiu	Dy	66	162,50
Astatiniu	At	85	[210]	Einsteiniu	Es	99	[254]
Aur	Au	79	196,967	Erbiu	Er	68	167,26
Azot	N	7	14,0067	Europiu	Eu	63	151,96
Bariu	Ba	56	137,34	Fermiu	Fm	100	[253]
Beriliu				Fier	Fe	26	55,847
(Gluciniu)	Be	4	9,0122	Fluor	F	9	18,9984
Berkeliu	Bk	97	[249]	Fosfor	P	15	30,9738
Bismut	Bi	83	208,980	Franciu	Fr	87	[223]
Bor	B	5	10,811	Gadoliniu	Gd	64	157,25
Brom	Br	35	79,909	Galiu	Ga	31	69,72
Cadmiu	Cd	48	112,40	Germaniu	Ge	32	72,59
Calciu	Ca	20	40,08	Hafniu	Hf	72	178,49
Californiu	Cf	98	[251]	Heliu	He	2	4,0026
Carbon	C	6	12,01115	Hidrogen	H	1	1,00797
Ceriu	Ce	58	140,12	Holmiu	Ho	67	164,930
Cesiu	Cs	55	132,905	Indiu	In	49	114,82
Clor	Cl	17	35,453	Iod	J	53	126,9044
Cobalt	Co	27	58,9332	Iridiu	Ir	77	192,2

Tabela 2.14 *(continuare)*

Denumirea	Simbol	Numărul de ordine Z	Masa atomică relativă M_A	Denumirea	Simbol	Numărul de ordine Z	Masa atomică relativă M_A
Kripton	Kr	36	83,80	Radon	Rn	86	[222]
Lantan	La	57	138,91	Reniu	Re	75	186,2
Lawrenciu	Lw	103	[255]	Rhodiu	Rh	45	102,905
Litiu	Li	3	6,939	Rubidiu	Rb	37	85,47
Luteţiu	Lu	71	174,97	Rutheniu[2])	Ru	44	101,07
(Cassiopeium)				Samariu	Sm	62	150,35
Magneziu	Mg	12	24,312	Scandiu	Sc	21	44,956
Mangan	Mn	25	54,9380	Siliciu	Si	14	28,086
Mendeleeviu	Md	101	[256]	Seleniu	Se	34	78,96
Mercur	Hg	80	200,59	Sodiu	Na	11	22,9898
(Hidrargir)				(Natriu)			
Molibden	Mo	42	95,94	Stronţiu	Sr	38	87,62
Neon	Ne	10	20,183	Stibiu	Sb	51	121,75
Neptuniu	Np	93	[237]	(Antimoniu)			
Neodin	Nd	60	144,24	Sulf	S	16	32,064
Nichel	Ni	28	58,71	Taliu	Tl	81	204,37
Niobiu	Nb	41	92,906	Tantal	Ta	73	180,948
(Columbiu)				Telur	Te	52	127,60
Nobeliu	No	102	[255]	Terbiu	Tb	65	158,924
Oxigen	O	8	15,9994	Tehnetiu	Tc	43	[99]
Osmiu	Os	76	190,2	Titan	Ti	22	47,90
Paladiu	Pd	46	106,4	Toriu	Th	90	232,038
Platină	Pt	78	195,09	Tuliu	Tu	69	168,934
Plutoniu	Pu	94	[242]	Uraniu	U	92	238,03
Plumb	Pb	82	207,19	Vanadiu	V	23	50,942
Poloniu	Po	84	[210]	Xenon	Xe	54	131,30
Potasiu	K	19	39,102	Yterbiu	Yb	70	173,04
(Kaliu)				Ytriu	Y	39	88,905
Praseodim	Pr	59	140,907	Zinc	Zn	30	65,37
Prometiu	Pm	61	[145]	Zirconiu	Zr	40	91,22
Protactiniu	Pa	91	[231]	Wolfram	W	74	183,85
Radiu	Ra	88	[226]	(Tungsten)			

Note la tabela 2.14. 1) Masele atomice relative erau date înainte în aşa-numita *scară chimică*, în care masa atomică relativă a oxigenului era luată riguros egală cu 16. În fizică, în special la studiul fenomenelor nucleare, se folosea aşa-numita *scară fizică*, (v. tabela 2.10) în care se considera riguros egală cu 16 masa atomică relativă a izotopului oxigenului ^{16}O. Oxigenul natural are trei izotopi stabili (vezi tabela 2.15) a căror pondere în condiţii naturale rămîne perfect constantă şi anume

$$^{16}O(99,76\%),\ ^{17}O(0,04\%) \text{ şi } ^{18}O(0,20\%).$$

Aşadar, unitatea atomică de masă (amu) în scara fizică este ceva mai mică decît aceeaşi unitate în scara chimică; raportul lor este

$$\frac{\text{amu în scara chimică}}{\text{amu în scara fizică}} = 1{,}000278.$$

Datorită acestui fapt, valorile numerice în scara chimică ale maselor atomice relative, precum şi valorile diferitelor mărimi care depind de ele, diferă puţin de valorile aceloraşi mărimi în scara fizică. Astfel, masa atomică relativă a hidrogenului, în scara chimică era egală cu 1,00800, iar în scara fizică cu 1,00828; masa atomică relativă a oxigenului natural, riguros egală cu 16 în scara chimică, era în scara fizică egală cu 16,004448 etc.

Astăzi, însă, în urma deciziei luate de Uniunea Internaţională de Chimie pură şi aplicată, la conferinţa din 1961, masele atomice relative ale elementelor au fost recalculate pe baza considerentului că masa atomică relativă a izotopului ^{12}C este riguros egală cu 12.

2) *Ruthenia* este denumirea latină a Rusiei. Ruteniul a fost descoperit de profesorul K.K.Klaus (1796—1864) de la Universitatea din Kazan, în reziduurile de la prelucrarea platinei de Ural.

T a b e l a 2.15. **Sistemul periodic al elementelor**

Esenţa legii periodice, stabilită de D.I. Mendeleev, a fost definită foarte bine de autor însuşi: „Proprietăţile chimice şi fizice ale combinaţiilor de elemente sînt într-o dependenţă periodică de valorile masei atomice relative a elementelor". D.I. Mendeleev şi-a susţinut în mod foarte convingător şi explicit afirmaţia sa, arătînd că dacă elementele chimice sînt ordonate după valorile crescînde ale maselor atomice relative, atunci, în timp ce în tot acest şir valorile maselor atomice relative variază numai într-un singur sens, proprietăţile elementelor variază periodic; cu alte cuvinte, întregul şir de elemente poate fi împărţit în anumite intervale, în limitele cărora proprietăţile elementelor prezintă o periodicitate clară. Pe baza acestui fapt, Mendeleev a compus primul tabel periodic al elementelor, în care acestea au fost împărţite în opt grupe, astfel încît elementele cu proprietăţi comune au fost ordonate unul sub celălalt pe verticală. Mai tîrziu, la aceste opt grupe a fost adăugată încă o grupă, grupa zero a gazelor inerte.

Pe baza acestei periodicităţi, Mendeleev a tras o serie de concluzii importante; astfel în tabelul periodic el a lăsat o serie de locuri libere corespunzătoare (conform concluziilor sale) unor elemente încă nedescoperite în vremea sa. De asemenea el a mai tras concluzia că valoarea masei atomice relative a unui element poate fi corectată „cunoscînd analogii lui". Aceste concluzii au fost confirmate mai tîrziu într-un mod strălucit.

În timpurile noastre în sistemul periodic al lui Mendeleev a fost făcută o modificare esenţială, ceea ce a permis explicarea cauzelor periodicităţii proprietăţilor elementelor, cauze care înainte rămăseseră neclarificate.

	GRUPELE				
	I	II	III	IV	V
1	1 H				
K	1				
2	3 Li	4 Be	5 B	6 C	7 N
K,L	2,1	–,2	–,3	–,4	–,5
3	11 Na	12 Mg	13 Al	14 Si	15 P
K,L,M	2,8,1	–,–,2	–,–,3	–,–,4	–,–,5
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V
	2,8,8,1	–,–,8,2	–,–,9,2	–,–,10,2	–,–,11,2
	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As
K,L,M,N	2,8,18,1	–,–,–,2	–,–,–,3	–,–,–,4	–,–,–,5
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb
	2,8,18,8,1	–,–,–,8,2	–,–,–,9,2	–,–,–,10,2	–,–,–,12,1
	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb
K,L,M,N,O	2,8,18,18,1	–,–,–,–,2	–,–,–,–,3	–,–,–,–,4	–,–,–,–,5
6	55 Cs	56 Ba	57 La 58...71	72 Hf	73 Ta
	2,8,18,18,8,1	–,–,–,–,8,2	–,–,–,–,9,2	2,8,18,32,10,2	–,–,–,–,11,2
	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi
K,L,M,N,O,P	2,8,18,32,18,1	–,–,–,–,–,2	–,–,–,–,–,3	–,–,–,–,–,4	–,–,–,–,–,5
7	87 Fr	88 Ra	89 Ac 90...103		
K,L,M,N,O,P,Q	2,8,18,32,18,8,1	–,–,–,–,–,8,2	–,–,–,–,–,9,2		

6 Lantanide	58 Ce 2,8,18,19,9,2	59 Pr -,-,-,20,9,2	60 Nd -,-,-,21,9,2	61 Pm -,-,-,22,9,2	62 Sm -,-,-,23,9,2	63 Eu -,-,-,24,9,2	64 Gd -,-,-,25,9,2

7 Actinide	90 Th 2,8,18,32,18,10,2	91 Pa -,-,-,-,20,9,2	92 U -,-,-,-,21,9,2	93 Np -,-,-,-,22,9,2	94 Pu -,-,-,-,23,9,2	95 Am -,-,-,-,24,9,2	96 Cm -,-,-,-,25,9,2

Tabela 215

ELEMENTELOR					
VI	VII	VIII			0
					2 He
					2
8 O	9 F				10 Ne
–,6	–,7				2,8
16 S	17 Cl				18 Ar
–,–,6	–,–,7				2,8,8
24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	
–,–,13,1	–,–,13,2	–,–,14,2	–,–,15,2	–,–,16,2	
34 Se	35 Br				36 Kr
–,–,–,6	–,–,–,7				2,8,18,8
42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	
–,–,–,13,1.	–,–,–,14,1	–,–,–,15,1	–,–,–,16,1	–,–,18,18,0	
52 Te	53 J				54 Xe
–,–,–,–,6	–,–,–,–,7				2,8,18,18,8
74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	
–,–,–,–,12,2	–,–,–,–,13,2	–,–,–,–,14,2	–,–,–,–,15,2	–,–,–,–,17,1	
84 Po	85 At				86 Rn
–,–,–,–,–,6	–,–,–,–,–,7				2,8,18,32,18,8

65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tu	70 Yb	71 Lu
–,–,–,26,9,2	–,–,–,27,9,2	–,–,–,28,9,2	–,–,–,29,9,2	–,–,–,30,9,2	–,–,–,31,9,2	–,–,–,32,9,2

97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lw
–,–,–,–,26,9,2	–,–,–,–,27,9,2	–,–,–,–,28,9,2	–,–,–,–,29,9,2	–,–,–,–,30,9,2	–,–,–,–,31,9,2	–,–,–,–,32,9.2

Inițial periodicitatea proprietăților a fost pusă de Mendeleev în corespondență cu masa atomică relativă a elementelor. Din studiul structurii și proprietăților interne ale elementelor, știm în prezent că periodicitatea proprietăților chimice ale elementelor nu depinde de masele lor atomice relative, ci de numărul de ordine din tabelă. Acesta este egal cu numărul de sarcini elementare pozitive (protoni) ale nucleului și cu numărul electronilor atomului respectiv în stare neutră din punct de vedere electric. În atom electronii sînt distribuiți pe anumite pături, al căror număr crește cu creșterea numărului de ordine; atomii grei pot avea chiar pînă la șapte pături; aceste pături se notează cu literele K, L, M, N, O, P și Q (vezi tabela 2.15). Numărul maxim de electroni, care pot exista pe fiecare dintre aceste pături, este cunoscut. Se știe de asemenea că formarea tuturor păturilor are loc după o aceeași schemă. În consecință, se constată că structura păturilor periferice se repetă periodic la formarea lor, așa cum se vede din tabela 2.15, iar structura păturilor periferice ale atomului determină proprietățile chimice și unele proprietăți fizice ale elementelor cum, ar fi conductibilitatea electrică, potențialul de ionizare, spectrul optic etc. Așadar, periodicitatea în proprietățile elementelor chimice se explică prin periodicitatea în structura păturilor electronice periferice din atomi. Date mai detaliate despre păturile electronice atomice sînt indicate în capitolul „Structura atomului".

În tabela 2.15 sînt date simbolurile chimice și numerele de ordine ale elementelor și, în afară de aceasta, sînt indicate păturile lor electronice și numărul de electroni de pe fiecare pătură. În legătură cu aceste date, trebuie făcute următoarele mențiuni:

1. Masele atomice relative ale elementelor și denumirile lor sînt date în tabelele 2.14 și 2.16. Anumite denumiri speciale ale elementelor precum și simbolurile lor, adoptate în alte țări, sînt indicate în tabela 2.17.

2. Nomenclatura generală a păturilor electronice ale atomului este schematizată în desenul din dreapta, jos al tabelei 2.15; păturile electronice, care se referă la diferite rînduri ale tabelei, sînt indicate pentru fiecare dintre aceste rînduri în prima coloană. Numărul de electroni din fiecare pătură în parte este dat numai pentru primul și ultimul reprezentant al rîndului; pentru celelalte elemente sînt indicate numai numerele de electroni de pe una, două sau trei pături periferice, unde aceste numere variază, iar numerele de electroni din păturile interioare, care rămîn neschimbate, sînt indicate prin liniuțe.

Elementele chimice pot fi împărțite în diferite grupe, avînd componenți care manifestă proprietăți comune. Astfel de împărțiri pot fi foarte diferite în funcție de proprietățile care stau la baza lor. În legătură cu aceste probleme, se pot spune aici următoarele:

1. În ceea ce privește starea de agregare a elementelor trebuie menționat că *în condițiile obișnuite de temperatură și presiune*:

a) elementele azot (N), argon (Ar), hidrogen (H), heliu (He), oxigen (O), kripton (K), xenon (Xe), neon (Ne) și radon (Rn) se află în stare gazoasă;

b) elementele brom (Br) și mercur (Hg) se află în stare lichidă;

c) toate celelalte elemente sînt în stare solidă.

2. Grupele principale, în care se împart în mod obișnuit elementele chimice, sînt *grupa metalelor* — foarte cuprinzătoare și grupa metaloizilor — mult mai mică; această grupă mai este denumită în ultimul timp și *grupa nemetalelor*. Această împărțire se bazează pe deosebirea netă dintre unele proprietăți fizice și chimice, pe care le prezintă reprezentanții acestor grupe. Totuși, trebuie menționat că există un număr mic de elemente, care după unele proprietăți fac parte din metale, iar după altele din metaloizi, formînd un fel de grupă intermediară. Deși nu este posibilă stabilirea unei limite precise între aceste două grupe, totuși împărțirea elementelor în metale și nemetale este destul de justificată în practică.

Metale se consideră elementele, care au o conductibilitate termică bună, o conductibilitate electrică bună, au un potențial de ionizare coborît, o structură cristalină simplă și încă alte cîteva proprietăți. Din punct de vedere chimic, metalele prezintă proprietăți electrochimice comune, capacitatea de a substitui hidrogenul în acizi cu formarea sărurilor etc. Metalele mai au și alte proprietăți fizice: au o anumită culoare și luciu, au maleabilitate și ductibilitate.

Pe baza acestor proprietăți, din metale fac parte elementele: actiniu (Ac), aluminiu (Al), argint (Ag), aur (Au), bariu (Ba), beriliu (Be), bismut (Bi), cadmiu (Cd), calciu (Ca), ceriu (Ce), cesiu (Cs), cobalt (Co), cositor (Sn), crom (Cr), cupru (Cu), dysproziu (Dy), erbiu (Er), europiu (Eu), fier (Fe), gadoliniu (Gd), galiu (Ga), germaniu (Ge), hafniu (Hf), holmiu (Ho), iudin (Iu), iridiu (Ir), lantan (La), litiu (Li), lutențiu (Lu), magneziu (Mg), mercur (Hg), molibden (Mo), natriu (Na), neodim (Nd), nichel (Ni), niobiu (Nb), osmiu (Os), paladiu (Pd), platină (Pt), plumb (Pb), poloniu (Po), potasiu (K), prazeodim (Pr), protactiniu (Pa), radiu (Ra), reniu (Re), rhodin (Rh), rubidiu (Rb), ruteniu (Ru), samariu (Sm), scandiu (Sc), stronțiu (Sr), stibiu (Sb), taliu (Tl), tantal (Ta), terbiu (Tb), titan (Ti), toriu (Th), tulin (Tu), uraniu (U), vanadiu (V), yterbiu (Yb), ytriu (Y), zinc (Zn), zirconiu (Zr), wolfram (W).

În afară de aceasta, din metale mai fac parte:

a) dintre elementele descoperite recent — technetiul (Te), promețiu (Pm) și franciu (Fr) — precum și elementele transuraniene neptuniu (Np), plutoniu (Pu), americiu (Am), curim (Cm), berkeliu (Bk), californiu (Cf), einsteiniu (En), fermiu (Fm), mendeleeviu (Mv), nobeliu (No) și lawrenciu (Lw);

b) manganul (Mn) și arsenul (As), prin proprietățile lor fizice.

Dintre metaloizi fac parte: azotul (N), borul (B), bromul (Br), carbonul (C), clorul (Cl), fosforul (P), fluorul (F), iodul (J), oxigenul (O), seleniul (Se), siliciul (Si), sulful (S), telurul (Te).

În afară de acestea, metaloid mai este și astatiniul (At); în ceea ce privește hidrogenul (H) prin proprietățile sale fizice este și el un metaloid.

O grupă specială o constituie *gazele nobile*: argon (Ar), heliu (He), kripton (Kr), neon (Ne), radon (Rn) și xenon (Xe) care nu formează combinații chimice stabile.

De asemenea o grupă deosebită formează elementele radioactive natural.

Din grupa metalelor se separă grupe mai mici în funcţie de anumite proprietăţi comune. Astfel, este grupa elementelor *pămînturilor rare*: din această grupă, în afară de lantanide, mai fac parte scandiul şi ytriul. Aşadar, în această grupă intră următoarele metale: ceriu, dysprosiu, europiu, erbiu, gadoliniu, holmiu, lantan, luteţiu, neodin, praseodim, prometiu, samariu, scandiu, terbiu, tuliu, yterrbiu, ytriu. Toate aceste elemente au proprietăţi chimice foarte apropiate, ceea ce constituie o consecinţă directă a identităţii aproape totale în structura păturilor lor electronice periferice (vezi tabela 2.15).

De asemenea, pe baza proprietăţilor chimice comune mai deosebim grupele:

a) metalele alcaline, din care fac parte: litiul, sodiul, potasiul, rubidiul, cesiul şi franciul;

b) metalele alcalino-pămîntoase, din care fac parte: bariul, calciul, radiul şi stronţiul.

Platina împreună cu iridiul, osmiul, paladiul, rhodiul şi ruteniul formează grupa metalelor platinice.

Metalele foarte stabile din punct de vedere chimic şi care aproape că nu sînt oxidabile chiar şi la temperaturi înalte, formează grupa metalelor nobile; din ea fac parte: aurul, iridiul, paladiul, platina, rhodiul şi argintul.

După proprietăţile magnetice se separă grupa elementelor feromagnetice, din care fac parte: fierul, cobaltul şi nichelul, iar din elementele rare gadoliniul.

Metalele se împart de asemenea în uşoare şi grele considerînd ca limită convenţională densitatea de circa 3,5—4,0 g/cm^3. Din metalele uşoare fac parte: aluminiul, bariul, beriliul, potasiul, calciul, litiul, magneziul, sodiul, stronţiul şi cesiul.

Tot convenţional metalele se împart în uşor fuzibile şi greu fuzibile; din această ultimă categorie fac parte metalele cu temperatura de topire mai mare de 800—1000 °C.

În tehnică metalele se împart în metale *negre* şi *colorate*. Metalele negre sînt fierul şi aliajele lui; celelalte metale sînt colorate, însă dintre acestea se exclude grupa pămînturilor rare şi grupa metalelor nobile.

Printre elementele chimice o grupă specială o formează elementele radioactive, ai căror atomi au proprietatea de a se dezintegra spontan. Astfel de proprietăţi au:

1. Unele elemente naturale, care sînt situate în special la sfîrşitul tabelei periodice pînă la uraniu inclusiv. (tabela 2.15, grupa „Actinide"); dintre celelalte elemente naturale numai cinci prezintă urme slabe, dar sigure, de radioactivitate.

2. Elementele chimice nestabile şi izotopii care au fost obţinuţi în prezent prin diferite reacţii nucleare; dintre aceste elemente nestabile şi izotopi nestabili menţionăm:

a) grupa elementelor artificiale cu numărul de ordine mai mare decît cel al uraniului, adică situată în sistemul periodic dincolo de uraniu; aceste elemente au fost denumite elemente trans-uraniene;

b) o grupă mare de izotopi radioactivi (artificiali), care au în prezent aplicaţii foarte numeroase.

Tabela 2.16. Elementele chimice în ordinea numerelor atomice (Z)

În tabela 2.16, în afară de numărul de ordine al elementelor, de simbolul, de denumirea și de masa lor atomică relativă mai sînt date și indicații istorice scurte: cine și cînd a descoperit elementul respectiv. Datele din tabelă marchează în special anii cînd elementele au fost obținute sub formă pură, adică în stare metalică sau liberă, și nu sub formă de combinații chimice; se dă de asemenea numele savantului care a obținut elementul respectiv pentru prima dată. Indicații suplimentare în legătură cu aceste probleme sînt date, pentru cîteva elemente, în notele la tabelă. Prescurtarea din tabelă „c.d.a." înseamnă „cunoscut din antichitate", iar celelalte prescurtări sînt ușor de înțeles.

Tabela 2.16

Numărul de ordine Z	Simbolul	Denumirea	Masa atomică relativă M_A	Cine l-a descoperit	Anul descoperirii
1	H	Hidrogen	1,00797 ± ± 0,00001	Cavendish	1766
2	He	Heliu[1])	4,0026	Ramsay și Clive	1895
3	Li	Litiu	6,939	Arfvedson	1817
4	Be	Beriliu	9,0122	Wöhler și Bussy	1828
5	B	Bor	10,811 ± ± 0,003	Gay-Lussac și Thenard	1808
6	C	Carbon	12,01115 ± ± 0,00005	c.d.a.	—
7	N	Azot	14,0067	D. Rutherford	1772
8	O	Oxigen	15,9994 ± ± 0,0001	Pristley și Scheele	1774
9	F	Fluor[2]) Neon	18,9984	Moissan	1886
10	Ne	Sodiu	20,183	Ramsay și Travers	1898
11	Na	(Natriu)	22,9898	Davy	1807
12	Mg	Magneziu[3])	24,312	Liebig și Bussy	1831
13	Al	Aluminiu	26,9815	Wöhler	1827
14	Si	Siliciu	28,086 ± ± 0,001	Berzelius	1823
15	P	Fosfor	30,9738	Brand	1669
16	S	Sulf	32,064 ± ± 0,003	c.d.a.	—
17	Cl	Clor	35,453	Scheele	1774
18	Ar	Argon	39,948	Rayleigh și Ramsay	1894

Tabela 2.16 *(continuare)*

Numărul de ordine Z	Simbolul	Denumirea	Masa atomică relativă M_A	Cine l-a descoperit	Anul descoperirii
19	K	Potasiu (Kaliu)	39,102	Davy	1807
20	Ca	Calciu	40,08	Davy (Berzelius)	1808
21	Sc	Scandiu	44,956	Nilson	1879
22	Ti	Titan[4])	47,90	Gregor	1791
23	V	Vanadiu	50,942	Sefström	1830
24	Cr	Crom	51,996	Vauquelin	1797
25	Mn	Mangan	54,9380	Gahn	1774
26	Fe	Fier	55,847	c.d.a.	—
27	Co	Cobalt	58,9332	Brandt	1735
28	Ni	Nichel	58,71	Cronstedt	1751
29	Cu	Cupru	63,54	c.d.a.	—
30	Zn	Zinc	65,37	Markgraf	1746
31	Ga	Galiu	69,72	Lecoq de Boisbaudran	1875
32	Ge	Germaniu	72,59	Winkler	1886
33	As	Arsen[5])	74,9216	Albert cel Mare	sec. XIII
34	Se	Seleniu	78,96	Berzelius	1817
35	Br	Brom	79,909	Ballard	1826
36	Kr	Kripton	83,80	Ramsay şi Travers	1898
37	Rb	Rubidiu	85,47	Bunsen şi Kirchhoff	1861
38	Sr	Stronţiu	87,62	Davy	1808
39	Y	Ytriu	88,905	Wöhler	1828
40	Zr	Zirconiu	91,22	Berzelius	1824
41	Ni	Niobiu[6])	92,906	Rose	1844
42	Mo	Molibden	95,94	Hjelm	1782
43	Tc	Techneţiu	[99]	Perrier şi Segrè	1937
44	Ru	Ruteniu	101,07	Claus	1844
45	Rh	Rhodiu	102,905	Wollaston	1803
46	Pd	Paladiu	106,4	Wollaston	1803
47	Ag	Argint	107,870	c.d.a.	—
48	Cd	Cadmiu	112,40	Hermann şi Stromberg	1817
49	In	Indiu	114,82	Reich şi Richter	1863
50	Sn	Cositor (Staniu)	118,69	c.d.a.	—
51	Sb	Stibiu (Antimoniu)	121,75	B. Valentin	sec. XV

Tabela 2.16 *(continuare)*

Numărul de ordine Z	Simbolul	Denumirea	Masa atomică relativă M_A	Cine l-a descoperit	Anul descoperirii
52	Te	Telur	127,60	Riechenstein	1782
53	J	Iod	126,9044	Courtois	1811
54	Xe	Xenon	181,30	Ramsay şi Travers	1898
55	Cs	Cesiu	132,905	Bunsen şi Kirchhoff	1860
56	Ba	Bariu	137,34	Davy	1808
57	La	Lantan	138,91	Mosander	1839
58	Ce	Ceriu[7])	140,12	Hildebrandt şi Norton	1875
59	Pr	Praseodiu	140,907	Weisbach	1885
60	Nd	Neodim[8])	144,24	Weisbach	1885
61	Pm	Prometiu	[145]	Marinsky şi Glendemin	1947
62	Sm	Samariu	150,35	Lecoq de Boisbaudran	1879
63	Eu	Europiu	151,96	Demarcay	1896
64	Gd	Gadoliniu	157,25	Marignac şi Lecoq de Boisbaudran	1880
65	Tb	Terbiu	158,924	Mosander	1843
66	Dy	Dysprosiu	162,50	Lecoq de Boisbaudran	1886
67	Ho	Holmiu	164,930	Cleve	1880
68	Er	Erbiu	167,26	Mosander	1843
69	Tu	Tuliu	168,934	Cleve	1879
70	Yb	Yterbiu	173,04	Marignac	1878
71	Lu	Luteţiu	174,97	Urbain	1908
72	Hf	Hafniu	178,49	Coster şi Hevesy	1923
73	Ta	Tantal	180,948	Ekeberg	1802
74	W	Wolfram	183,85	d'Elhuyar	1783
75	Re	Reniu	186,2	Noddack şi Tacke	1925
76	Os	Osmiu	190,2	Tennant	1803
77	Ir	Iridiu	192,2	Tennant	1804
78	Pt	Platină[9])	195,09	menţionat din sec. XVI	
79	Au	Aur	196,967	c.d.a.	—
80	Hg	Mercur (Hidrargir)	200,59	menţionat din sec. III î.e.n.	
81	Tl	Taliu	204,37	Crookes	1861
82	Pb	Plumb	207,19	menţionat de Plinius	
83	Bi	Bismut	208,980	menţionat de V. Valentin din sec. XV	
84	Po	Poloniu	[210]	M. Curie	1898

Tabela 2.16 *(continuare)*

Numărul de ordine Z	Simbolul	Denumirea	Masa atomică relativă M_A	Cine l-a descoperit	Anul descoperirii
85	At	Astatiniu	[210]	Curzon şi Mackenzie	1940
86	Rn	Radon	[222]	Dorn	1900
87	Fr	Franciu	[223]	M. Perey	1939
88	Ra	Radiu	[226]	M. Curie	1898
89	Ac	Actiniu	[227]	Debierne	1902
90	Th	Thoriu	232,038	Berzelius	1828
91	Pa	Protactiniu	[231]	Meitner şi Hahn	1918
92	U	Uraniu[10])	238,03	Klaproth	1789
93	Np	Neptuniu	[237]	Mac Millan şi Abelson	1940
94	Pu[3]	Plutoniu	[242]	Seaborg, Seggre ş.a.	1940
95	Am	Americiu	[243]	Seaborg, James, Ghiorso	1944
96	Cm	Curium	[247]	Seaborg, James, Ghiorso	1944
97	Bk	Berkeliu	[249]	Seaborg şi Thompson	1949
98	Cf	Californiu	[251]	Seaborg, Thompson ş.a.	1950
99	Es	Einsteiniu	[254]	A. Ghiorso ş.a.	1954
100	Fm	Fermiu	[253]	Studier ş.a.	1954
101	Md	Mendeleeviu	[256]	Ghiorso ş.a.	1955
102	No	Nobeliu	[255]	?	1957-1958
103	Lw	Lawrenciu	[255]	Ghiorso ş.a.	1961

Note la tabela 2.16. 1) *Janssen* şi, independent de el, *Lockyer* în 1868 au observat în spectrul Soarelui linii necunoscute pînă atunci; elementul nou căruia îi aparţin aceste linii a fost denumit *heliu*, deoarece s-a presupus că el se află numai în Soare. După 27 ani, *Ramsay* şi *Clive* au observat aceleaşi linii în spectrul unei gaz nou, obţinut de ei la analiza minereului cleveit; denumirea de heliu pentru acest element a fost păstrată. 2) Încă la sfîrşitul secolului al XVIII-lea se ştia că atunci cînd acidul sulfuric acţionează asupra fluorinei se degajă un acid special, care dizolvă sticla. În anul 1810 *Ampère* a arătat că acest acid se aseamănă cu acidul clorhidric şi este o combinaţie între hidrogen şi un element necunoscut pe care l-a numit fluor. Sub formă pură, fluorul a putut fi obţinut de *Moissan* abia în 1886. 3) Oxidul de magneziu a fost cunoscut de mult. El a fost studiat de *Black* încă din 1775. *Davy*, în 1808, a încercat să obţină magneziu metalic,

însă nu a reușit să obțină metalul sub formă pură. 4) Bioxidul de titan a fost obținut în laborator încă la sfîrșitul secolului al XVIII-lea. Berzelius a obținut titanul, însă nu perfect pur. Titan metalic mai pur a fost obținut de *Gregor*, iar apoi de *Moissan*. 5) Combinațiile sulfurice ale arsenului au fost cunoscute încă din antichitate. 6) La începutul secolului al XIX-lea s-a obținut un amestec de niobiu și tantal, care era considerat ca un element nou; el a fost denumit columbiu. În America și Anglia niobiul poartă pînă în prezent denumirea de columbiu. 7) Sub formă de oxid, ceriul a fost obținut în 1803. 8) Timp îndelungat amestecul de praseodim și neodim a fost considerat element separat, denumit *didiu* (Di). 9) Platina a fost descrisă în 1750; pînă în 1810 singurul loc, unde se găsea platina, era Columbia. După aceea, platina a fost găsită și în alte locuri, inclusiv în regiunea Uralului, care pînă în prezent este sursa cea mai bogată de platină. 10) Bioxidul de uraniu, obținut pentru prima dată în 1789, a fost considerat la început ca un element nou. Uraniul metalic a fost obținut pentru prima dată în 1842, iar proprietățile sale radioactive au fost descoperite abia în 1896.

Tabela 2.17. **Proprietățile generale ale elementelor chimice și ale unor combinații anorganice**

În tabelă, în afară de denumirile și formulele chimice ale combinațiilor anorganice, mai sînt date:

a) masa moleculară (greutatea moleculară) (*M*):

b) starea fizică în condiții de temperatură și presiune obișnuite (stare solidă, lichidă sau gazoasă s.,l. sau g.);

c) pentru corpurile solide și lichide densitatea este exprimată în grame pe centimetru cub (la 20 °C), iar pentru gaze în grame pe litru (în condiții normale, adică la 0 °C și la presiunea de 760 mm Hg; dacă valoarea densității este dată la alte temperaturi, aceasta se menționează în paranteză);

d) temperatura de topire (θ_t) și fierbere (θ_f) în grade Celsius;

e) solubilitatea în apă la 20 °C; dacă solubilitatea este dată pentru alte temperaturi, aceasta se menționează.

Datele numerice sînt date cu aproximație și anume:

1. Valorile densității au precizia pînă la a doua sau prima zecimală; valorile mai exacte pentru densitatea unor corpuri sînt date în tabelele 2.29, 2.30 etc.

2. Temperaturile de topire și fierbere sînt date cu o precizie pînă la ± 1 °C (uneori pînă la ± 0,1 °C); valori mai exacte pentru temperaturile de topire și fierbere ale unor substanțe sînt date în tabelele 2.64 și 2.65.

3. Solubilitatea în apă pentru multe substanțe este dată de un număr care arată: pentru corpuri solide și lichide — cîte grame, iar pentru gaze — cîți mililitri trebuie dizolvați în 100 cm³ de apă pentru a obține o soluție saturată la 20 °C; dacă datele se referă la o altă temperatură, aceasta este indicată între paranteze. Dacă în literatură nu

Tabela 2.17 *(continuare)*

Denumirea	Formula	Masa moleculară	Starea fizică	Densitatea	Temperatura de topire	Temperatura de fierbere	Solubilitatea în apă (20 °C)
Trioxid de bismut	Bi_2O_3	466,0	s	8,2–8,9	820	1890(?)	insol.
Bromură de bismut	$BiBr_3$	448,75	s	5,7	218	453	se desc.
Clorură de bismut	$BiCl_3$	315,37	s	4,75	230	447	se desc.
Bor B	—	10,82	s	2,3	2100	2550	insol.
Oxid de bor[7])	B_2O_3	69,64	s	1,84	aprox. 570	—	se desc.
Carbură de bor	B_4C	55,29	s	2,5	2450	>3500	insol.
Clorură de bor	BCl_3	117,19	l	1,43	−107	12,5	se desc.
Acid boric	H_3BO_3	61,84	s	1,44	se desc. >70	—	5
Brom Br	Br_2	159,83	l	3,1	−7,2	58,8	3,6
Cadmiu Cd	—	112,41	s	8,65	320,9	766	insol.
Oxid de cadmiu	CdO	128,41	s	7,0	se desc. 900	—	g. sol.
Azotat de cadmiu	$Cd(NO_3)_2 \cdot 4H_2O$	308,49	s	2,46	100	132	127
Sulfat de cadmiu	$CdSO_4$	208,48	s	4,7	1000	—	75
Carbonat de cadmiu	$CdCO_3$	172,42	s	4,26	se desc.	—	insol.
Bromură de cadmiu	$CdBr_2$	272,24	s	5,2	567	963	95
Clorură de cadmiu	$CdCl_2$	183,32	s	4,05	568	960	140
Calciu Ca	—	40,08	s	1,55	850	1440	desc.a.
Oxid de calciu	CaO	56,08	s	3,4	2572	2850	se desc.
Hidroxid de calciu	$Ca(OH)_2$	74,10	s	2,3	se desh.	—	0,16
Azotat de calciu	$Ca(NO_3)_2$	164,10	s	2,36	561	—	341 (29°)
Sulfat de calciu[8])	$CaSO_4$	136,15	s	aprox. 3,0	—	—	0,2
Bromură de calciu	$CaBr_2$	199,91	s	3,35	765	806–812	125 (0°)
Clorură de calciu	$CaCl_2$	110,99	s	2,3	772	>1600	74
Carbură de calciu[9])	CaC_2	64,10	s	2,22	aprox. 2000	—	se desc.
Carbon C	—	12,011	s	2,3	subl. aprox. 4000	—	insol.
Oxid de carbon	CO	28,01	g	1,25 g/l	−207	−192	2,3 ml

Bioxid de carbon	CO_2	44,01	g	1,97 g/l	—	subl. —78,5	87,8 ml
Sulfură de carbon	CS_2	76,14	l	1,29	—111	46,3	0,22 (22°)
Tetraclorură de carbon	CCl_4	153,84	l	1,59	—23	76,8	g. sol.
Oxiclorură de carbon (fosgen)	$COCl_2$	98,92	g	1,39 (l)	—104	8,3	se desc.
Ceriu Ce	—	140,13	s	6,9	804	1400	insol.
Oxid de ceriu	Ce_2O_3	328,26	s	6,9—7,0	1692(?)	—	insol.
Bioxid de ceriu	CeO_2	172,13	s	7,3	1950	—	insol.
Sulfat de ceriu	$Ce_2(SO_4)_3$	568,46	s	3,91	—	—	10 (0°)
Clorură de ceriu	$CeCl_3$	246,50	s	3,92	848	se desc.	u. sol.
Cesiu Cs	—	132,91	s	1,9	29,7	690	desc.a.
Hidroxid de cesiu	$CsOH$	149,92	s	3,68	272	—	396(15°)
Azotat de cesiu	$CsNO_3$	194,92	s	3,69	414	se desc.	14,9(10°)
Sulfat de cesiu	Cs_2SO_4	361,89	s	4,24	1010	—	167(0°)
Clorură de cesiu	$CsCl$	168,37	s	3,97	646	subl. 1290	185,7
Carbonat de cesiu	Cs_2CO_3	325,83	s	—	se desc. 610	—	260,5 (15°)
Clor Cl	—	35,457	g	3,21 g/l	—101	—34,1	226
Oxid de clor	Cl_2O	86,91	g	3,89 g/l	—20	subl. 3,8	200 ml
Bioxid de clor	ClO_2	67,46	g	3,09 g/l	—59	subl. aprox. 100	2000 ml (4°)
Cobalt Co	—	58,94	s	8,7	1492	3000	insol.
Oxid de cobalt	Co_2O_3	165,88	s	5,18	se desc. 895	—	insol.
Azotat de cobalt	$Co(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	291,05	s	1,87	se desh. 55	—	134 (0°)
Sulfat de cobalt	$CoSO_4$	155,01	s	3,71	989	—	36,2
Clorură de cobalt	$CoCl_2$	129,85	s	3,36	subl.	—	u. sol.
Crom Cr	—	52,01	s	7,1	1800	2300	insol.
Oxid de crom	Cr_2O_3	152,02	s	5,21	1990	—	insol.
Trioxid de crom (anhidridă cromică)	CrO_3	100,01	s	2,70	196	se desc.	166 (15°)
Azotat de crom	$Cr(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$	400,18	s	—	37	se des. 125,5	sol.
Oxiclorură de crom (clorură de cromil)	CrO_2Cl_2	154,92	l	1,91	—96,5	117	se desc.

Tabela 2.17 *(continuare)*

Denumirea	Formula	Masa moleculară	Starea fizică	Densitatea	Temperatura de topire	Temperatura de fierbere	Solubilitatea în apă (20 °C)
Cupru Cu	—	163,54	s	8,9	1083	2582	insol.
Oxid (protoxid) de cupru	Cu_2O	43,08	s	6,0	1235	se desc. 1800	insol.
Oxid de cupru	CuO	279,54	s	6,4	se desc. 1026	—	insol.
Azotat de cupru	$Cu(NO_3)_2 \cdot 3H_2O$	141,60	s	2,05	114,5	se desc.	u. sol.
Sulfat de cupru	$CuSO_4$	259,61	s	3,6	200	se desc. 650	14,3 (0°)
Sulfat de cupru (hidr.)	$CuSO_4 \cdot 5H_2O$	49,69	s	2,28	se desh.	—	20,7 (se desh.)
Clorură cuproasă	$CuCl$	199,00	s	3,53	422	1366	g. sol.
Clorură cuprică	$CuCl_2$	34,45	s	3,05	498	se desc. 993	70,6(0°)
Dysprosiu Dy	—	162,46	—	—	—	—	—
Oxid de dysprosiu	Dy_2O_3	372,92	s	7,81	—	—	—
Clorură de dysprosiu	$DyCl_3$	268,83	s	3,67	680	—	sol.
Erbiu Er	—	167,2	s	4,8	—	—	—
Oxid de erbiu	Er_2O_3	382,40	s	8,64	—	—	g. sol.
Sulfat de erbiu	$Er_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	766,73	s	3,2	se desh. 400	—	16
Europiu Eu	—	152,00	s	—	—	—	insol.
Oxid de europiu	Eu_2O_3	352,00	s	aprox. 7,0	—	—	—
Clorură de europiu	$EuCl_3$	258,37	s	—	623	—	—
Fier Fe	—	55,85	s	7,9	1535	2800	insol.
Protoxid de fier	FeO	71,85	s	5,7	1420	—	insol.
Oxid de fier	Fe_2O_3	159,70	s	5,24	1565	—	insol.
Oxid feroferic[10])	Fe_3O_4	231,55	s	5,1—5,4	1538 se desc.	—	insol.
Azotat feric	$Fe(NO)_3 \cdot 9H_2O$	404,02	s	1,68	47,2	se desc.	sol.
Sulfat feric	$Fe_2(SO_4)_3 \cdot 9H_2O$	562,04	s	2,1	se desh.	—	440
Clorură feroasă	$FeCl_2$	126,76	s	2,98	670	se desc.	64,4(10°)
Clorură ferică	$FeCl_3$	162,22	s	2,8	282	315	92
Sulfură feroasă	FeS	87,92	s	4,8	1193	se desc.	g. sol.

Bisulfură feroasă (pirită)	FeS_2	119,98	s	4,9	1171	se desc.	g. sol.
Carbură de fier	Fe_3C	179,56	s	7,4	1837	—	insol.
Fosfor P	—	30,975	s	1,82	44,1	282	g. sol.
Pentoxid de fosfor	P_2O_5	141,96	s	2,39	563	—	se desc.
Tribromură de fosfor	PBr_3	270,73	l	2,85	−40	172,9	se desc.
Triclorură de fosfor	PCl_3	137,35	l	1,57	−111,8	73,5	se desc.
Pentaclorură de fosfor	PCl_5	208,27	s	2,1	—	subl. 162	se desc.
Hidrogen fosforat	PH_3	34,00	g	1,53 g/l	−135,5	−87,4	26 ml(17°)
Fluor F	—	19,00	g	1,70 g/l	−223	−187,9	desc.a.
Oxid de fluor	F_2O	54,00	g.inst.	1,9 (−224)	−223,8	−144,8	se desc.
Gadoliniu Gd	—	156,9	s	—	—	—	—
Oxid de gadoliniu	Gd_2O_3	361,80	s	7,41	—	—	g. sol.
Azotat de gadoliniu	$Gd(NO_3)_3 \cdot 5H_2O$	433,00	s	2,4	93	—	u. sol.
Sulfat de gadoliniu	$Gd_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	746,13	s	3,01	—	—	sol.
Galiu Ga	—	69,72	s	5,9	29,8	2100	insol.
Oxid de galiu	Ga_2O_3	187,44	s	5,9	1900	—	insol.
Clorură de galiu	$GaCl_3$	176,09	s	2,47	78	205	u. sol.
Germaniu Ge	—	72,60	s	5,35	958,5	2700	insol.
Bioxid de germaniu	GeO_2	104,60	s	aprox. 5,0	1115	—	0,45
Tetraclorură de germaniu	$GeCl_4$	214,43	l	1,88	−49,5	83,0	se desc.
Hafniu Hf	—	178,6	s	13,3	aprox. 2000	>3200	insol.
Bioxid de hafniu	HfO_2	210,60	s	9,7	2810	—	insol.
Carbură de hafniu	HfC	190,61	s	—	3887	—	—
Heliu He	—	4,003	g	0,18 g/l	−272,2	−268,9	aprox. 1 ml
Hidrogen H	H_2	2,016	g	0,09 g/l	−259,2	−252,8	1,8 ml
Apă	H_2O	18,02	l	1,00	0	100	—
Apă grea[11])	D_2O	20,03	l	1,11	3,82	101,42	∞
Peroxid (apă oxigenată)	H_2O_2	34,02	l	1,46	−1,7	152,1	∞
Acid bromhidric	HBr	80,92	g	3,5 g/l	−88,5	−67,0	aprox. 200 g
Acid iodhidric	HI	127,92	g	5,65 g/l	−50,8	−35,4	42,5 ml (10°)
Acid fluorhidric	HF	20,01	g(l)	0,92 g/l	−92,3	19,2	∞

Tabela 2.17 *(continuare)*

Denumirea	Formula	Masa moleculară	Starea fizică	Densitatea	Temperatura de topire	Temperatura de fierbere	Solubilitatea în apă (20 °C)
Acid clorhidric	HCl	36,47	g	1,64 g/l	−112	−83,7	72,1
Acid azotic[12])	HNO_3	63,02	l	1,53	−41,3	se desc. 86	∞
Acid sulfuric	H_2SO_4	98,08	l	1,83	10,5	se desc. 338	∞
Hidrogen sulfurat	H_2S	34,08	g	1,54 g/l	−82,9	−61,8	aprox. 250 ml
Holmiu Ho	—	164,94	s	—	—	—	—
Indiu In	—	114,76	s	7,3	156,4	2100	insol.
Bromură de indiu	$InBr$	194,68	s	4,96	220	662	se desc.
Clorură de indiu	$InCl$	150,22	s	4,19	225	550	se desc.
Iod J[13])	J_2	253,82	s	4,93	113,5	184,4	0,029
Monobromură de iod	JBr	206,83	s	4,4	42	se desc. 59	se desc.
Monoclorură de iod	JCl	162,37	s	3,2	25	se desc. 97	se desc.
Iridiu Ir	—	192,2	s	22,4	2443	4350	insol.
Triclorură de iridiu	$IrCl_3$	298,57	s	5,3	se desc. 763	—	insol.
Tetrabromură de iridiu	$IrBr_4$	512,76	s	—	se desc.	—	sol., insol.
Kripton Kr	—	83,80	g	3,71 g/l	−157	−153,2	6,3 ml
Lantan La	—	138,92	s	6,15	920	1800	desc. a.
Oxid de lantan	La_2O_3	325,84	s	6,5	>2000	4200	g. sol.
Azotat de lantat	$La(NO_3)_3 \cdot 6H_2O$	433,04	s	—	40	se desc. 126	151 (25°)
Sulfat de lantan	$La_2(SO_4)_3$	566,04	s	3,6	se desc.	—	3
Clorură de lantan	$LaCl_3$	245,29	s	3,84	872	—	u. sol.
Litiu Li	—	6,94	s	0,53	186	1380	desc.a.
Hidroxid de litiu	$LiOH$	23,95	s	1,43	450	se desc.	12,7(0°)
Azotat de litiu	$LiNO_3$	68,95	s	2,38	261	—	u. sol.
Sulfat de litiu	Li_2SO_4	109,95	s	2,22	860	—	26(0°)
Clorură de litiu	$LiCl$	42,40	s	2,07	613	1353	u. sol.
Luteţiu Lu	—	174,99	s	—	—	—	—
Clorură de luteţiu	$LuCl_2$	281,36	—	3,98	892	—	—

Magneziu Mg	—	24,32	s	1,7	650	1100	desc.a.
Oxid de magneziu	MgO	140,32	s	3,65	2800	—	g.sol.
Sulfat de magneziu	$MgSO_4$	20,39	s	2,66	se desc. 1124	—	26(0°)
Carbonat de magneziu[14])	$MgCO_3$	84,33	s	3,04	se desc. 350	—	g. sol.
Clorură de magneziu	$MgCl_2$	95,23	s	2,33	708	1412	54,3
Mangan Mn	—	54,94	s	7,4	1260	2150	se desc.
Oxid de mangan	MnO	70,94	s	5,2	1650	—	insol.
Bioxid de mangan	MnO_2	186,94	s	5,03	se desc. >535	—	insol.
Sulfat de mangan	$MnSO_4$	151,01	s	3,25	700	se desc. 850	64
Carbonat de mangan	$MnCO_3$	114,95	s	3,1	se desc.	—	g. sol.
Clorură de mangan	$MnCl_2$	25,85	s	2,98	650	1190	62(10°)
Mercur Hg	—	200,61	l	13,55	−38,87	356,58	insol.
Oxid de mercur	HgO	216,61	s	11,14	se desc. 500	—	g. sol.
Azotat mercuric	$Hg(NO_3)_2 \cdot 1/2H_2O$	333,63	s	4,39	79	se desc.	u. sol.
Sulfat mercuros	Hg_2SO_4	497,29	s	7,56	se desc.	—	0,06(25°)
Clorură mercuroasă (calomel)	Hg_2Cl_2	472,14	s	7,15	subl. 400	—	g. sol.
Clorură mercurică (sublimat corosiv)	$HgCl_2$	271,52	s	5,42	275	301	6,5
Sulfură mercurică	HgS	232,68	s	8,10	subl. 583,5	—	g. sol.
Molibden Mo	—	195,95	s	10,2	2625	4800	insol.
Trioxid de molibden	MoO_3	143,95	s	4,6	795	subl.	0,1
Carbură de molibden	MoC	207,96	s	8,8	2692	—	insol.
Pentaclorură de molibden	$MoCl_5$	73,24	s	2,93	194	268	se desc.
Neodim Nd	—	144,27	s	7,05	1024	—	se desc.
Oxid de neodim	Nd_2O_3	336,54	s	7,24	—	—	g. sol.
Clorură de neodim	$NdCl_3$	250,643	s	4,13	784	—	aprox. 100
Neon Ne	—	20,18	g	0,90 g/l	−248,7	−246,1	aprox. 1,0 ml
Nichel Ni	—	58,69	s	8,9	1453	2800	insol.
Protoxid de nichel	NiO	74,69	s	7,45	1990	—	insol.

Tabela 2.17 *(continuare)*

Denumirea	Formula	Masa moleculară	Starea fizică	Densitatea	Temperatura de topire	Temperatura de fierbere	Solubilitatea în apă (20 °C)
Oxid de nichel	Ni_2O_3	165,38	s	4,83	se desc. 600	—	insol.
Azotat de nichel (crist.)	$Ni(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	290,80	s	2,05	56,7	—	238,5 (0°)
Sulfat de nichel	$NiSO_4$	154,76	s	3,68	se desc. 840	—	29,3 (0°)
Sulfat de nichel (crist.)	$NiSO_4 \cdot 7H_2O$	280,87	s	1,9	se desh.	—	75,6 (15°)
Clorură de nichel	$NiCl_2$	129,60	s	3,55	subl.	—	64,2
Tetracarbonil de nichel	$Ni(CO)_4$	170,73	l	1,32	−25	43	g. sol.
Niobiu Nb	—	92,91	s	8,6	2415	3300	insol.
Pentoxid de niobiu	Nb_2O_5	265,82	s	4,47	1520	—	insol.
Pentaclorură de niobiu	$NbCl_5$	270,20	s	2,75	194	240,5	se desc.
Carbură de niobiu	NbC	104,91	s	7,82	aprox. 3900	—	insol.
Paladiu Pd	—	106,7	s	11,9	1552	3560	insol.
Platină Pt	—	195,23	s	21,45	1769	4000	insol.
Clorură de platină	$PtCl_4$	337,06	s	—	se desc. 370	—	u. sol. se desc.
Plumb Pb	—	207,21	s	11,3	327,3	1750	insol.
Oxid de plumb	PbO	223,21	s	9,53	888	—	g. sol.
Oxid (protoxid) de plumb (miniu)	Pb_3O_4	685,63	s	9,1	se desc. 500	—	insol.
Bioxid de plumb	PbO_2	239,21	s	9,38	se desc. 290	—	insol.
Azotat de plumb	$Pb(NO_3)_2$	331,23	s	4,53	se desc. 357	—	56,5
Sulfat de plumb	$PbSO_4$	303,28	s	6,2	se desc. 1000	—	g. sol.
Clorură de plumb	$PbCl_2$	278,12	s	5,85	501	950	0,99
Carbonat de plumb	$PbCO_3$	267,22	s	6,6	se desc. 315	—	g. sol.
Poloniu Po	—	210	s	—	1785	—	—
Potasiu K	—	39,10	s	0,86	63	760	desc. a.
Hidroxid de potasiu	KOH	56,11	s	2,04	360	1320	110

Azotat de potasiu	KNO_3	101,11	s	2,1	334	se desc. 400	31,6
Sulfat de potasiu	K_2SO_4	174,27	s	2,7	1076	—	12(25°)
Carbonat de potasiu	K_2CO_3	138,21	s	2,4	891	se desc.	112
Bicarbonat de potasiu	$KHCO_3$	100,12	s	2,2	se desc. >100	—	32
Bromură de potasiu	KBr	119,02	s	2,75	730	1380	65,2
Clorură de potasiu	KCl	74,56	s	1,98	776	subl. 1500	34,7
Praseodim Pr	—	140,92	s	6,6	932	—	se desc.
Osmiu Os	—	190,2	s	22,5	2700	4400	insol.
Tetraoxid de osmiu	OsO_4	254,20	s	4,9	39,5	130	aprox. 6
Oxigen O	O_2	32	g	1,43 g/l	−218,8	−182,970	3,1 ml
Ozon	O_3	48	g	2,14 g/l	−251	−112	49 ml (0°)
Radiu Ra	—	226,05	s	5	700	1140	desc. a.
Bromură de radiu	$RaBr_2$	385,88	s	5,79	728	—	sol.
Clorură de radiu	$RaCl_2$	296,96	s	4,91	1000	—	sol.
Radon Rn	—	222	g	9,73 g/l	−71	−62	23,8 ml
Reniu Re	—	186,31	s	20,5	3167	—	—
Heptoxid de reniu	Re_2O_7	484,62	s	8,2	aprox. 220	subl. 450	u. sol.
Rhodiu Rh	—	102,91	s	12,4	1960	3960	insol.
Trioxid de rhodiu	Rh_2O_3	253,82	s	—	se desc. aprox. 1100	—	insol.
Rubidiu Rb	—	85,48	s	1,53	38,8	679	desc. a.
Peroxid de rubidiu	RbO_2	117,48	s	3,05	280	—	se desc.
Azotat de rubidiu	$RbNO_3$	147,49	s	3,11	313	—	34,8
Sulfat de rubidiu	Rb_2SO_4	267,03	s	3,61	1060	—	42,4(10°)
Carbonat de rubidiu	Rb_2CO_3	230,97	s	—	837	se desc. 740	450
Clorură de rubidiu	RbCl	120,94	s	2,76	715	1390	91,2
Ruteniu Ru	—	101,1	s	12,2	2450	4110	insol.
Tetroxid de ruteniu	RuO_4	165,70	s	3,29	25,5	se desc. 100	2,0
Triclorură de ruteniu	$RuCl_3$	208,07	s	3,11	se desc. >500	—	insol.

Tabela 2.17 *(continuare)*

Denumirea	Formula	Masa moleculară	Starea fizică	Densitatea	Temperatura de topire	Temperatura de fierbere	Solubilitatea în apă (20 °C)
Taliu Tl	—	204,39	s	11,85	304	1457	insol.
Oxid de taliu	Tl_2O_3	456,78	s	10,19	717	se desc. 875	insol.
Azotat de taliu	$TlNO_3$	266,40	s	5,56	206	430	9,6
Sulfat de taliu	Tl_2SO_4	504,85	s	6,77	632	se desc.	4,9
Carbonat de taliu	Tl_2CO_3	468,79	s	7,11	273	—	4(15°)
Clorură de taliu	$TlCl$	239,85	s	7,00	430	720	0,32
Tantal Ta	—	180,95	s	16,6	3000	>4100	insol.
Pentoxid de tantal	Ta_2O_5	441,90	s	8,73	1470 se desc.	—	insol.
Pentaclorură de tantal	$TaCl_5$	358,24	s	3,68	221	242	se desc.
Carbură de tantal	TaC	192,96	s	14,65	3880	5500	insol.
Telur Te	—	127,61	s	6,24	452	1007	insol.
Bioxid de telur	TeO_2	159,61	s	5,7—5,9	subl. 450	—	g. sol.
Biclorur de telur	$TeCl_2$	198,52	s	7,05	209	327	se desc.
Terbiu Tb	—	158,93	s	—	1450	—	—
Clorură de terbiu	$TbCl_3$	265,30	s	4,35	588	—	sol.
Titan Ti	—	47,90	s	4,5	1660	>3000	insol.
Bioxid de titan	TiO_2	79,90	s	3,8—4,2	se desc. 1640	—	insol.
Tetrabromură de titan	$TiBr_4$	367,56	s	2,6	39	230	se desc.
Tetraclorură de titan	$TiCl_4$	189,73	l	1,73	—30	136,4	se desc.
Carbură de titan	TiC	59,91	s	4,93	3140	4300	insol.
Thoriu Th	—	232,05	s	11,5	1840	3500	insol.
Bioxid de thoriu	ThO_2	264,05	s	9,69	>2800	4400	insol.
Clorură de thoriu	$ThCl_4$	373,88	s	4,59	subl. 820	se desc. 1100	u. sol.
Carbură de thoriu	ThC_2	256,07	s	8,96	2773	5000	se desc.
Tuliu Tu	—	168,94	s	—	—	3500	insol.
Uraniu U	—	238,07	s	18,7	1132	—	insol.
Bioxid de uraniu	UO_2	270,07	s	10,5	2176	—	insol.

Trioxid de uraniu	UO_3	286,07	s	5,92	se desc.	—	insol.
Tetraclorură de uraniu	UCl_4	379,90	s	4,73	subl.	—	u. sol.
Carbură de uraniu	UC_2	262,09	s	11,3	2260	4100	se desc.
Azotat de uraniu	$UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	502,18	s	2,8	59	118	170(0°)
Clorură de uranil	UO_2Cl_2	340,98	s	—	se desc.	—	320(18°)
Vanadiu V	—	50,95	s	5,96	1730	aprox. 3000	insol.
Trioxid de vanadiu	V_2O_3	149,90	s	4,87	1970	—	g. sol.
Pentoxid de vanadiu	V_2O_5	181,90	s	3,35	690	se desc. 1750	0,8
Carbură de vanadiu	VC	62,96	s	5,77	2810	3900	insol.
Xenon Xe	—	131,3	g	5,85 g/l	−112	−108,1	12,3 ml
Yterbiu Yb	—	173,04	s	—	824	1800	desc.a.
Ytriu Y	—	88,92	s	5,5	1490	4100	se desc.
Zinc Zn	—	65,38	s	7,1	419,5	907	insol.
Oxid de zinc	ZnO	81,38	s	5,6	subl. 1800	—	g. sol.
Hidroxid de zinc	$Zn(OH)_2$	99,40	s	3,05	subl. 125	—	g. sol.
Azotat de zinc	$Zn(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	297,49	s	2,07	36,4	se desh.	184,3
Sulfat de zinc	$ZnSO_4 \cdot 7H_2O$	287,56	s	1,97	se desh. 280	—	96,5
Carbonat de zinc	$ZnCO_3$	125,39	s	4,4	se desc. 300	—	g. sol.
Clorură de zinc	$ZnCl_2$	136,29	s	2,9	262	732	432(25°)
Zirconiu Zr	—	91,22	s	6,4	1860	>2900	insol.
Bioxid de zirconiu	ZrO_2	123,22	s	5,7	aprox. 3000	—	insol.
Azotat de zirconiu	$Zr(NO_3)_4 \cdot 5H_2O$	429,33	s	—	se desc. 100	—	sol.
Sulfat de zirconiu	$Zr(SO_4)_2 \cdot 4H_2O$	355,41	s	—	se desh.	—	u. sol.
Tetraclorură de zirconiu	$ZrCl_4$	233,05	s	2,8	subl. 300	—	se desc.
Carbură de zirconiu	ZrC	103,23	s	6,73	3540	5100	insol.
Wolfram W	—	183,92	s	19,3	3380	aprox. 6000	insol.
Bioxid de wolfram	WO_2	215,92	s	12,1	aprox. 1600	—	insol.
Trioxid de wolfram	WO_3	231,92	s	7,2	1473	—	insol.
Carbură de wolfram	WC	195,93	s	15,7	2770	aprox. 6000	insol.
Bicarbură de wolfram	W_2C	379,85	s	17,15	2860	aprox. 6000	insol.
Hexaclorură de wolfram	WCl_6	396,66	s	3,52	275	347	se desc.

Tabela 2.17 *(continuare)*

Denumirea	Formula	Masa moleculară	Starea fizică	Densitatea	Temperatura de topire	Temperatura de fierbere	Solubilitatea în apă (20°C)
			Cîteva combinații metaloorganice				
Trimetil aluminiu	$Al(CH_3)_3$	72,07	l	—	0	130	desc.a.
Eter borometilic	$B(OCH_3)_3$	103,92	l	0,915	−29	68,7	se desc.
Eter boroetilic	$B(OC_2H_5)_3$	146,01	l	0,8746	—	117,4	se desc.
Trimetil-bor	$B(CH_3)_3$	55,92	g	1,9108g/l	−161,5	−20,2	g. sol.
Trietil-bor	$B(C_2H_5)_3$	98,01	l	0,6961	−92,9	—	insol.
Trimetil-bismut	$Bi(CH_3)_3$	254,10	l	2,300	—	110	insol.
Trietil-bismut	$Bi(C_2H_5)_5$	296,18	l	1,82	—	107	insol.
Trietil-galiu	$Ga(C_2H_5)_3$	156,90	l	1,0576	−82,3	142,6	se desc.
Tetrametil-germaniu	$Ge(CH_3)_4$	132,74	l	1,006	−3	138−40	—
Tetraetil-germaniu	$Ge(C_2H_5)_4$	188,84	l	1,198	−90	162,5	se desc.
Bromură de trimetil-germaniu	$Ge(CH_3)_3Br$	197,62	l	1,544	−25	113,7	se desc.
Trimetil-indiu	$In(CH_3)_3$	159,86	s	1,568	89,0−8	subl.	se desc.
Diamil-cadmiu	$Cd(C_5H_{11})_2$	254,69	l	1,2210	−115	121,5	—
Dibutil-cadmiu	$Cd(C_4H_9)_2$	226,64	l	1,3056	−48	103,5	se desc.
Dimetil-cadmiu	$Cd(CH_3)_2$	142,46	l	1,9846	−4,5	105,5	se desc.
Dietil-cadmiu	$Cd(C_2H_5)_2$	170,53	l	1,6564	−21	64	se desc.
Tetrametil-silan	$Si(CH_3)_4$	88,20	l	0,651	—	26,5	—
Trimetil-stibiu	$Sb(CH_3)_3$	166,86	l	1,526	—	80,6	g. sol.
Trifenil-stibiu	$Sb(C_6H_5)_3$	353,06	s	1,4343	46−53	$>$230	insol
Trietil-stibiu	$Sb(C_2H_5)_3$	208,94	l	1,324	$<$−20	159,5	insol.
Dimetil-zinc	$Zn(CH_3)_2$	95,45	l	1,386	−42,2	46	se desc.
Dietil-zinc	$Zn(C_2H_5)_2$	123,50	l	1,182	—	118	se desc.

Note la tabela 2−17.

1) În stare naturală – corindon (tabela 2.19). 2) Arsenul este cunoscut sub trei forme alotropice: a) galben sau arsen α; b) negru sau arsen β; c) cenușiu sau arsen γ. Forma cea mai stabilă este arsenul γ, un corp cristalin cu luciu metalic, care la 610°C și presiune normală se volatilizează fără a mai trece prin

faza lichidă. 3) În medicină este cunoscut sub denumirea de gaz ilariant, datorită efectului său anestezic la inhalare. 4) Sau N_2O_4 cu masa moleculară 92,02. 5) Temperaturile de topire ale argintului și aurului sînt egale cu 960,8 °C, respectiv 1 063 °C, și sînt luate ca puncte fundamentale ale scării internaționale de temperatură (tabela 2.58). 6) Bariul descompune apa cu degajare de hidrogen. În afară de bariu, aceeași proprietate o mai au elementele: potasiu, calciu, lantan, litiu, sodiu, radiu, rubidiu, stronțiu, fluor și cesiu; magneziul și uraniul descompun și ele apa, însă foarte încet. 7) Este dată temperatura de topire a anhidridei de bor obișnuită (sticloasă); temperatura de topire a B_2O_3 cristalin este de 294 °C. 8) Ipsosul (tabela 2.19) constă în special din sulfat de calciu hidratat $CaSO_4 \cdot 2H_2O$. 9) Carbura de calciu, CaC_2, este descompusă de apă cu degajare de acetilenă C_2H_2 (acetilena se obține chiar pe baza acestei reacții). 10) În condiții naturale oxidul fero-feric Fe_3O_4 (mai precis $FeO \cdot Fe_2O_3$) se întîlnește sub formă de magnetită (tabela 2.19). 11) Izotopul greu al hidrogenului, *deuteriul*, în afară de notația obișnuită ^2_1H, se mai notează cu simbolul D. Masa atomică a deuteriului este 2,01473. 12) Densitatea acidului azotic și dependența sa de concentrație sînt date în tabela 2.34. 13) Iodul este foarte volatil la temperatura camerei; prin încălzire se evaporă, formînd vapori violeți. 14) În natură carbonatul de magneziu ($MgCO_3$) se întîlnește sub formă de magnezită (tabela 2.19). 15) Bioxidul de siliciu SiO_2 sau silicea se întîlnește în natură sub formă de cuarț (tabela 2.19). 16) Cositorul metalic obișnuit se numește cositor alb sau cositor β. El poate fi ușor forjat, vălțuit (foița de cositor sau staniol). Însă la temperatura de aproximativ 13 °C și în condițiile unei răciri puternice în prealabil (pînă la −20 sau −30 °C), cositorul alb devine cenușiu sau cositor α, sub formă de pulbere; densitatea este ~ 6,75 g/cm³. 17) Bioxidul de stibiu se întîlnește în natură sub două forme cu o singură compoziție, însă cu structură cristalină diferită: senarmontită și valentinită. 18) Sulful este cunoscut sub trei forme alotropice: a) sulful rombic cu densitatea de 2,07 g/cm³; b) sulful monoclinic cu densitatea de 1,96 g/cm³; c) sulful amorf (plastic), care prezintă două modificații.

Tabela 2.18. **Proprietățile generale ale unor combinații organice**

În tabela 2.18, în afară de denumirile combinațiilor și formulelor lor chimice, sînt indicate: 1) starea fizică a combinațiilor în condiții normale (solidă, lichidă, gazoasă); 2) masa moleculară; 3) densitatea, exprimată pentru corpurile solide și lichide în grame pe centimetru cub, iar pentru gaze în grame pe litru; 4) temperaturile de topire și fierbere în grade Celsius; 5) solubilitatea în apă.

În legătură cu aceste date trebuie menționate următoarele:

a) Densitatea pentru combinațiile solide și lichide este dată pentru temperatura de 20 °C; densitatea combinațiilor gazoase este dată pentru condiții normale, adică pentru temperatura de 0 °C și presiu-

nea de 760 mm Hg. Valorile densității sînt date cu aproximație pînă la a doua zecimală; dacă temperatura diferă cu mult de 20 °C, ea este dată între paranteze.

b) Temperaturile de topire și fierbere sînt date de asemenea aproximativ, precizia nedepășind 0,1° C. Dacă la încălzire combinația se descompune, se evaporă, sau explodează, aceasta este menționat prin prescurtările corespunzătoare: se desc., se ev. și expl. Dacă punctul de fierbere este dat la o presiune diferită de cea normală, aceasta este indicată în mm Hg.

c) Solubilitatea în apă este dată la o temperatură medie a camerei și anume: pentru combinațiile solide și lichide prin numărul de grame care se dizolvă în 100 cm³ de apă, iar pentru combinațiile gazoase prin numărul de milimetri care se dizolvă în 100 cm³ de apă. Pentru combinațiile foarte puțin solubile în apă la temperatura dată, sînt introduse notațiile: nesolubil (n) și greu solubil (g.s.) Dacă combinația, dizolvîndu-se în apă, o descompune chimic, acest proces este menționat cu prescurtarea desc.

Unele indicații suplimentare pentru diferite combinații sînt date în notele la tabelă. Combinațiile sînt date în tabelă în ordinea alfabetică, după denumirile lor.

Tabela 2.18

Denumirea	Formula	Masa moleculară	Starea fizică	Densitatea	Temperatura de topire	Temperatura de fierbere	Solubilitatea în apă
Acetaldehida	CH_3CHO	44,05	l	0,78	— 121	20,8	∞
Acetilenă	$CH \equiv CH$	26,04	g	1,17g/l	— 81,5	—	100 ml (18°)
Acetonă	CH_3COCH_3	58,08	l	0,79	— 95	56,5	∞
Acid acetic	CH_3COOH	60,05	s(l)	1,05	16,7	118,0	∞
Acid citric	$C_3H_4(OH)(CO_2H)_3$	192,13	s	1,54	153	se desc.	u.s.
Acid galic	$(HO)_3C_6H_2COOH$	170,13	s	1,69	220	se desc.	1,16
Acid formic	HCO_2H	46,03	l	1,22	8,4	100,5	∞
Acid oleic	$C_{17}H_{33}CO_2H$	282,48	l	0,898	16	286	n.
Acid oxalic	COOH-COOH	90,04	l	1,65	189,5	se ev.	9,5 (15°)
Acid picric	$C_6H_2OH(NO_2)_3$	299,12	s	1,76	122,5	expl. 300	1,8
Acid salicilic	$HOC_6H_4CO_2H$	138,13	s	1,44	159	se ev.	0,18
Acid succinic	$CO_2H(CH_2)_2CO_2H$	118,09	s	1,56	185	235 se ev.	6,8
Acroleină	$CH_2{=}CHCHO$	56,06	l	0,84	– 87,7	52,5	40

Alcool alilic	$CH_2{=}CHCH_2OH$	58,08	l	0,855	−129	96	∞
Alcool amilic (izo-)	$(CH_3)_2CH(CH_2)_2OH$	88,16	l	0,812	−117,2	130,5	2,6
Alcool butilic (izo-)	$(CH_3)_2CHCH_2OH$	74,12	l	0,80	−108	108,4	9,5
Alcool etilic	C_2H_5OH	46,07	l	0,79	−117	78,5	∞
Alcool metilic	CH_3OH	32,04	l	0,79	− 93,9	64,6	∞
Alcool propilic (normal)	$CH_3CH_2CH_2\cdot OH$	60,09	l	0,80	−127	97,4	∞
Aldehidă formică	$HCHO$	30,03	g	0,81 (−20°)	− 92	− 21	s.
Alizarină	$C_6H_4(CO)_2C_6H_2{=}{=}(OH)_2$	240,21	s	—	290	430	g.s.
Amidon	$(C_6H_{10}O_5)_x$	$(162,15)_x$	s	1,50	se ev.	—	g.s.
Anhidridă acetică	$(CH_3CO)_2O$	102,09	l	1,08	− 73,0	139,5	se ev.
Anhidridă ftalică	$C_6H_4(CO)_2O$	148,12	s	1,53	131,6	se ev.	g.s.
Anilină	$C_6H_5NH_2$	93,13	l	1,02	− 6,2	184	3,4
Anisol	$C_6H_5OCH_3$	108,14	l	0,993	− 37,5	155	n.
Antracen	$C_{14}H_{10}$	178,23	s	1,24	217	350	n.
Azobenzol	$C_6H_5N{=}NC_6H_5$	182,23	s	1,20	68	293	n.
Benzaldehidă	C_6H_5COH	106,13	l	1,05	− 26	179,5	0,33
Benzen	C_6H_6	78,12	l	0,88	5,5	80,1	0,08
Bromoform	$CHBr_3$	252,77	l	2,89	8	149,5	0,3
Bromură de etil	CH_3CH_2Br	108,99	l	1,455	−125,5	38,4	0,91
Bromură de etilen	$BrCH_2CH_2Br$	187,88	l	2,1785	9,97 (10)	131,6	0,43 (30°)
Butan (*n*)	$CH_3(CH_2)_2CH_3$	58,12	g	0,6 (l.)	−138,4	0,5	aprox. 10 ml
Camfor (camfor-*d*)	$C_{10}H_{16}O$	152,24	s	0,99	176	204 se ev.	0,1
Chinoleină	$C_6H_4N{=}CHCH{=}{=}CH$	129,16	l	1,09	− 15,0	238,0	6
Cloralhidrat	$CCl_3CH(HO)_2$	165,42	s	1,91	51,7	96,2 se desc.	470 (17°)
Clorbenzen	C_6H_5Cl	112,56	l	1,11	− 45	132	0,05
Cloroform	$CHCl_3$	119,39	l	1,50 (15°)	− 63,5	61,0	1,0 (15°)
Cloropicrin	CCl_3NO_2	164,39	l(g)	1,65	− 64	112	n.
Clorură de etil	CH_3CH_2Cl	64,52	l	0,92 (0°)	−142,5	12,5	0,57 (20°)
Clorură de etilen	$ClCH_2CH_2Cl$	98,97	l	1,26	− 42,0	83,7	0,87

Tabela 2.18 (*continuare*)

Denumirea	Formula	Masa moleculară	Starea fizică	Densitatea	Temperatura de topire	Temperatura de fierbere	Solubilitatea în apă
Clorură de metil	CH_3Cl	50,49	g	2,31 g/l	− 93	− 24,1	400 ml
Clorură de metilen	CH_2Cl_2	84,94	l	1,33	− 96,8	40	s.
Clorură de vinil	$CH_2{=}CHCl$	62,50	g	0,92 (l)	−159,7	− 13,9	g.s.
Dextrină	$(C_6H_{10}O_5)x$	$(162,15)_x$	s	1,04	se desc.	—	s.
Diacetil	$CH_3COCOCH_3$	86,09	l	0,99	—	88	25 (15°)
Difenil	$(C_6H_5)_2$	154,21	s	1,18 (0°)	69−71	255	n.
Dinitrobenzen (orto-)	$C_6H_4(NO_2)_2$	168,12	s	1,56	118	aprox. 317	g.s.
Divinil[1])	$CH_2{=}CH{-}CH{=}CH_2$	54,09	g	0,65 (l)	−108,9	− 3,5	n.
Etan	CH_3CH_3	30,07	g	1,36 g/l	−183,3	− 88,6	4,7 ml
Eter etilic	$(C_2H_5)_2O$	74,12	l	0,71	−116,3	34,6	7,5
Eter metilic	CH_3OCH_3	46,07	g	2,1 g/l	−138,5	− 23,6	3 700 ml
Etilacetat	$CH_3CO_2C_2H_5$	88,10	l	0,907 (15°)	− 83,6	77,15	8,6
Etilamină	$CH_3CH_2NH_2$	45,08	l	0,706 (0°)	− 80,6	16,6	∞
Etilbenzen	$C_6H_5CH_2CH_3$	106,17	l	0,867	− 93,9	136,1	g.s.
Etilen	$CH_2{=}CH_2$	28,06	g	1,25 g/l	−169,2	−103,7	25,6 ml. (0°)
Etilenoxid	$(CH_2)_2O$	44,05	l (g)	0,88 (7°)	−111,3	10,7	∞
Fenantren	$C_{14}H_{10}$	178,23	s	1,17	100	340,2	n.
Fenol[2])	C_6H_5OH	94,12	s	1,07	41,0	181,7	6,7 (16°)
Fenolftaleină	$C_{20}H_{14}O_4$	318,33	s	1,30	261	—	0,018
Fluoresceină	$C_{20}H_{12}O_5$	332,32	s	—	aprox. 315	se desc.	g.s.
Fructoză[3])	$C_6H_{12}O_6$	180,17	s	1,60	aprox. 103	se desc.	u.s.
Furfurol	C_4H_3OCHO	96,08	l	1,16	− 36,5	161,7	8,3
Glicerină[4])	$CHOH(CH_2OH)_2$	92,09	l	1,26	20,0	290 se desc	∞
Glicol (etil-glicol)	$CH_2OH{-}CH_2OH$	62,07	l	1,12	− 15,6	197,3	∞
Glucoză (glucoză-*d*)[5])	$CH_2OH(CHOH)_4CHO$	180,17	s	1,54	142	se desc.	83 (17,5°)
Hexaclorbenzen	C_6Cl_6	284,81	s	2,04	aprox. 230	326	n.
Hidrochinonă	$C_6H_4(OH)_2$	110,12	s	1,36	170,5	286,2	6,0

Iodoform	CHJ_3	393,78	s	4,01	119 se desc.	210 expl.	g.s.
Iodură de etil	CH_3CH_2J	155,98	l	1,913	aprox. −110	72,2	0,4
Izopren	$CH_2=CHC(CH_3)= =CH_2$	68,12	l	0,68	−120	32,6	n.
Lactoză[6])	$C_{12}H_{22}O_{11} \cdot H_2O$	360,33	s	1,52	se desh. 130°	se desc.	u.s.
Maltoză[7])	$C_{12}H_{22}O_{11} \cdot H_2O$	360,33	s	1,54	se desh. 100	se desc.	108 (25°)
Metan	CH_4	16,04	g	0,72 g/l	−182,5	−161,5	9 ml
Metol	$(HOC_6H_4NHCH_3)_2 \cdot \cdot H_2SO_4$	344,39	s	—	se desc. 260	—	s.
Naftalină	$C_{10}H_8$	128,17	s	1,14	80,2	218	g.s.
Naftol (α)	$C_{10}H_7OH$	144,17	s	1,224 (4°)	95	280	g.s.
Naftol (β)	$C_{10}H_7OH$	144,17	s	1,217 (4°)	122	286	g.s.
Nitrobenzen	$C_6H_5NO_2$	123,12	l	1,20	5,9	210,9	0,19
Nitrofenol (orto-)	$O_2NC_6H_4OH$	139,12	s	1,66	45	214,5	0,21
Nitroglicerină	$C_3H_5(ONO_2)_3$	227,09	l	1,60	(2,9); 13,2	expl. 260	0,18
Nitrotoluol (orto-)	$C_6H_4CH_3NO_2$	137,14	l	1,16	aprox. −4	222,3	g.s.
Paraldehidă	$(CH_3CHO)_3$	132,17	l	0,99	12,6	128	12 (13°)
Pentan (normal)	$CH_3(CH_2)_3CH_3$	72,15	l	0,63	−130	36,1	0,04
Piridină	C_5H_5N	79,10	l	0,98	− 42	115,3	∞
Pirogalol	$C_6H_3(OH)_3$	126,12	s	1,45	aprox. 133	309	aprox. 62
Propan	$CH_3CH_2CH_3$	44,09	g	2,01 g/l	−187,7	− 42,1	6,5 ml (18°)
Propilen	$CH_3CH=CH_2$	42,08	g	1,94 g/l	−185,3	− 47,7	44,6 ml
Rezorcină	$C_6H_4(OH)_2$	110,12	s	1,28	111	276,5	aprox. 220
Stirol[8])	$C_6H_5CH=CH_2$	104,15	l	0,91	− 30,6	145,2 se desc.	g.s.
Sulfură de carbon	CS_2	76,14	l	1,29 (0°)	−111	46,3	0,22 (22°)
Tetraclorură de carbon	CCl_4	153,84	l	1,59 (5°)	− 22,8	76,8	0,08
Toluen	$C_6H_5CH_3$	92,14	l	0,87	− 95,0	110,6	0,05
Triclorbenzen	$C_6H_3Cl_3$	181,47	s (l)	1,57 (10°)	17	213	n.
Xilol (orto-)	$C_6H_4(CH_3)_2$	106,17	l	0,88	− 25,2	144,4	n.
Zaharoză[9])	$C_{12}H_{22}O_{11}$	342,31	s	1,59 (15°)	184 se desc.	—	179 (0°)

Note la tabela 2.18. 1) Divinilul este produsul inițial de bază în producția cauciucului sintetic. 2) Soluția de fenol în apă se numește acid fenic. 3) Se mai numește levuloză sau zahăr de fructe. 4) Glicerina pură rezistă la o răcire de scurtă durată pînă la —40 °C și nu se solidifică. La o răcire mai slabă, însă mai îndelungată (de exemplu pînă la temperatura de 0 °C), glicerina se cristalizează; cristalele se topesc la temperatura de 20 °C. 5) Glucozele sînt reprezentate în număr mare de diferite substanțe zaharoase; glucoza-d se mai numește dextroză. 6) Lactoza se mai numește și zahăr de lapte. 7) În mod obișnuit se obține sub formă de melasă și se mai numește maltoză. 8) Se folosește pe scară largă la fabricarea maselor plastice. 9) Sau zahăr din sfeclă, din trestie de zahăr.

Tabela 2.19. Proprietățile generale ale unor minerale

În tabela 2.19 sînt enumerate unele minerale, pentru care, în afară de denumirile și formulele chimice ale componentei principale mai sînt date: sistemul cristalin (conform terminologiei adoptate), valorile aproximative ale durității în scara pînă la 10 (vezi și tabela 2.42 a) și valorile densității în grame pe centimetru cub. În afară de aceasta, se dau indicațiile generale admise în mineralogie în ceea ce privește forma exterioară a cristalului, culoarea și luciul lui; datorită variației culorii la diferitele probe, variație observată des pentru un același cristal, culoarea este dată numai aproximativ, în special pentru varietățile cele mai răspîndite.

În tabela 2.19 sînt adoptate următoarele prescurtări:

Pentru sistemul cristalin:

trcl. — triclinic;
mnc. — monoclinic;
romb. — rombic (sau ortotrimetric);
trg. — trigonal;
tetr. — tetragonal;
hex. — hexagonal;
cub. — cubic (sau izometric);

Pentru luciu:

d. — ca diamantul;
mt. — metalic;
smt. — semimetalic;
r. — rășinos;
st. — sticlos;
șt. — șters;
n, l. — nu lucește.

Pentru culoare:

al. — alb;	g.d. — galben des.;	d. — deschis;
br. — brun;	v. — verde	gr. — gri;
f.c. — fără culoare;	v.d. — verde des.;	albas. — albastru;
bl. — bleu;	r. — roșu;	albas. d. — albastru des.;
bl.d. — bleu deschis;	m. — maron;	închis. — închis;
g. — galben;	tr. — transparent;	n. — negru.

Tabela 2.19

Denumire	Formula	Sistem cristalin	Duritate	Densitate	Culoare, luciu
Anhidrit	$CaSO_4$	romb.	3,0–3,5	2,8–3,0	gri, bleu; st.
Antimonit (Stibină)	Sb_2S_3	romb.	2,0–2,5	4,5–4,6	albast. d. gri; mt.
Aragonit	$CaCO_3$	romb.	3,5–4,0	2,9—3,0	alb, v. d; st.
Arsenopirită	FeAsS	mnc.	5,5–6,0	5,9–6,2	alb, gri; mt.
Auripigment	As_2S_3	mnc.	1,5–2,0	3,4—3,5	g; st.
Azurită	$2CuCO_3 \cdot Cu(OH)_2$	mnc.	3,6–4,0	3,7–3,9	albast. în-albast. st.
Barit [1])	$BaSO_4$	romb.	2,5–3,0	4,3—4,7	alb, br. r; st.
Beril	$Be_3Al_2(SiO_3)_6$	hex.	7,5–8,0	2,6–2,9	v, g, albast; st
Bismutină	Bi_2S_3	romb.	2,0–2,5	6,4–6,6	alb, gri; mt
Bișofit	$MgCl_26H_2O$	mnc.	1,5–2,0	1,5–1,6	alb, f, c.; st
Braunită	Mn_2O_3	tetr.	6,0–6,5	4,7–5,0	br, n, gri; smt.
Brookit	TiO_2	romb.	5,5–6,0	3,9–4,1	br, g, r; st.
Calcit[2])	$CaCO_3$	trg.	3,0	2,6–2,8	alb, tr; st.
Calcopirită	$CuFeS_2$	tetr.	3,5–4,0	4,1–4,3	g; mt
Calcosină	Cu_2S	romb.	2,5–3,0	5,5–5,8	gr; mt.
Casitorită	SnO_2	tetr.	6,0–7,0	6,8–7,1	br, n, r, gri.; d.
Ceruzit	$PbCO_3$	romb.	3,0–3,5	6,46–6,57	f.c., alb, gri; d.
Cianit (disten)	Al_2SiO_5	trg.	4,5–7,0	3,56–3,67	albast, v, d, alb, st.
Cinabru	HgS	trg.	2,0–2,5	8,0–8,2	r, gri, n; d.
Cleveit [3])	UO_2	cub.	5,0–6,0	6,6—10,0	n; r
Cobaltină	CoAsS	cub.	5,5–6,0	6,1–6,3	alb, r, d; mt.
Corindon [4])	Al_2O_3	trg.	9,0	3,95–4,10	gri , g, albst., r.; d.
Crisoberil	$BeAl_2O_4$	romb.	8,5	3,5–3,84	v, g; st.
Cromit	$FeO \cdot Cr_2O_3$	cub.	5,5–7,5	4,0–4,8	n, r; mt.
Cuarț [5])	SiO_2	trg.	7,0	2,59–2,66	tr, g, br, v, d; st.
Diamant	C	cub.	10	3,4–3,5	f, c,. g. br.; d.
Diaspor [9])	$Al_2O_3 \cdot H_2O$	romb.	6,5–7,0	3,3–3,5	br, g-d; st.

Tabela 2.19 *(continuare)*

Denumire	Formula	Sistem cristalin	Duritate	Densitate	Culoare, luciu
Diopsid (piroxen)	$CaMg(Si_2O_6)$	mnc.	5,5–6,0	3,3–3,4	alb, v, gri; st.
Delomit	$CaCO_3 \cdot MgCO_3$	trg.	3,5–4,0	2,8–3,0	br, alb; st.
Enstatit	$Mg_2(Si_2O_6)$	romb.	5,0–6,0	3,1–3,2	alb, gri, v, d; st.
Fenactit	Be_2SiO_4	trg.	7,5–8,0	2,96–3,0	f. c., br-r, r; st.
Fluorit [7])	CaF_2	cub.	4,0	3,1–3,2	tr v. bleu; st.
Gadolinit	$Y_2FeBe_2Si_2O_{10}$	mnc.	6,6–7,0	4,0–4,3	v, d, n, br; st.
Galenit	PbS	cub.	2,5–3,0	7,4–7,6	gri; mt
Gips	$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	mnc.	1,5–2,0	2,2–2,4	alb, gri, g-d; n. l.
Gaulberit	$Na_2SO_4CaSO_4$	mnc.	2,5–3,0	2,7–2,9	tr, alb, g-d; st.
Grafit	C	hex.	1,0–2,0	2,0–2,3	n; smt.
Hematit	Fe_2O_3	trg.	5,5–6,5	4,9–5,3	n, r; mt
Hubnerit	$MnWO_4$	mnc.	4,5–5,5	7,2–7,5	n, r-m; mt
Ilmenit	$FeTiO_3$	trg.	5,0–6,0	4,5–5,0	n; mt
Limonit [8])	$2Fe_2O_3 \cdot 3H_2O$	—	5,0–5,5	3,3–4,0	înch-br, g; m,
Magnetit	$FeO \cdot Fe_2O_3$	cub.	5,5–6,5	5,0–5,2	n; mt
Magnezit	$MgCO_3$	trg.	3,5–4,5	2,9–3,1	alb, g, d; st.
Malahit	$CuCO_3 \cdot Cu(OH_2)$	mnc.	3,4–4,0	3,9–4,1	v; st
Mică	$KAl_2(OH\ F)_2$ $AlSi_3O_{10}$	mnc.	2,0–3,0	2,7–2,9	tr, g; st
Molibdenit	MoS_2	hex.	1,0–1,5	4,7–4,8	gri; mt
Monazit [9])	$(Ce...,)PO_4$	mnc.	5,0–5,5	4,9–5,3	r-br, g; st.
Olivină	$(Mg, Fe)_2SiO_4$	romb.	6,5–7,0	3,0–3,3	v, g; st.
Opal	$SiO_2 \cdot nH_2O$	—	5,5–6,5	1,9–2,5	alb, g, d, bl; st.
Petzită	$(Ag, Au)_2Te$	cub.	2,5–3,0	8,7–9,2	gri; mt.
Pirită	FeS_2	cub.	6,0–6,5	4,9–5,2	g; mt.
Pirotină	FeS	hex.	3,5–4,5	4,5–4,7	g; mt.
Realgar	AsS	mnc.	1,5–2,0	3,4–3,6	r; st.
Rutil [10])	TiO_2	tetr.	6,0–6,5	4,2–4,3	r, g, n; mt.

Sare gemă[11])	$NaCl$	cub.	2,0—2,5	2,1—2,2	alb, r; st
Sfalerit	ZnS	cub.	3,5—4,0	3,9—4,2	br, g, m, v; d
Sheelit	$CaWO_4$	tetr.	4,5—5,0	5,88—6,14	alb, g, d, v, d, gri; r
Siderit	$FeCO_3$	trg.	3,5—4,5	3,0—3,9	gri, br; st
Silvină[12])	KCl	cub.	2,0—2,5	1,9—2,0	tr; st
Sperilit	$PtAs_2$	cub.	6,0—7,0	10,5—10,7	alb, mt
Spinel[13])	$MgAl_2O_4$	cub.	8,0	3,5—4,1	r, br, v, albast; st
Spodumen	$LiAl(Si_2O_6)$	mnc.	6,5—7,0	3,1—3,2	v, g, r, f. c.; st
Stalzit	$PbWO_4$	tetr.	2,7—3,0	7,87—8,13	v, gri, r, m; d
Sulf (pucioasă)	S, (As, Se, Fe.)	romb.	2,0—2,5	2,0—2,1	g, —
Torit[3])	$Th \cdot SiO_4$	tetr.	4,5—5,0	4,4—5,4	n, br, g, d, r; st
Terolit	$SnTa_2O_7$	mnc	5,5—6,0	7,6—7,9	br; d
Titanit	$CaO \cdot TiO_2 \cdot SiO_2$	mnc.	5,0—5,5	3,3—3,56	br, g, m, v; d
Torianit[3])	$(Th, U)O_2$	cub.	6,5	9,32—9,33	n, st; mt
Tremalit	$Ca_2Mg_5(OH)_2\ Si_4O_{11}$	mnc.	5,5—6,0	2,9—3,1	v. d, g. d, f. c; st
Turmalină	—	trg.	7,0—8,0	2,9—3,2	n, br, v, albast; st
Vanadinit	$Pb_5(VO_4)_3Cl$	hex.	2,5—3,0	6,7—7,2	r, g, br; r
Viterit	$BaCO_3$	hex.	3,0—3,7	4,2—4,3	gri, g, d; st
Wolframit	$(Mn, Fe)WO_4$	mnc.	4,5—5,5	6,7—7,5	înch-gri, br-n; mt
Wulfenit	$PbMoO_4$	tetr.	2,5—3,0	6,7—7,0	g, br; st
Xenotim	YPO_4	tetr.	4,0—5,0	4,45—4,56	g, br, r; d
Zircon	$ZrSiO_4$	tetr.	7,5—8,0	4,68—4,70	tr, br, g, r; d

Note la tabela 2.19. 1) Barit sau spat greu. 2) Calcitul este cunoscut și sub forma unei varietăți transparente, denumită spat de Islanda; din el se fac prisme de polarizare. 3) Mineralele torianit, torit și cleveit prezintă proprietăți radioactive intense. 4) Corindonul, datorită durității mari, se folosește pe scară largă ca material abraziv. În același scop se folosește o varietate a corindonului, șmirghelul, care constă dintr-un amestec natural de corindon cu magnetită, hematită, cuarț. Unele varietăți transparente ale corindonului sînt pietrele prețioase (rubinul, safirul). 5) Cuarțul are cîteva proprietăți foarte prețioase, dintre care putem menționa: a) în stare topită cuarțul poate fi întins sub formă de fire foarte subțiri, care se folosesc la fabricarea țesăturilor tehnice neinflamabile: în laboratoarele de fizică aceleași fire se folosesc pentru suspensii la aparatele de măsură cele mai sensibile; b) cuarțul are proprietăți piezoelectrice, care se folosesc pe scară largă: în radiotehnică pentru stabilizarea frecvenței (etalonul de piezo-

cuarț al frecvenței), în mecanică pentru măsurarea presiunilor instantanee; c) dubla refracție a razelor în cuarț și activitatea sa optică; d) cuarțul este foarte transparent pentru radiațiile ultraviolete (aproximativ pînă la 1850 Å), și datorită acestui fapt pentru studiul spectrelor instrumentelor optice de cuarț (lentile, prisme) sînt cele mai bune. 6) Diasporul intră în compoziția bauxitei, care este materia primă pentru obținerea aluminiului metalic. 7) Fluoritul servește la prepararea acidului fluorhidric și a fluorurilor. 8) Limonitul este un minereu de fier foarte răspîndit. 9) Monazitul conține deseori cantități mici de toriu și de aceea este radioactiv. 10) Bioxidul de titan (minereul rutil) este astăzi obiectul unei atenții mari, datorită proprietăților sale electrice deosebite. 11) Haloidit sau sare gemă se găsește în natură nu numai în stare solidă, ci și sub formă de soluție în apa unor izvoare sărate și a unor lacuri sărate, în apa mărilor, oceanelor. Haloiditul în cristale optic pure este transparent pentru radiațiile infraroșii (pînă la 16—17 microni) și de aceea, la cercetările în acest domeniu al spectrului, se folosesc deseori prisme și lentile din sare gemă, ale cărei cristale complet transparente, de dimensiuni mari, nu sînt o raritate (vezi nota 12). 12) În domeniul spectrului infraroșu silvina este mai transparentă decît galitul (pînă la 20 μ) (vezi nota 11), însă cristalele, optic transparente de silvină, de dimensiuni mari se întîlnesc rar. 13) În spinel, magneziul este deseori substituit prin fier sau mangan, iar aluminiul prin fier sau crom.

Tabela 2.20 a, b, c. **Compoziția și temperaturile de înghețare ale apei mării**

Conținutul de sare în apa mării se definește de obicei prin salinitatea S. Din punct de vedere cantitativ, S se exprimă prin numărul total de grame de toate sărurile conținute în 1 000 g apă de mare; cu alte cuvinte, salinitatea apei mării poate fi considerată ca fiind suma concentrațiilor tuturor sărurilor raportată la 1 000 g soluție; datorită acestui fapt, S se exprimă de obicei în ‰.

Valoarea medie a salinității apei mării se consideră egală cu 35‰ (S_m = 35‰); aceasta înseamnă că 1 kg de apă de mare conține, în medie, 35 g de săruri dizolvate. Sărurile conținute în apa mării în cantități apreciabile sînt menționate în tabela 2.20 a, unde se dau: denumirile și formulele sărurilor, concentrația lor (în ‰) în apa mării de salinitate medie, procentajul fiecărei sări în raport cu cantitatea totală de sare. Trebuie menționat că în timp ce cifrele din coloana a doua a tabelei și suma lor în S în condiții naturale prezintă variații mari, cifrele din coloana a treia, adică conținutul în procente, rămîne practic constant.

În afară de sărurile indicate în tabela 2.20 a, în apa mării s-a mai observat un număr mare de alte elemente chimice, care se găsesc aici în cantități foarte mici[1]), cuprinse între 10^{-4} pînă la 10^{-14}‰. Astfel, s-a observat prezența sigură a fluorului, siliciului, rubidiului, aluminiului, litiului, iodului și a multor altor elemente. În afară de acestea, în apa mării există gaze dizolvate (provenite în cea mai mare parte din atmosferă) și diferite combinații organice (produse de lumea

vegetală şi animală a mării). Concentraţia combinaţiilor organice este foarte mică şi este supusă unor oscilaţii intense între limitele 2—15 mg/l de apă. În ceea ce priveşte gazele dizolvate în apa mării, conţinutul lor poate varia şi el în mod apreciabil, aşa cum se vede din tabela 2.20 b, unde este dată concentraţia diferitelor gaze în apa mării, exprimată în cm^3/l.

Salinitatea apei mării influenţează asupra celorlalte proprietăţi ale ei, de exemplu, asupra densităţii, temperaturii de îngheţare, coeficientului de refracţie a luminii, conductibilităţii electrice etc. Astfel, densitatea apei mării, la salinitatea de 35‰ şi temperatura de 0 °C este egală cu 1,02812. Tot astfel, coeficientul de refracţie D al liniei sodiului la 18 °C variază de la 1,33308 la 1,34077 cu creşterea salinităţii de la 0 la 40‰; pe aceasta se bazează metoda refractometrică de măsurare a salinităţii. Dependenţa salinităţii apei mării de temperatura sa de îngheţare în °C) este dată în tabela 2.20 c.

T a b e l a 2.20 a. **Conţinutul sărurilor principale în apa mării**

Denumirea şi formula chimică	Conţinutul în 1 kg	%
Clorura de sodiu NaCl	27,213	77,758
Clorura de magneziu $MgCl_2$	3,807	10,878
Sulfat de magneziu $MgSO_4$	1,658	4,737
Sulfat de calciu $CaSO_4$	1,260	3,600
Sulfat de potasiu K_2SO_4	0,863	2,465
Bromură de magneziu $MgBr_2$	0,076	0,217
Carbonat de calciu şi urme de alte săruri	0,123	0,345
Total	$S = 35‰$	100%

T a b e l a 2.20 b. **Conţinutul de gaze în apa mării**

Substanţa	Concentraţia (cmc/l)	Substanţa	Concentraţia (cmc/l)
Oxigen[2])	0—8,5	Argon	0,2—0,4
Azot	8,4—14,5	Heliu şi neon	aprox. 0,00017
Bioxid de carbon[3])	34—56	Hidrogen sulfurat[4])	0—22

T a b e l a 2.20 c. **Temperatura de îngheţare a apei mării la diferite valori S**

S‰	0	S‰	0	S‰	0	S‰	0	S‰	0
2	−0,108	10	−0,534	18	−0,965	26	−1,405	34	−1,853
4	−0,214	12	−0,640	20	−1,074	28	−1,516	36	−1,967
6	−0,320	14	−0,748	22	−1,184	30	−1,627	38	−2,081
8	−0,427	16	−0,856	24	−1,294	32	−1,740	40	−2,196

Note la tabelele 2.20 a, b, c. 1) La concentraţii foarte mici ale sărurilor dizolvate în apa mării, aceste săruri, inclusiv cele date în tabela 2.20 a, trebuie să fie complet disociate; datorită acestui fapt, determinînd compoziţia apei mării, ne limităm deseori la enumerarea elementelor conţinute în ea şi indicăm concentraţia fiecăreia. 2) Trebuie atrasă atenţia asupra faptului că procentul de oxigen, raportat la procentul de azot din apa mării, poate fi mult mai mare decît în aer. 3) Aici este dată întreaga cantitate de bioxid de carbon, atît sub formă liberă (CO_2) cît şi sub forma de radicali acizi. 4) Concentraţia hidrogenului sulfurat, care se dizolvă bine în apă, poate depăşi uneori limita superioară dată în tabelă (22 cm^3/l); un exemplu îl constituie zona de mare adîncime din Marea Neagră, unde concentraţia de hidrogen sulfurat atinge 42 cm^3/l.

Tabela 2.21. **Părţile componente ale aerului**

Aerul din troposferă, adică partea inferioară a atmosferei terestre, cu o grosime în medie de circa 14 km, este un amestec mecanic complex, care, în afară de substanţe în stare gazoasă, conţine apă în toate cele trei stări de agregare, şi corpuri solide infime în suspensie. Această parte a atmosferei, alcătuită din corpuri solide, constă dintr-o cantitate de particule foarte variate: particule de praf de origine terestră şi cosmică, particule de fum, de anumite săruri chimice, precum şi microparticule de natură biologică. Această cantitate de particule suspendate în aer este supusă unor oscilaţii mari, care depind mult de condiţiile locale. De asemenea, şi conţinutul de apă în aer este supus unor oscilaţii mari (apă sub formă lichidă, vapori şi cristale de gheaţă); aceste oscilaţii se datoresc multor cauze: anotimpurile, starea timpului, condiţii climaterice generale, condiţii climaterice locale etc.

Dintre substanţele gazoase care intră în compunerea atmosferei, se cunosc mai mult de zece: azot, oxigen, argon, bioxid de carbon, neon, heliu, kripton, xenon, hidrogen, ozon etc. Trebuie menţionat că predomină în mod categoric trei gaze: azotul, oxigenul şi argonul: aceste trei gaze formează împreună peste 99,95% din aer (ca volum), pentru celelalte gaze rămînînd mai puţin de 0,05%. Compoziţia aerului uscat (în procente de volum) a fost adoptată ca standard internaţional în anul 1947; cifrele corespunzătoare sînt date în coloana a patra a tabelei, iar în coloana a cincea este dată presiunea parţială a gazelor în mm Hg, calculată teoretic. În privinţa acestor date, trebuie menţionat că compoziţia aerului rămîne constantă practic pentru toate înălţimile, în limitele troposferei. Scurte menţiuni în legătură cu această problemă pentru cîteva gaze sînt date în note.

În afară de gazele menţionate, în aer există şi amoniac ($2 \cdot 10^{-6}$%) şi emanaţii radioactive ($6 \cdot 10^{-18}$%).

Dincolo de limitele stratosferei (pînă la înălţimi de circa 30 km) se observă o reducere neînsemnată cu înălţimea, a gazelor mai grele. Astfel conţinutul în oxigen la înălţimi, pînă la 18 km mai rămîne normal (20,95%), dar la înălţimea de 28—29 km el este de 20,39%;

același lucru se observă, pare-se, și pentru bioxidul de carbon. Totuși, aceste modificări sînt mult mai mici decît cele așteptate pe baza teoriei separării naturale a amestecului de gaze în cîmpul gravitațional, presupunînd că acest proces are loc în perfectă liniște fără nici un amestec mecanic (vînt, curenți verticali). Aceste rezultate ne permit să tragem concluzia că la înălțimi pînă la 30 km există procese aerodinamice, care încetinesc separarea gazelor, deși nu o opresc complet.

Tabela 2.21

Gazul	Simbolul	Masa moleculară	% după volum	Presiunea parțială [mm Hg]
Argon	Ar	39,944	0,93	7,07
Azot	N_2	28,016	78,09	593,4
Bioxid de carbon[1)]	CO_2	44,010	0,03	0,23
Heliu	He	4,003	$5,24 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$
Hidrogen[2)]	H_2	2,016	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$
Kripton	Kr	83,80	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$8,4 \cdot 10^{-4}$
Neon	Ne	20,183	$1,8 \cdot 10^{-3}$	0,014
Oxigen	O_2	32,000	20,95	159,2
Ozon[3)]	O_3	48,000	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
Xenon	Xe	131,3	$8,0 \cdot 10^{-6}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$

Masa moleculară medie a aerului uscat este de 28,966.

Note la tabela 2.21. 1) Conținutul de bioxid de carbon în aer prezintă o variație zilnică remarcabilă, crescînd noaptea, ceea ce se explică prin proprietatea plantelor de a absorbi bioxidul de carbon, numai la lumină. 2) Conținutul de hidrogen în păturile inferioare ale aerului nu este suficient de precis determinat, dar el nu poate depăși cifrele indicate în tabelă. 3) Conținutul de ozon în aer prezintă o variație anuală remarcabilă, maximul observîndu-se toamna.

Tabela 2.22. Unii parametrii ai atmosferei internaționale standard

Variația presiunii aerului în raport cu înălțimea se determină teoretic prin formula barometrică. Presupunînd că temperatura aerului rămîne constantă în toate punctele, adică în cazul așa-numitei atmosfere izometrice, formula barometrică se scrie de obicei sub forma:

$$p_h = p_0 e^{-\frac{gh}{RT}}. \qquad (2.62)$$

Aici p_h şi p_0 reprezintă presiunea aerului la înălţimea h şi la nivelul mării unde h se ia egal cu zero;
g este acceleraţia gravitaţiei la înălţimea h (tabela 2.22);
R şi T — respectiv constanta gazelor aerului şi temperatura sa absolută pentru atmosfera izotermică.

Formula barometrică ne permite să calculăm: 1) diferenţa de înălţime dintre două puncte de pe suprafaţa pămîntului, măsurînd în punctele respective simultan presiunea şi temperatura (nivelare barometrică) şi 2) presiunea la o anumită înălţime h pe baza presiunii date la o altă înălţime h_1; operaţia obişnuită de acest gen este calcularea presiunii p_0 la nivelul mării din presiunea p_h la înălţimea h (raportarea indicaţiilor barometrului la nivelul mării; în particular, pe hărţile sinoptice sînt date indicaţiile barometrului raportate la nivelul mării).

În realitate, condiţiile izometrice nu există în atmosferă, iar temperatura acesteia scade în general cu înălţimea. De aceea, în calcule ar trebui să se ţină seama de gradientul vertical al temperaturii. Deoarece mărimea sa prezintă oscilaţii mari, în special în păturile inferioare ale aerului, pe baza unui acord internaţional s-a admis atmosfera standard internaţională; temperatura ei la nivelul mării se consideră constantă şi egală cu 15 °C, temperatura la orice înălţime mai mare de 11 km se ia de asemenea constantă şi egală cu —56,5 °C, iar pentru înălţimile intermediare dintre nivelul mării şi 11 km, se ia gradientul vertical constant al temperaturii, egal cu —6,5 °C la 1 km înălţime. Pentru atmosfera standard se pot calcula teoretic la orice înălţime valorile tuturor parametrilor principali: presiune, temperatură, densitate, coeficient cinematic de viscozitate etc. Rezultatele unor astfel de calcule sînt date în tabela 2.22, unde se pot găsi:

1) înălţimea h faţă de nivelul mării, exprimată în metri;
2) presiunea barometrică p_h exprimată în mm Hg şi $H/m^2 \cdot 10^2$;
3) raportul presiunilor p_h/p_0;
4) temperatura atmosferei în °C;
5) densitatea sa ρ_h, exprimată în kg/m^3.

Aceste date sînt indicate:

1. pentru înălţimi de la 0 la 2 000 m la intervale de 100 m;
2. pentru înălţimi de la 2 000 la 5 000 m la intervale de 200 m;
3) pentru înălţimi de la 5 000 la 8 000 m la intervale de 500 m.

La calculul valorilor numerice ale parametrilor atmosferei standard s-a considerat:

1) presiunea barometrică a aerului la nivelul mării ($h = \theta$) $p_0 = 760$ mm Hg $= 1\,013{,}25$ kilobarye ($= 1{,}01325$ bar) (la temperatura mercurului egală cu 0 °C şi greutatea specifică egală cu 0,0135951 kg/cm^3);
2) temperatura aerului la nivelul mării $t_0 = 15$ °C;
3) gradientul de temperatură al aerului $\alpha = 0{,}0065$ °/m;
4) densitatea aerului la nivelul mării $\rho_0 = 0{,}124966$ kg·s^2/m^4;
5) acceleraţia normală a căderii libere $g_n = 9{,}80665$ m/s^2.

Se presupune că greutatea specifică a aerului la nivelul mării este $\gamma = 1{,}2255$ kg/m^3 (la $t=15°$); umiditatea relativă a aerului este de 0%.

Tabela 2.22

h[m]	p_h [mm Hg]	p_h [N/m².10²]	p_h/p_0	t [°C]	ρ_h[kg/m³]
0	760,00	1 013,25	1,00000	15,00	1,22595
100	751,03	1 001,29	0,98820	14,35	1,21418
200	742,14	989,44	0,97650	13,70	1,20349
300	733,34	977,71	0,96492	13,05	1,19093
400	724,63	966,09	0,95346	12,40	1,17955
500	716,00	954,58	0,94210	11,75	1,16808
600	707,45	943,19	0,93085	11,10	1,15680
700	698,99	931,90	0,91972	10,45	1,14561
800	690,60	920,73	0,90869	9,80	1,13443
900	682,30	909,66	0,89776	9,15	1,12344
1 000	674,08	898,70	0,88695	8,50	1,11245
1 100	665,94	887,85	0,87624	7,85	1,10156
1 200	657,88	877,10	0,86563	7,20	1,09077
1 300	649,90	866,46	0,85513	6,55	1,07998
1 400	642,00	855,93	0,84474	5,90	1,06939
1 500	634,17	845,50	0,83444	5,25	1,05879
1 600	626,43	835,17	0,82425	4,60	1,04830
1 700	618,76	824,94	0,81415	3,95	1,03790
1 800	611,17	814,82	0,80416	3,30	1,02760
1 900	603,65	804,79	0,79427	2,65	1,01730
2 000	596,20	794,87	0,78448	2,00	1,00719
2 200	581,54	775,32	0,76518	0,70	0,98708
2 400	567,17	756,16	0,74628	−0,60	0,967266
2 600	553,09	737,39	0,72775	−1,90	0,947774
2 800	539,29	719,00	0,70959	−3,20	0,928585
3 000	525,77	700,98	0,69181	−4,50	0,909691
3 200	512,53	683,32	0,67439	−5,80	0,891101
3 400	499,56	666,03	0,65732	−7,10	0,872796
3 600	486,86	649,09	0,64061	−8,40	0,854785
3 800	474,42	632,51	0,62424	−9,70	0,837048
4 000	462,24	616,27	0,60821	−11,00	0,819606
4 200	450,31	600,37	0,59252	−12,30	0,802438
4 400	438,64	584,80	0,57716	−13,60	0,785555
4 600	427,21	569,56	0,56211	−14,90	0,768937
4 800	416,02	554,65	0,54739	−16,20	0,752594
5 000	405,07	540,05	0,53299	−17,50	0,736505
5 500	378,71	504,91	0,49831	−20,75	0,697462
6 000	353,76	471,65	0,46548	−24,00	0,660017
6 500	330,16	440,18	0,43443	−27,25	0,624132
7 000	307,85	410,44	0,40507	−30,50	0,589758
7 500	286,78	382,34	0,37734	−33,75	0,556845
8 000	266,89	355,83	0,35117	−37,00	0,525365

Note la tabela 2.22. 1) Unitatea pentru măsurarea presiunii, milibarul, care s-a folosit în trecut, stă la baza standardului, din care au

fost scoase cifrele tabelei; s-a luat 1 mbar = 10^3 dyn/cm^2. Pentru transformarea în newton pe metru pătrat valorile presiunilor exprimate în milibari trebuie împărțite la 10^2.

Tabela 2.23. a, b, c. **Accelerația căderii libere**

Accelerația căderii libere g depinde, după cum se știe, de latitudinea geografică a locului și de înălțimea sa h deasupra nivelului mării. Dependența lui g de latitudinea geografică este determinată de formula lui Helmert[1]):

$$g_\varphi = 978,030\ (1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,00007 \sin^2 2\varphi), \quad (2.63)$$

unde g_φ este valoarea accelerației căderii libere la nivelul mării și latitudinea geografică φ, exprimată în centimetri pe secundă la pătrat.

În tabela 2.23 a sînt date valorile lui g pentru diferite latitudini la intervale de 1°, calculate pe baza formulei lui Helmert cu o precizie pînă la zecimala a treia[2]). În coloana a treia a tabelei sînt date diferențele dintre două valori consecutive ale lui g, din tabelă, ceea ce este necesar la calculul valorilor g pentru latitudinile geografice intermediare.

Tabela 2.23 a

φ	g [cm.s^{-2}]	Diferența	φ	g [cm.s^{-2}]	Diferența
0°	978,030	2	22°	978,754	64
1	032	4	23	818	66
2	036	8	24	884	68
3	044	11	25	952	70
4	055	14	26	979,022	72
5	069	17	27	094	74
6	086	21	28	168	76
7	107	23	29	244	77
8	130	26	30	321	79
9	156	30	31	400	81
10	186	32	32	481	81
11	218	35	33	562	84
12	253	38	34	646	84
13	291	41	35	730	85
14	332	44	36	815	87
15	376	46	37	902	87
16	422	49	38	989	88
17	471	52	39	980,077	89
18	523	54	40	166	89
19	577	57	41	255	90
20	634	59	42	345	90
21	693	61	43	435	90
22	754		44	525	

Tabela 2.23 a *(continuare)*

φ	g [cm · s⁻²]	Diferența	φ	g [cm · s⁻²]	Diferența
44°	980,525	91	67°	982,420	65
45	616	91	68	485	61
46	706	91	69	546	60
47	797	90	70	606	57
48	887	90	71	663	55
49	977	89	72	718	52
50	981,066	89	73	770	50
51	155	89	74	820	46
52	244	87	75	866	45
53	331	87	76	911	41
54	418	85	77	952	38
55	503	85	78	990	36
56	588	84	79	983,026	32
57	672	82	80	058	30
58	754	81	81	088	27
59	835	79	82	115	23
60	914	78	83	138	21
61	992	76	84	159	17
62	982,068	74	85	176	14
63	142	73	86	190	11
64	215	70	87	201	8
65	285	69	88	209	5
66	354	66	89	214	2
67	420		90	216	

Note la tabela 2.23 a. 1) Formula lui Helmert a fost propusă încă din 1901, și ea nu și-a pierdut valabilitatea nici pînă astăzi, fiind relativ simplă. În 1930, la congresul geofizic internațional, s-a adoptat o formulă nouă:

$$g_\varphi = 978{,}049\,(1 + 0{,}0052884 \sin^2 \varphi - 0{,}0000059 \sin^2 2\varphi).$$

Din această formulă rezultă pentru g valori ceva mai mari (cu 1 pînă la 2 sutimi) decît valorile rezultate din formula lui Helmert. 2) Unitatea de măsură a lui g în sistemul CGS, egală cu 1 cm/s² se numește foarte des gal. Valorile lui g din tabelă, exprimate în cm/s², sînt date de obicei pînă la zecimala a treia, adică cu o precizie de un miligal.

Valoarea accelerației căderii libere la înălțimea h deasupra nivelului mării este determinată după formula aproximativă

$$g_h = g_0 - 0{,}0003086\, h, \qquad (2.64)$$

unde g_0 este accelerația gravității la nivelul mării; h trebuie exprimat în metri.

Tabela 2.24 (*continuare*)

Apă	Mercur	Apă	Mercur	Apă	Mercur	Apă	Mercur
191	14,05	200	14,71	650	47,81	1100	80,91
192	14,12	250	18,39	700	51,49	1150	84,59
193	14,20	300	22,07	750	55,17	1200	88,26
194	14,27	350	25,74	800	58,84	1250	91,94
195	14,34	400	29,42	850	62,52	1300	96,52
196	14,42	450	33,10	900	66,20	1350	99,30
197	14,49	500	36,78	950	69,88	1400	102,98
198	14,56	550	40,45	1000	73,55	1500	110,33
199	14,64	600	44,13	1050	77,23		

Tabela 2.25. Raportarea indicațiilor barometrului la 0°C

Corecțiile barometrului pentru temperatură se calculează cu formula

$$H_0 = H_t[1 - (\beta - \alpha)t], \qquad (2.65)$$

unde H_0 este înălțimea barometrului raportată la 0°C, H_t înălțimea barometrului calculată direct, β și α sînt coeficienții de dilatare a mercurului și respectiv alamei sau sticlei (materialul scalei barometrului), iar t temperatura barometrului.

Pentru toate temperaturile de peste 0°C corecțiile sînt negative; pentru toate temperaturile sub 0°C corecțiile sînt aceleași în valoare absolută, însă pozitive. La calculul corecțiilor s-a considerat că β = 0,000182°C^{-1}, α (alamă) = 0,000019°C^{-1} și α (sticlă) = = 0,000008°C^{-1}.

În tabelă sînt date valorile corecțiilor $H_t \cdot t\,(\beta - \alpha)$ exprimate în milimetri pentru scara de alamă a barometrului. Pentru scara de sticlă corecțiile din tabele trebuie mărite cu

$$H_t \cdot t(0{,}000019 - 0{,}000008) = 0{,}000011\ H_t \cdot t.$$

Pentru indicații ale barometrului apropiate de presiunea atmosferică normală mărimea aceasta poate fi considerată egală în medie cu 0,008 t [mm].

Tabela 2.25

t°	Înălțimea H [mm Hg] indicată de barometru											0,008t
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	
1	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13	0,01
2	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25	0,02
3	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,38	0,38	0,02
4	0,44	0,45	0,46	0,46	0,47	0,48	0,48	0,49	0,50	0,50	0,51	0,03
5	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,04
6	0,67	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,05
7	0,79	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,86	0,87	0,88	0,89	0,06
8	0,89	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,98	0,99	1,00	1,02	0,06
9	1,00	1,01	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11	1,13	1,14	0,07
10	1,11	1,12	1,14	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,27	0,08
11	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29	1,31	1,33	1,34	1,36	1,38	1,40	1,09

Tabela 2.25 (*continuare*)

$t°$	Înălţimea H [mm Hg] indicată de barometru											0,003t
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	
12	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,53	0,10
13	1,44	1,46	1,48	1,50	1,53	1,55	1,57	1,59	1,61	1,63	1,65	0,10
14	1,55	1,57	1,60	1,62	1,64	1,67	1,69	1,71	1,73	1,76	1,78	0,11
15	1,66	1,69	1,71	1,74	1,76	1,78	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	0,12
16	1,77	1,80	1,83	1,85	1,88	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,01	0,13
17	1,88	1,91	1,94	1,97	2,00	2,02	2,05	2,08	2,11	2,13	2,16	0,14
18	2,00	2,02	2,05	2,08	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	0,14
19	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	2,32	2,35	2,38	2,42	0,14
20	2,22	2,25	2,28	2,31	2,35	2,38	2,41	2,45	2,48	2,51	2,54	0,16
21	2,33	2,36	2,40	2,43	2,46	2,50	2,53	2,57	2,60	2,64	2,67	0,17
22	2,44	2,47	2,51	2,55	2,58	2,62	2,65	2,69	2,73	2,76	2,80	0,18
23	2,55	2,59	2,62	2,66	2,70	2,74	2,77	2,81	2,85	2,89	2,92	0,18
24	2,66	2,70	2,74	2,78	2,82	2,86	2,89	2,93	2,97	3,01	3,05	0,19
25	2,77	2,81	2,85	2,89	2,93	2,97	3,02	3,06	3,10	3,14	3,18	0,20
26	2,88	2,92	2,97	3,01	3,05	3,09	3,14	3,18	3,22	3,26	3,31	0,21
27	2,99	3,04	3,08	3,12	3,17	3,21	3,26	3,30	3,34	3,39	3,43	0,22
28	3,10	3,15	3,19	3,24	3,29	3,33	3,38	3,42	3,47	3,51	3,56	0,22
29	3,21	3,26	3,31	3,36	3,40	3,45	3,50	3,55	3,59	3,64	3,69	0,23
30	3,33	3,37	3,42	3,47	3,52	3,57	3,62	3,67	3,72	3,77	3,81	0,24
31	3,44	3,49	3,54	3,59	3,64	3,69	3,74	3,79	3,84	3,89	3,94	0,25
32	3,55	3,60	3,65	3,70	3,76	3,81	3,86	3,91	3,96	4,02	4,07	0,26
33	3,66	3,71	3,77	3,82	3,87	3,98	3,98	4,03	4,09	4,14	4,20	0,27
34	3,77	3,82	3,88	3,93	3,99	4,05	4,10	4,16	4,21	4,27	4,32	0,27
35	3,88	3,94	3,99	4,05	4,11	4,16	4,22	4,28	4,34	4,39	4,45	0,28

Tabela 2.26. **Corecţia indicaţiilor barometrului pentru depresiunea capilară a mercurului**

Cifrele din tabelă arată cu cîţi milimetri coboară mijlocul meniscului de mercur datorită depresiunii capilare în tuburi de diferite diametre şi la diferite înălţimi ale meniscului de mercur.

Mercurul este la 20 °C; coeficientul lui de tensiune superficială este de 450 dyn/cm; acceleraţia gravitaţiei se consideră normală.

Tabela 2.26

Diametrul tubului [mm]	Înălţimea meniscului de mercur [mm]								
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
7	0,18	0,35	0,51	0,66	0,79	0,91	1,01	1,08	1,14
8	0,13	0,25	0,37	0,48	0,58	0,67	0,74	0,81	0,85
9	0,09	0,18	0,27	0,35	0,43	0,50	0,56	0,61	0,65
10	0,07	0,14	0,20	0,26	0,32	0,37	0,42	0,46	0,49
11	0,05	0,10	0,15	0,20	0,24	0,28	0,32	0,35	0,38
12	0,04	0,08	0,12	0,15	0,18	0,22	0,25	0,27	0,29
13	0,03	0,06	0,09	0,12	0,14	0,17	0,19	0,21	0,23
14	0,02	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,16	0,18

Tabela 2.27. Raportarea greutății corpului la greutatea lui în vid

Greutatea G a corpului în vid se calculează din rezultatele cîntăririi directe pe baza formulei

$$G = P + P\,\delta\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right). \qquad (2.66)$$

unde P este greutatea corpului în aer, δ greutatea specifică a aerului, γ_1 greutatea specifică a corpului cîntărit și γ_2 greutatea specifică a materialului greutăților. În tabela 2.27 sînt date valorile mărimii $K \cdot 10^5$, unde K rezultă din formula

$$K = \delta\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right). \qquad (2.67)$$

Corecția este dată pentru greutatea de alamă la diferite valori γ_1: de la 0,7 pînă la 20 gf/cm³. Mărimea K este calculată pentru greutatea de 1 gf; la calculul lui K s-a considerat că greutatea specifică a aerului este $\delta = 0{,}0012$ gf/cm³, iar greutatea specifică a alamei este $\gamma_2 = 8{,}4$ gf/cm³.

Pentru corpuri cu greutatea specifică mai mică decît 8,4 gf/cm³ (greutatea specifică a alamei) corecția este pozitivă, iar pentru corpurile cu greutatea specifică mai mare de 8,4 gf/cm³, corecția este negativă.

Tabela 2.27

γ_1	$10^5 \cdot K$	γ_1	$10^5 \cdot K$	γ_1	$10^5 \cdot K$	γ_1	$10^5 \cdot K$	γ_1	$10^5 \cdot K$
0,7	157	1,5	066	2,4	036	5,0	010	9	001
0,8	136	1,6	61	2,6	32	5,5	07(5)	10	2
0,9	119	1,7	56	2,8	29	6,0	6	12	4
1,0	106	1,8	52	3,0	26	6,5	4	14	6
1,1	095	1,9	49	3,5	20	7,0	3	16	7
1,2	086	2,0	46	4,0	16	7,5	2	18	8
1,3	078	2,2	40	4,5	12	8,0	+1	20	8
1,4	071								

Tabelele 2.28 a și b. Raportarea volumului de gaz la 0°C și 760 mm Hg

Volumul V_0 al unui gaz la 0°C și la presiunea de 760 mm Hg și densitatea ρ_0 în aceleași condiții sînt determinate după formulele

$$V_0 = \frac{V_t}{1 + \alpha_p t}\,\frac{H}{760}, \qquad (2.68)$$

$$\rho_0 = \rho_t\,(1 + \alpha_p t)\,\frac{760}{H} \qquad (2.69)$$

unde t este temperatura gazului, H este presiunea sa exprimată în mm Hg, V_t și ρ_t sînt volumul și respectiv densitatea gazului la temperatura t[°C] și la presiunea H [mm Hg], iar α_p este coeficientul de dilatare a gazului la presiunea constantă.

Aceste formule au fost deduse în ipoteza că gazele se supun legilor Boyle-Mariotte și Gay-Lussac. În tabele sînt date valorile mărimilor $1 + \alpha_p t$ în intervalul de temperaturi de la 0 la 124 °C (tabela 2.28 a) și $H/760$ în intervalul de presiuni de la 700 la 849 mm Hg (tabela 2.28 b). Pentru aceste calcule s-a considerat că coeficientul de dilatare al gazelor la presiune constantă este $\alpha = 0{,}00367$ °C^{-1}.

Tabela 2.28 a

t[°C]	$1 + \alpha_p t$	t [°C]	$1 + \alpha_p t$	t [°C]	$1 + \alpha_p t$	t [°C]	$1 + \alpha_p t$	t [°C]	$1 + \alpha_p t$
0	1,0000	25	1,0917	50	1,1835	75	1,2752	100	1,3670
1	1,0037	26	1,0954	51	1,1872	76	1,2789	101	1,3707
2	1,0073	27	1,0991	52	1,1908	77	1,2826	102	1,3743
3	1,0110	28	1,1028	53	1,1945	78	1,2863	103	1,3780
4	1,0147	29	1,1064	54	1,1982	79	1,2899	104	1,3817
5	1,0183	30	1,1101	55	1,2018	80	1,2936	105	1,3853
6	1,0220	31	1,1138	56	1,2055	81	1,2973	106	1,3890
7	1,0257	32	1,1174	57	1,2092	82	1,3009	107	1,3927
8	1,0294	33	1,1211	58	1,2129	83	1,3046	108	1,3964
9	1,0330	34	1,1248	59	1,2165	84	1,3083	109	1,4000
10	1,0367	35	1,1284	60	1,2202	85	1,3119	110	1,4037
11	1,0404	36	1,1321	61	1,2239	86	1,3156	111	1,4074
12	1,0440	37	1,1358	62	1,2275	87	1,3193	112	1,4110
13	1,0477	38	1,1395	63	1,2312	88	1,3230	113	1,4147
14	1,0514	39	1,1431	64	1,2349	89	1,3266	114	1,4184
15	1,0550	40	1,1468	65	1,2385	90	1,3303	115	1,4220
16	1,0587	41	1,1505	66	1,2422	91	1,3340	116	1,4257
17	1,0624	42	1,1541	67	1,2459	92	1,3376	117	1,4294
18	1,0661	43	1,1578	68	1,2496	93	1,3413	118	1,4331
19	1,0697	44	1,1615	69	1,2532	94	1,3450	119	1,4367
20	1,0734	45	1,1651	70	1,2569	95	1,3486	120	1,4404
21	1,0771	46	1,1688	71	1,2606	96	1,3523	121	1,4441
22	1,0807	47	1,1725	72	1,2642	97	1,3560	122	1,4477
23	1,0844	48	1,1762	73	1,2679	98	1,3597	123	1,4514
24	1,0881	49	1,1798	74	1,2746	99	1,3633	124	1,4551

Tabela 2.28 b

H [mmHg]	$\frac{H}{760}$	H [mmHg]	$\frac{H}{760}$	H [mmHg]	$\frac{H}{760}$	H [mmHg]	$\frac{H}{760}$	H [mmHg]	$\frac{H}{760}$
700	0,9211	730	0,9605	760	1,0000	790	1,0395	820	1,0790
701	0,9224	731	0,9618	761	1,0013	791	1,0408	821	1,0803
702	0,9237	732	0,9632	762	1,0026	792	1,0421	822	1,0816
703	0,9250	733	0,9645	763	1,0039	793	1,0434	823	1,0829
704	0,9263	734	0,9658	764	1,0053	794	1,0447	824	1,0842
705	0,9276	735	0,9671	765	1,0066	795	1,0461	825	1,0855
706	0,9289	736	0,9684	766	1,0079	796	1,0474	826	1,0868
707	0,9303	737	0,9697	767	1,0092	797	1,0487	827	1,0882
708	0,9316	738	0,9711	768	1,0105	798	1,0500	828	1,0895
709	0,9329	739	0,9724	769	1,0118	799	1,0513	829	1,0908
710	0,9342	740	0,9737	770	1,0132	800	1,0526	830	1,0921
711	0,9355	741	0,9750	771	1,0145	801	1,0540	831	1,0934
712	0,9368	742	0,9763	772	1,0158	802	1,0553	832	1,0947
713	0,9382	743	0,9776	773	1,0171	803	1,0566	833	1,0961
714	0,9395	744	0,9789	774	1,0184	804	1,0579	834	1,0974
715	0,9408	745	0,9803	775	1,0197	805	1,0592	835	1,0987
716	0,9421	746	0,9816	776	1,0211	806	1,0605	836	1,1000
717	0,9434	747	0,9829	777	1,0224	807	1,0618	837	1,1013
718	0,9447	748	0 9842	778	1,0237	808	1,0632	838	1,1026
719	0,9461	749	0,9855	779	1,0250	809	1,0645	839	1,1040
720	0,9474	750	0,9868	780	1,0263	810	1,0658	840	1,1053
721	0,9487	751	0,9882	781	1,0276	811	1,0671	841	1,1066
722	0,9500	752	0,9895	782	1,0290	812	1,0684	842	1,1079
723	0,9513	753	0,9908	783	1,0303	813	1,0697	843	1,1092
724	0,9526	754	0,9921	784	1,0316	814	1,0711	844	1,1105
725	0,9539	755	0,9934	785	1,0329	815	1,0724	845	1,1118
726	0,9553	756	0,9947	786	1,0342	816	1,0737	846	1,1132
727	0,9566	757	0,9961	787	1,0355	817	1,0750	847	1,1145
728	0,9579	758	0,9974	788	1,0368	818	1,0763	848	1,1158
729	0,9592	759	0,9987	789	1,0382	819	1,0776	849	1,1171

Notă la tabelele 2.28 a şi b. Considerînd, la calcule, că $\alpha_p = 0{,}00367 °C^{-1}$, se obţin rezultate corecte, dar riguros vorbind numai pentru un gaz ideal. Pentru gaze reale sînt necesare corecţiile respective, deoarece coeficienţii termici ai gazelor diferă de valorile adoptate pentru α_p. Totuşi, aceste corecţii pentru majoritatea gazelor, ca hidrogenul, heliul, azotul, aerul etc., modifică a şasea sau (uneori) a cincea zecimală; primele patru zecimale date în tabelă îşi păstrează valoarea. Numai pentru gazele grele (bioxid de sulf, ozon, clor etc.) corecţiile pot modifica zecimala a patra.

Tabela 2.29. **Densitatea gazelor la 0°C şi 760 mm Hg**

În tabela 2.29 sînt date densitatea gazelor uscate la 0°C şi 760 mm Hg, exprimată în g/l, şi densitatea relativă a gazelor în raport cu aerul, $\rho_r = \rho / \rho_{aer}$, calculată în ipoteza că aerul şi gazele se află în aceleaşi condiţii de presiune şi temperatură.

La calcularea densităților gazelor, densitatea apei fără impurități, la 4 °C, este considerată egală cu 1 000 g/cm³. Pentru a obține densitatea gazelor în sistemul CGS, adică în g/cm³, valorile lui ρ din tabelă trebuie împărțite la 1 000.

Tabela 2.29

Gazul	Formula	Masa moleculară	(g/l)	$\rho_r = \rho/\rho_{aer}$
Acetilenă	C_2H_2	26,038	1,1747	0,907
Acid bromhidric	HBr	80,92	3,6445	2,8189
Acid cianhidric	HCN	27,027	0,901	0,697
Acid clorhidric	HCl	36,47	1,6392	1,2678
Acid fluorhidric	HF	20,01	0,921	0,7123
Acid iodhidric	HJ	127,92	5,7891	4,4776
Aer (fără CO_2)	—	28,97	1,293	1
Amoniac	NH_3	17,032	0,77140	0,596
Argon	Ar	39,944	1,78364	1,380
Azot	N_2	28,016	1,25049	0,967
Bioxid de carbon	CO_2	44,011	1,977	1,529
Bioxid de clor	ClO_2	67,46	3,09	2,39
Bioxid de sulf	SO_2	64,066	2,92655	2,264
Butan (izo)	C_4H_{10}	58,125	2,7032	2,090
Cianură	C_2N_2	52,038	2,335	1,798
Clor	Cl_2	70,914	3,214	2,485
Clorură de metil	CH_3Cl	50,49	2,3076	1,7848
Etan	C_2H_6	30,07	0,356	1,049
Etilenă	C_2H_4	28,054	1,26035	0,975
Fluor	F_2	38,00	1,696	1,312
Heliu	He	4,003	0,17846	0,138
Hidrogen	H_2	2,016	0,089882	0,0695
Hidrogen arsenios	AsH_3	77,93	2,484	2,695
Hidrogen fosforat	PH_3	34,00	1,5294	1,1829
Hidrogen sulfurat	H_2S	34,082	1,538	1,198
Hidrură de seleniu	H_2Se	80,98	3,670	2,839
Hidrură de siliciu	SiH_4	32,12	1,44	1,114
Hidrură de stibiu	SbH_3	124,78	5,30	4,10
Hidrură de telur	H_2Te	129,63	5,81	4,49
Kripton	Kr	83,80	3,743	2,89
Metan	CH_4	16,043	0,71682	0,554
Metilamină	CH_3NH_2	31,06	1,396	1,080
Neon	Ne	20,183	0,89990	0,696
Oxid de azot	NO	30,008	1,340	1,037
Oxid de carbon	CO	28,011	1,250	0,967
Oxigen	O_2	32,000	1,42896	1,105
Propan	$(CH_3)_2CH_2$	44,09	2,0096	1,554
Protoxid de azot	N_2O	44,016	1,9775	1,530
Radon	Rn	222,00	9,96	7,703
Tetrafluorură de siliciu	SiF_4	169,92	4,684	3,623
Trimetilamină	$(CH_3)_3N$	59,11	2,580	1,996
Xenon	Xe	131,3	5,851	4,525

Tabela 2.30. **Densitatea aerului uscat la diferite temperaturi**

Densitatea ρ_t a aerului la temperatura t se calculează din formula

$$\rho_t = \rho_0 \frac{H}{(1 + \alpha_p t) \cdot 760} \tag{2.70}$$

unde ρ_0 este densitatea aerului la temperatura 0°C şi presiunea de 760 mm Hg, H este presiunea aerului la temperatura t [°C], exprimată de asemenea în mm Hg, iar α_p este coeficientul de dilatare al aerului la presiune constantă.

În tabela 2.30 sînt date valorile mărimii $\rho_t \cdot 10^2$ determinate din formula (2.70) în intervalul de temperaturi de la 0°C pînă la 35°C şi în intervalul de presiuni de la 700 la 780 mm Hg, pentru aerul uscat şi cu conţinut de bioxid de carbon mai mic de 0,04% în volum. Pentru calcule s-a considerat că densitatea aerului la 0°C şi 760 mm Hg este $\rho_0 = 0{,}0012932$ g/cm³, iar coeficientul de dilatare al aerului la presiune constantă este $\alpha_p = 0{,}00367$ °C⁻¹.

Tabela 2.30

t[°C]	H[mm Hg]								
	700	710	720	730	740	750	760	770	780
0	0,1191	0,1208	0,1225	0,1242	0,1259	0,1276	0,1293	0,1310	0,1327
1	1187	1204	1221	1238	1255	1272	1288	1305	1322
2	1182	1199	1216	1233	1250	1267	1284	1300	1318
3	1178	1195	1212	1229	1245	1262	1279	1296	1313
4	1174	1191	1207	1224	1241	1258	1274	1291	1308
5	1170	1186	1203	1220	1236	1253	1270	1287	1303
6	1165	1182	1199	1215	1232	1249	1265	1282	1299
7	1161	1178	1194	1211	1228	1244	1261	1277	1294
8	1157	1174	1190	1207	1223	1240	1256	1273	1289
9	1153	1169	1186	1202	1219	1235	1252	1268	1285
10	1149	1165	1182	1198	1215	1231	1247	1264	1280
11	1145	1161	1178	1194	1210	1227	1243	1259	1276
12	1141	1157	1173	1190	1206	1222	1239	1255	1271
13	1137	1153	1169	1186	1202	1218	1234	1251	1267
14	1133	1149	1165	1181	1198	1214	1230	1246	1262
15	1129	1145	1161	1177	1193	1210	1226	1242	1258
16	1125	1141	1157	1173	1189	1205	1221	1238	1254
17	1121	1137	1153	1169	1185	1201	1217	1233	1249
18	1117	1133	1149	1165	1181	1197	1213	1229	1245
19	1113	1129	1145	1161	1177	1193	1209	1225	1241
20	1110	1126	1141	1157	1173	1189	1205	1221	1236
21	1106	1122	1137	1153	1169	1185	1201	1216	1232
22	1102	1118	1134	1149	1165	1181	1197	1212	1228
23	1098	1114	1130	1145	1161	1177	1193	1208	1224

Tabela 2.30 *(continuare)*

t[°C]	H [mm Hg]								
	700	710	720	730	740	750	760	770	780
24	0,1095	0,1110	0,1126	0,1142	0,1157	0,1173	0,1189	0,1204	0,1220
25	1091	1107	1122	1138	1153	1169	1185	1200	1216
26	1087	1103	1118	1134	1149	1165	1181	1196	1212
27	1084	1099	1115	1130	1146	1161	1177	1192	1208
28	1080	1096	1111	1126	1142	1157	1173	1188	1204
29	1077	1092	1107	1123	1138	1153	1169	1184	1200
30	1073	1088	1104	1119	1134	1150	1165	1180	1196
31	1069	1085	1100	1115	1130	1146	1161	1176	1192
32	1065	1081	1096	1112	1126	1142	1157	1172	1188
33	1062	1077	1093	1108	1122	1138	1153	1168	1184
34	1058	1073	1089	1104	1117	1134	1149	1164	1180
35	1054	1069	1085	1001	1112	1130	1145	1160	1176

Tabela 2.31. **Densitatea corpurilor lichide și solide**

Valorile densității ρ sînt date în g/cm³ și se referă la temperatura medie a camerei de 15–20°C. La calculul densităților corpurilor s-a considerat că densitatea apei fără impurități la 4°C este de 1,0000 g/cm³.

Tabela 2.31 a

	ρ[g/cm³]		ρ[g/cm³]
Acetonă	0,792	Apă grea	1,1053
Acid acetic	1,049	Argint	10,50
Agat	2,5 –2,7	Aur	19,32
Alabastru	2,7 –2,8	Azbest	2,2 –3,2
Alamă	8,5 –8,7	Bariu	3,5
Alamă topită	8,4 –8,6	Benzen	0,879
Alaun (aluminiu-amo-		Benzină	0,7 –0,8
niu)	1,64	Beriliu	1,82
Alaun potasiu	1,75	Bismut	9,80
Alcool amilic	0,815	Borax	1,7 –1,8
Alcool etilic	0,789	Brom	3,14
Alcool metilic	0,791	Bronz (Cu, Al)	7,6 –7,8
Aliaj Wood[1])	9,7	Bronz (Cu, Sn)	8,5 –8,9
Alpaca[2])	8,4 –8,7	Cadmiu	8,65
Aluminiu	2,70	Calcit	2,6 –2,8
Aluminiu laminat	2,6 –2,7	Calciu	1,55
Aluminiu turnat	2,56	Camfor	0,99
Anilină	1,03	Caolină	2,4 –2,6
Apă de mare	1,03	Carbon	

Tabela 2.31 a (*continuare*)

	ρ [g/cm³]		ρ [g/cm³]
Carbon diamant	3,4 –3,5	mesteacăn	0,6 –0,8
Carbon grafit	2,3 –2,7	molid	0,4 –0,7
Cărbune (de lemn)	0,2 –0,4	pin	1,1 –1,3
Cauciuc natural	0,92–0,93	stejar	0,7 –1,0
Ceară	0,87–0,99	Magneziu	1,74
Celuloid	1,4	Malahit	3,9 –4,1
Chilimbar	1,05–1,09	Mangan	7,4
Cloroform	1,498	Manganin[6])	8,5
Cobalt	8,7	Marmoră	2,6 –2,8
Colofoniu	1,07–1,1	Mercur	13,55
Constantan[3])	8,9	Mică	2,7 –2,9
Corindon	3,9 –4,1	Molibden	10,2
Cositor	7,29	Naftalină	1,15
Cretă	1,9 –2,6	Nichel	8,9
Crom	6,8 –7,2	Nichelină[7])	8,5
Cromel[4])	8,24	Nicrom[8])	8,1 –8,4
Cuarț	2,5 –2,8	Nitrobenzen	1,21
Cupru	8,92	Nitroglicerină	1,60
Cupru laminat	8,8 –8,9	Os	1,8 –2,0
Cupru topit	8,6 –8,8	Oțel	7,7 –7,9
Diamant	3,4 –3,5	Paladiu	11,9
Duraluminiu	2,7 –2,9	Parafină	0,87–0,92
Ebonită	1,2	Permaloi[9])	8,6
Feldspat	2,5 –2,7	Petrol	0,73–0,94
Fier	7,9	Petrol lampant	0,80–0,82
Fier armko	7,86	Piatră ponce	0,4 –0,9
Fier laminat	7,6 –7,8	Platină	21,45
Fildeș	2,0	Platinit[10])	8,2
Fluorină	3,0 –3,2	Plumb	11,34
Fontă	7,0 –7,8	Plută	0,22–0,26
Fosfor alb	1,82	Porțelan	2,2 –2,5
Fosfor roșu	2,20	Potasiu	0,86
Gheață (0° C)	0,89–0,92	Rabbit	7,1 –9,5
Glicerină deshidratată	1,2604	Radiu	5
Granit	2,5 –2,8	Rodiu	12,4
Gumigut	1,20	Rubidiu	1,53
Hiposulfit	1,73	Sare de bucătărie	2,16
Hîrtie de scris	0,7 –1,1	Sare gemă	2,1 –2,2
Invar[5])	8,0	Siliciu	v. cuarț
Ipsos calcinat	2,7 –2,8	Silitră am	1,73
Ipsos cristalin	2,2 –2,4	Silitră pat	2,11
Lemn uscat:		Silitră sod	2,26
bamcu	0,4	Spat de Islanda	2,71
guaiar	1,1 –1,4	Spat greu	4,3 –4,6
lemn negru, frasin	0,6 –0,8	Smirghel	aprox. 4,0

Tabela 2.31 a (*continuare*)

	ρ[g/cm³]		ρ[g/cm³]
Sodiu	0,97	Toluen	0,867
Stibiu	6,62	Turmalină	2,9 −3,2
Sticlă (cristal)	2,9 −3,0	Ţipirig	1,5 −1,6
Sticlă de geam	2,4 −2,6	Uraniu	18,7
Sticlă flint	2,9 −5,9	Vanadiu	6,02
Stronţiu	2,6	Wolfram	19,3
Sulf monoclinic	1,96	Xilen (orto)	0,88
Sulf rombic	2,07	Zahăr (rafinat)	1,6
Sulfură de carbon	1,263	Zinc	7,1
Talc	2,7 −2,8	Zinc laminat	7,1 −7,2
Tantal	16,6	Zinc topit	6,9 −7,0
Terebentină	0,86−0,87		

Note la tabela 2.31 a. 1) Aliajul cu compoziţia 63,8% Fe + +36%Ni+0,2% C. 2) Aliajul cu compoziţia 60% Cu+40% Ni; uneori se mai adaugă o cantitate mică (1,50%) de aluminiu în detrimentul cuprului. 3) Aliaj cu compoziţia 84% Cu + 12% Mn + 4% Ni. 4) Aliaj cu compoziţia 65% Cu + 20% Zn + 15% Ni. 5) După compoziţie şi proprietăţi este apropiat de alpaca (argentan); uneori i se adaugă o cantitate mică de fier şi mangan. 6) Aliaj cu compoziţia 61% Ni + + 23% Fe + 16% Cr; se folosesc şi aliaje cu compoziţia 80% Ni + + 20% Cr. 7) Aliaj cu compoziţia 78,5% + 21,5% Fe. 8) Aliaj cu compoziţia 46% Ni + 54% Fe; se foloseşte în tehnica vidului ca înlocuitor de platină. 9) Face parte din aliajele uşor fuzibile şi are compoziţia 25% Pb + 12,5% Sn + 50% Bi + 12,5% Cd; temperatura de topire este de aproximativ 60,5 °C. 10) Aliaj cu compoziţia 90% Ni+ + 9,5 % Cr.

Tabela 2.31 b. **Densitatea unor lichide grele**

	Lichidul	Densitatea [g/cm³]
1.	Tetrabrommetan (se dizolvă în tetraclorură de carbon şi benzen):	2,964 la 20 °C
2.	Iodură de metilen (se dizolvă de aceleaşi lichide)	3,325 la 20 °C
3.	Lichidul lui Clerioci (soluţii apoase ale unor combinaţii organice a taliului)	pînă la 4,9

T a b e l a 2.31 c

Aluminiu-cupru

Al[%]	ρ[g/cm³]
0	8,92
0,10	8,90
1,06	8,78
2,10	8,62
2,99	8,47
4,06	8,31
5,07	8,18
5,76	8,07
6,73	7,95
7,35	7,85
8,12	7,78
8,67	7,69
9,38	7,61
9,90	7,56
10,78	7,45
11,73	7,35
13,02	7,23

Aur-cupru

Cu[%]	ρ[g/cm³]
0	19,32
1,99	18,839
3,12	18,581
4,17	18,356
5,16	18,117
6,15	17,934
6,80	17,791
7,92	17,568
9,95	17,165
11,95	16,806
13,86	16,483

Aur-argint

Ag[%]	ρ[g/cm³]
0	19,32
8,4	18,041
12,0	17,540
21,5	16,354
35,4	14,870
52,2	13,432
68,7	12,257
76,7	11,760
100,0	10,50

Cupru-cositor

Sn[%]	ρ [g/cm³]
0	8,92
3,8	8,79
5,6	8,78
7,4	8,76
9,0	8,76
10,7	8,80
12,3	8,81
13,8	8,83
25,0	8,87
28,0	8,903
39,2	8,980
42,0	8,791
50,0	8,760
56,0	8,357
59,0	8,210
70,3	7,972
78,4	7,726
80,0	7,735
100,0	7,29

Cupru-zinc

Zn[%]	ρ[g/cm³]
0	8,92
19,8	8,459
52,4	8,149
53,5	8,143
61,4	7,976
63,7	7,951
65,4	7,904
67,1	7,873
68,4	7,833
76,4	7,714
85,0	7,595
87,9	7,481
94,1	7,311
100,0	7,1

Cositor-cadmiu

Sn[%]	ρ[g/cm³]
0	8,65
14,7	8,432
20,6	8,336
34,1	8,139
50,8	7,904
67,5	7,690
80,6	7,849
86,2	7,494

Cositor plumb

Sn[%]	ρ[g/cm³]
0	11,34
8,5	10,815
12,3	10,590
21,8	10,080
35,9	9,460
52,8	8,779
69,2	8,188
77,0	7,927
100,0	7,29

Tabela 2.31 c (*continuare*)

Unele aliaje separate	ρ[g/cm³]
94 Al, 4 Cu, 0,5 Mg (+ 1% impurități)	2,96
90 Al, 10 Mg (mangal)	2,50
70 Al, 30 Mg (idem)	2,0
53 Bi, 40 Pb, 7 Sn (punct de topire în jurul lui 96° C)	10,56
95,5 Cu, 4,3 Sn, 0,2 P (bronz fosforos)	8,91
79,7 Cu, 10 Sn, 9,5 Sb, 0,8 P (idem)	8,8
59 Cu, 30 Zn, 11 Ni (argint german)	8,34
26,3 Cu, 36,9 Zn, 36,8 Ni (idem)	8,30
90 Cu, 10 Zn (bronz pentru tunuri)	8,78

Tabela 2.32. a și b. **Densitatea și volumul specific al apei la diferite temperaturi**

Densitatea ρ a unui corp și volumul său specific v sînt legate prin relația $v = V/m = 1/\rho$, unde m este masa corpului, iar V volumul lui. La calculul densității și volumului specific al apei în intervalul de temperaturi de la 0° C—35° C s-a considerat că densitatea apei la 4° C este $\rho = 1{,}00000$ g/cm³, iar volumul specific al apei la 4 °C este $v = 1{,}00000$ cm³/g.

În tabela 2.32 a sînt date valorile densității și volumului specific al apei în intervalul de temperaturi de la 0° C la 35° C.

În tabela 2.32 b sînt date cu mai multă precizie valorile densității apei în intervalul de temperaturi de la 16° C la 24° C la intervale de 0,1° C.

Tabela 2.32 a

t[°C]	ρ[g/cm³]	v[cm³/g]	t[°C]	ρ[g/cm³]	v[cm³/g]	t[C°]	ρ[g/cm³]	v[cm³/g]
0	0,99987	1,00013	12	0,99952	1,00048	24	0,99732	1,00268(5)
1	993	007	13	940	060	25	707	294
2	997	003	14	927	073	26	681	320
3	999	001	15	913	087	27	654	347
4	1,00000	1,00000	16	897	103	28	626	375(5)
5	0,99999	001	17	880	120	29	597	405
6	997	003	18	862	138	30	567	435
7	993	007	19	843	157	31	537	465(5)
8	988	012	20	823	177	32	505	497
9	981	019	21	202	198(5)	33	473	530
10	973	027	22	779(5)	221	34	440	563
11	963	037	23	756	224	35	406	598

Tabela 2.32 b

t [°C]	ρ[g/cm³]	t[°C]	ρ[g/cm³]	t[°C]	ρ[g/cm³]	t[°C]	ρ[g/cm³]
16,0	0,998970	18,0	0,998623	20,0	0,998232	22,0	0,997799
1	998954	1	998604	1	998211	1	997776
2	998937	2	998586	2	998191	2	997753
3	998921	3	998567	3	998170	3	997730
4	998904	4	998548	4	998149	4	997707
5	998888	5	998529	5	998128	5	997684
6	998871	6	998510	6	998107	6	997661
7	998854	7	998491	7	998085	7	997637
8	998836	8	998472	8	998064	8	997614
9	998819	9	998453	9	998043	9	997591
17,0	0,998802	19,0	0,998433	21,0	0,998021	23,0	0,997567
1	998785	1	998413	1	997999	1	997543
2	998767	2	998394	2	997977	2	997520
3	998749	3	998374	3	997956	3	997496
4	998732	4	998354	4	997934	4	997472
5	998714	5	998334	5	997911	5	997448
6	998696	6	998314	6	997889	6	997424
7	998678	7	998293	7	997867	7	997399
8	998660	8	998273	8	997844	8	997375
9	998641	9	998253	9	997822	9	997351

Tabela 2.33. **Densitatea și volumul specific al mercurului la intervalul de temperaturi de la 0°C pînă la 100°C**

Valorile densității mercurului (tabela 2.33 a) sînt date în g/cm³ cu o precizie pînă la 0,0001 g/cm³. Pentru calcule s-a considerat că densitatea apei fără impurități la 4°C este egală cu 1,00000 g/cm³, iar densitatea mercurului la 0°C este egală cu 13,5955 g/cm³.

Valorile volumului specific al mercurului (tabela 2.33 b) sînt date în unități convenționale cu o precizie pînă la 0,0001 față de volumul său specific la 0°C, care a fost luat egal cu 1,0000.

Tabela 2.33 a

t° (grade zecimale)	Grade									
	0°C	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°C
0	13,5955	5930	5905	5880	5856	5831	5806	5782	5757	5732
10	5708	5683	5658	5634	5609	5584	5560	5535	5511	5486
20	5461	5437	5412	5388	5363	5339	5814	5290	5265	5241
30	5216	5191	5167	5142	5118	5094	5069	5045	5020	4996
40	4971	4947	4922	4898	4873	4849	4825	4800	4776	4751
50	4727	4703	4678	4654	4630	4605	4581	4557	4532	4508
60	4484	4459	4435	4411	4386	4362	4338	4314	4289	4265
70	4241	4217	4192	4168	4144	4120	4095	4071	4047	4023
80	3999	3975	3950	3926	3902	3878	3854	3830	3806	3781
90	3757	3733	3709	3685	3661	3637	3613	3589	3565	3541
100	3516	3492	—	—	—	—	—	—	—	—

Tabela 2.33 b

0	1,0000	0002	0004	0005(5)	0007	0009	0011	0013	0014(5)	0016
10	0018	0020	0022	0024	0025(5)	0027	0029	0031	0033	0035
20	0036	0038	0040	0042	0044	0045(5)	0048	0049	0051	0053
30	0055	0056	0058	0060	0062	0064	0066	0067	0069	0071
40	0073	0075	0076(5)	0078	0080	0082	0084	0086	0087(5)	0089
50	0091	0093	0095	0097	0098	0100	0102	0104	0106	0107(5)
60	0109	0111	0113	0115	0117	0118(5)	0120	0122	0124	0126
70	0128	0129(5)	0131	0133	0135	0137	0139	0140(5)	0142	0144
80	0146	0148	0150	0151(5)	0153	0155	0157	0159	0161	0162
90	0164	0166	0168	0170	0172	0173	0175	0177	0179	0181
100	0183	0184	—	—	—	—	—	—	—	—

T a b e l a 2.34. **Densitatea unor soluții apoase de săruri și acizi, la 15°C**

Concentrația C a unei soluții este exprimată în procente, care determină cantitatea, în grame, din corpul respectiv, conținută în 100 g soluție. Se consideră că la dizolvare corpurile sînt deshidratate. Valorile densității, în g/cm³, sînt interpolate pentru numere procentuale întregi cu o precizie pînă la 0,0001 g/cm³, densitatea apei fără impurități la 4°C și 15°C fiind $\rho_4 = 1{,}00000$ g/cm³, respectiv $\rho_{15} = 0{,}99913$ g/cm³.

Soluția	Concentrația C [%]										
	2	4	6	8	10	15	20	25	30	35	40	45
Acid acetic ($C_2H_4O_2$)	1,0033	0069	0106	0142	0176	0262	0343	0420	0493	0573	0622	0730
Acid azotic (HNO_3)	1,0105	0219	0334	0450	0565	0874	1191	1505	1870	2188	2509	3157
Acid clorhidric (HCl)	1,0093	0193	0292	0292	0491	0748	0999	1261	1519	1779	2047	—
$AlCl_3$	1,0135	0279	0425	0574	0724	1071	1526	1958	2414	2749	3399	—
$BaCl_2$	1,0174	0357	0547	0744	0940	1477	2048	2431	—	—	—	—
$CaCl_2$	1,0161	0332	0505	0682	0858	1326	1810	2328	2868	3431	4016	—
$CuSO_4$	1,0185	0412	0642	0870	1098	1738	—	—	—	—	—	—
KCl	1,0121	0251	0332	0515	0648	0993	1349	—	—	—	—	—
K_2CO_3	1,0174	0356	0541	0730	0917	1409	1910	2547	3011	3576	4170	5428
KNO_3	1,0119	0248	0377	0510	0624	0988	1348	—	—	—	—	—
KOH	1,0175	0359	0544	0730	0918	1396	1884	2387	2905	3440	3991	5143
$LiCl$	1,0112	0231	0343	0452	0574	0362	1164	1483	1807	2163	2543	—
$MgSO_4$	1,0197	0402	0613	0828	1042	1513	2208	2825	—	—	—	—
$MnCl_2$	1,0182	0363	0545	0716	0896	1378	1875	2435	3045	3705	4411	—
$NaCl$	1,0137	0282	0429	0577	0726	1105	1497	1904	—	—	—	—
Na_2CO_3	1,0201	0410	0621	0833	1045	—	—	—	—	—	—	—
$NaOH$	1,0219	0443	0666	0889	1111	1665	2219	2771	3312	3838	4343	5303
Na_2SO_4	1,0173	0355	0540	0727	0917	—	—	—	—	—	—	—
NH_4Cl	1,0054	0117	0179	0239	0299	0441	0583	0720	—	—	—	—
$(NH_4)_2SO_4$	1,0099	0214	0328	0443	0558	0844	1130	1434	1724	2004	2284	2890
$Pb(CH_3CO_2)$	1,0145	0296	0447	0598	0761	1190	1652	2148	2655	3275	3869	—

Tabela 2.35

Densitatea soluţiilor apoase de acid sulfuric în intervalul de temperaturi de la 0 °C pînă la 40 °C

Concentraţia *C* a soluţiilor de acid sulfuric este exprimată în procente, care determină numărul de grame de acid sulfuric conţinute în 100 g soluţie. Valorile densităţii sînt exprimate în g/cm^3 şi sînt interpolate pentru numere procentuale întregi cu o precizie pînă la 0,0001 g/cm^3. Densitatea apei fără impurităţi la 4° C este considerată egală cu 1,00000 g/cm^3.

C [%]	Temperatura							
	0°C	5°	10°	15°	20°	25°	30°	40 °C
0	0,9999	1,0000	0,9997	0,9991	0,9982	0,9971	0,9957	0,9922
1	1,0075	1,0073	1,0069	1,0061	1,0051	1,0038	1,0022	0,9986
2	1,0147	1,0144	1,0138	1,0129	1,0118	1,0104	1,0087	1,0050
3	1,0219	1,0214	1,0206	1,0197	1,0184	1,0169	1,0152	1,0113
4	1,0291	1,0284	1,0275	1,0264	1,0250	1,0234	1,0246	1,0176
5	1,0364	1,0358	1,0344	1,0332	1,0317	1,0300	1,0271	1,0240
6	1,0437	1,0426	1,0414	1,0400	1,0384	1,0367	1,0347	1,0305
7	1,0511	1,0498	1,0485	1,0469	1,0453	1,0434	1,0414	1,0371
8	1,0585	1,0571	1,0556	1,0539	1,0522	1,0502	1,0482	1,0437
9	1,0660	1,0644	1,0628	1,0610	1,0591	1,0571	1,0549	1,0503
10	1,0735	1,0718	1,0700	1,0681	1,0661	1,0640	1,0617	1,0570
11	1,0810	1,0792	1,0773	1,0753	1,0731	1,0709	1,0686	1,0637
12	1,0886	1,0866	1,0846	1,0825	1,0803	1,0780	1,0756	1,0705
13	1,0962	1,0942	1,0920	1,0898	1,0874	1,0851	1,0826	1,0774
14	1,1039	1,1017	1,0994	1,0971	1,0947	1,0922	1,0897	1,0844

Tabela 2.35 (*continuare*)

C [%]	Temperatura							
	0 °C	5°	10°	15°	20°	25°	30°	40 °C
15	1,1116	1,1093	1,1069	1,1045	1,1020	1,0994	1,0968	1,0914
16	1,1194	1,1170	1,1145	1,1120	1,1094	1,1067	1,1040	1,0985
17	1,1272	1,1247	1,1221	1,1195	1,1168	1,1141	1,1113	1,1057
18	1,1351	1,1325	1,1298	1,1270	1,1243	1,1215	1,1187	1,1129
19	1,1430	1,1403	1,1375	1,1347	1,1318	1,1290	1,1261	1,1202
20	1,1510	1,1481	1,1453	1,1424	1,1394	1,1365	1,1335	1,1275
22	1,1670	1,1640	1,1609	1,1579	1,1548	1,1517	1,1486	1,1424
24	1,1832	1,1800	1,1768	1,1736	1,1704	1,1672	1,1640	1,1576
26	1,1996	1,1962	1,1929	1,1896	1,1863	1,1829	1,1796	1,1730
28	1,2161	1,2126	1,2091	1,2057	1,2023	1,1989	1,1955	1,1887
30	1,2326	1,2291	1,2255	1,2220	1,2185	1,2150	1,2115	1,2046
32	1,2493	1,2457	1,2421	1,2385	1,2349	1,2314	1,2278	1,2207
34	1,2661	1,2625	1,2588	1,2552	1,2515	1,2479	1,2443	1,2371
36	1,2831	1,2794	1,2757	1,2720	1,2684	1,2647	1,2610	1,2538
38	1,3004	1,2966	1,2929	1,2891	1,2854	1,2817	1,2780	1,2707
40	1,3179	1,3141	1,3103	1,3065	1,3028	1,2991	1,2953	1,2879
42	1,3357	1,3318	1,3280	1,3242	1,3204	1,3167	1,3129	1,3055
44	1,3538	1,3500	1,3461	1,3423	1,3384	1,3346	1,3309	1,3234
46	1,3724	1,3685	1,3646	1,3607	1,3569	1,3530	1,3492	1,3417
48	1,3915	1,3875	1,3736	1,3796	1,3757	1,3719	1,3680	1,3604
50	1,4110	1,4070	1,4030	1,3990	1,3951	1,3911	1,3872	1,3795
55	1,4618	1,4577	1,4535	1,4494	1,4453	1,4412	1,4372	1,4293
60	1,4154	1,5111	1,5067	1,5024	1,4982	1,4940	1,4898	1,4816

Densitatea soluţiilor apoase de alcool etilic la 15 °C

La dizolvarea alcoolului etilic în apă se observă o micşorare apreciabilă a volumului soluţiei în comparaţie cu volumul celor două lichide înainte de amestec. Micşorarea volumului se intensifică cu creşterea concentraţiei alcoolului, iar la concentraţia de 45,88% atinge un maxim de 4,12% din volumul iniţial al ambelor lichide.

În tabelă concentraţia C a soluţiilor de alcool etilic este exprimată în procente, care exprimă numărul de grame de alcool etilic fără apă, conţinute în 100 g soluţie. Valorile densităţii sînt exprimate în g/cm^3 cu o precizie pînă la 0,00001 g/cm^3. Densitatea apei, fără impurităţi, la 4 °C este 1,00000 g/cm^3.

Tabela 2.36

C [%]	Densitatea	C [%]	Densitatea	C [%]	Densitatea
1	0,99725	31	0,95525	61	0,89296
2	99544	32	95360	62	89064
3	99368	33	95190	63	88832
4	99198	34	95016	64	88599
5	99034	35	94838	65	88366
6	98877	36	94656	66	88132
7	98726	37	94470	67	87898
8	98581	38	94281	68	87662
9	98443	39	94087	69	87426
10	98308	40	93891	70	87189
11	98177	41	93692	71	86952
12	98050	42	93489	72	86714
13	97925	43	93284	73	86475
14	97803	44	93076	74	86235
15	97683	45	92866	75	85995
16	97563	46	92654	76	85754
17	97443	47	92439	77	85512
18	97324	48	92223	78	85268
19	97203	49	92005	79	85024
20	97080	50	91785	80	84779
21	96956	51	91565	81	84533
22	96829	52	91342	82	84285
23	96699	53	91118	83	84035
24	96566	54	90893	84	83784
25	96429	55	90667	85	83532
26	96290	56	90441	86	83277
27	96145	57	90214	87	83019
28	95997	58	89985	88	82760
29	95844	59	89756	89	82497
30	95687	60	89526	90	82233

Tabela 2.36 (*continuare*)

C [%]	Densitatea	C [%]	Densitatea	C [%]	Densitatea
91	0,81965	96	0,80564		
92	81692	97	80269		
93	81417	98	79971		
94	81137	99	79665		
95	80853	100	79356		

Densitatea soluţiilor apoase de zahăr în intervalul de temperaturi de la 10 la 50 °C

Concentraţia *C* a soluţiei este exprimată în procente, care determină numărul de grame de zahăr pur conţinute în 100 g soluţie. Valorile densităţii sînt exprimate în g/cm³ şi sînt interpolate pentru numere procentuale întregi cu o precizie pînă la 0,000001 g/cm³, densitatea apei fără impurităţi la 4 °C fiind de 1,00000 g/cm³.

Tabela 2.37

C [%]	Temperatura						
	10 °C	15°	20°	25°	30°	40°	50 °C
0	0,99973	0,99913	0,99823	0,99707	0,99567	0,99232	0,98813
1	1,00365	1,00301	1,00212	0,00093	0,99952	0,99615	0,99197
2	1,00760	1,00693	1,00602	1,00481	1,00340	1,00001	1,99575
3	1,01157	1,01087	1,00993	1,00872	1,00731	1,00387	0,99958
4	1,01557	1,01484	1,01388	1,01266	1,01124	1,00777	1,00346
5	1,01960	1,01884	1,01785	1,01661	1,01518	1,01169	1,00735
6	1,02366	1,02287	1,02186	1,02060	1,01916	1,01563	1,01127
7	1,02774	1,02692	1,02588	1,02461	1,02316	1,01960	1,01521
8	1,03185	1,03100	1,02994	1,02864	1,02717	1,02359	1,01918
9	1,03599	1,03512	1,03403	1,03271	1,03122	1,02761	1,02319
10	1,04016	1,03925	1,03814	1,03679	1,03530	1,03165	1,02198
11	1,04437	1,04343	1,04229	1,04092	1,03940	1,03573	1,03126
12	1,04859	1,04762	1,04646	1,04507	1,04353	1,03982	1,03533
13	1,05286	1,05186	1,05066	1,04925	1,04770	1,04395	1,03943
14	1,05714	1,05612	1,05490	1,05346	1,05189	1,04809	1,04356

Tabela 2.37 (*continuare*)

C [%]	Temperatura						
	10 °C	15°	20°	25°	30°	40°	50 °C
15	1,06146	1,06041	1,05917	1,05772	1,05612	1,05229	1,04772
16	1,06581	1,06473	1,06346	1,06198	1,06035	1,05650	1,05191
17	1,07020	1,06909	1,06779	1,06629	1,06464	1,06074	1,05614
18	1,07461	1,07347	1,07215	1,07062	1,06896	1,06502	1,06038
19	1,07906	1,07789	1,07654	1,07499	1,07329	1,06933	1,06467
20	1,08353	1,08233	1,08096	1,07940	1,07767	1,07366	1,06898
22	1,09260	1,09134	1,08990	1,08830	1,08652	1,08244	1,07771
24	1,10178	1,10046	1,09897	1,09731	1,09550	1,09135	1,08657
26	1,11110	1,10972	1,10818	1,10647	1,10461	1,10039	1,09557
28	1,12056	1,11911	1,11751	1,11575	1,11386	1,10957	1,10470
30	1,13014	1,12863	1,12698	1,12517	1,12324	1,11888	1,11398
32	1,13988	1,13831	1,13660	1,13474	1.13276	1,12834	1,12340
34	1,14975	1,14811	1,14634	1,14443	1,14241	1,13794	1,13295
36	1,15976	1,15806	1,15624	1,15427	1,15221	1,14768	1,14265
38	1,16990	1,16814	1,16627	1,16425	1,16214	1,15756	1,15249
40	1,18020	1,17837	1,17645	1,17439	1,17214	1,16759	1,16248
42	1,19063	1,18875	1,18677	1,18468	1,18248	1,17777	1,17215
44	1,20121	1,19927	1,19725	1,19512	1,19287	1,18809	1,18290
46	1,21194	1,20994	1,20787	1,20570	1,02341	1,19856	1,19334
48	1,22281	1,22076	1,21864	1,21644	1,21411	1,20919	1,20392
50	1,23382	1,23173	1,22957	1,22732	1,22495	1,21996	1,21465
55	1,26203	1,25981	1,25753	1,25516	1,25271	1,24756	1,24211
60	1,29117	1,28884	1,28646	1,28399	1,28144	1,27615	1,27058

Tabela 2.38

Scări areometrice

Areometrele moderne au o scară cu diviziuni, care arată direct valorile numerice ale densităţii lichidelor, exprimate în g/cm³ (aşa numitele densimetre). La areometrele speciale, destinate cercetărilor

diferitelor soluţii, pe scară este deseori indicat direct conţinutul procentual al corpului dizolvat, sau concentraţia soluţiei (alcoolometre, zaharometre etc.). Indicaţiile tuturor acestor areometre trebuie să primească la măsurări corecţia de temperatură, dacă aceasta din urmă diferă sensibil de temperatura la care a fost gradată scara areometrului (deobicei la 20 °C); mărimea corecţiei este dată la fiecare aparat.

La areometrele de alt tip, care au fost folosite în trecut pe scară foarte largă şi care nu şi-au pierdut importanţa nici astăzi, se folosesc diferite scări arbitrare, nefondate ştiinţific. Cifrele de pe aceste scări dau valorile numerice ale densităţii lichidelor în unităţi pur convenţionale, numite grade. Pentru a trece de la grade la valori de densităţi, exprimate în g/cm³, există formule corespunzătoare, iar corecţia de temperatură este aceeaşi ca mai sus. Dintr-un număr foarte mare de areometre diferite de acest tip, se redau mai departe datele pentru şase areometre, care sînt mai răspîndite. Formula de trecere la densităţi exprimate în g/cm³, în cazul general, de forma

$$\rho_t = \frac{a}{b \pm n}. \tag{2.71}$$

Aici ρ este densitatea lichidului, exprimată în *g*/cm³, iar *t* temperatura de gradare a areometrului, la care el dă indicaţii corecte; *n* este cifra ce se citeşte direct la areometru, iar *a* şi *b* sînt cei doi parametri ai areometrului, care la un areometru de tip dat rămîn constante. Semnul plus (+) corespunde cazului unui lichid mai puţin dens decît apa, iar semnul minus (—) corespunde cazului unui lichid mai dens decît apa.

În cele ce urmează se consideră numai cazul al doilea, adică al lichidului mai dens decît apa; astfel

$$\rho_t = \frac{a}{b - n}, \tag{2.72}$$

$$n = b - \frac{a}{\rho_t}. \tag{2.73}$$

În tabele sînt următoarele date pentru acest caz:

1. În tabela 2.38 a: denumirea areometrelor şi notaţiile scărilor lor, temperatura de gradare *t*, şi valorile parametrilor *a* şi *b*[1]).

2. În tabela 2.38 b: comparaţia indicaţiilor acestor areometre faţă de °Bé (Baumé raţional), care este cel mai important; scara sa este împărţită în intervale de 4° şi în afară de aceasta este dat punctul de 66°, care pe această scară corespunde densităţii acidului azotic concentrat şi este un punct fundamental.

3. În tabela 2.38 c: relaţiile dintre valorile densităţii ρ, exprimată în g/cm³, şi gradele areometrului Baumé °Bé (*n*) raţional cu o precizie pînă la a patra zecimală.

4. În tabela 2.38 d: rapoartele inverse dintre gradele areometrului Baumé raţional şi valorile densităţii ρ, exprimată în g/cm³, cu o precizie pînă la 0,01 g/cm³; densitatea apei, fără impurităţi, la 4 °C este 1,0000 g/cm³.

Tabela 2.38 a

Denumirea şi notaţia	$t°$	a şi b
Baumé raţional (°Bé)	15 °C	$a = b = 144{,}3$
Baumé vechi (°Bé$_v$)	17,5 °C	$a = b = 146{,}78$
Baumé american (°Bé$_{am}$)	60 °F[2])	$a = b = 145$
Balling (°Bl)	17,5 °C	$a = b = 200$
Stoppani (°St)	12,5° R[3])	$a = b = 106$
Tweddle (°Tw)	60 °F[4])	$a = b = 200$

Tabela 2.38 b

°Bé	°Bé$_v$	°Bé$_{am}$	°Bl	°St	°Tw
0°	0,05	0,00	0,07	0,01	0,01
4	4,12	4,02	5,61	4,61	5,72
8	8,19	8,04	11,15	9,22	11,75
12	12,25	12,06	16,70	13,82	18,91
16	16,32	16,08	22,24	18,42	24,96
20	20,39	20,10	27,78	23,02	32,20
24	24,46	24,12	33,32	27,62	39,91
28	28,52	28,14	38,86	32,22	48,17
32	32,59	32,16	44,41	36,82	57,01
36	36,66	36,17	49,95	41,42	66,50
40	40,73	40,19	55,49	46,02	76,82
44	44,79	44,21	61,03	50,63	87,75
48	48,86	48,23	66,58	55,23	99,71
52	52,93	52,25	72,12	59,83	112,70
56	56,99	56,27	77,66	64,43	128,00
60	61,06	60,29	83,20	69,03	142,37
64	65,13	64,31	88,74	73,63	159,43
66	67,16	66,32	91,51	75,93	168,61
68	69,20	68,32	94,29	78,23	178,27

Note la tabelele 2.38 a şi b. 1) Parametrii a şi b în general pot fi diferiţi. După cum se vede din ultimele formule, pentru $a = b$ densitatea de 1 g/cm³ trebuie să fie notată pe scara areometrului cu cifra °0, ceea ce se referă la toate cele şase areometre menţionate în tabela 2.38 a. 2) $60°F = 15\frac{5}{9}\ °C \approx 15{,}56\ °C$; 3) $12{,}5\ °R = 15{,}625\ °C$; 4) Vezi nota 2).

Tabela 2.38 c

°Bé [n]	[g/cm^3]	Bé [n]	[g/cm^3]	°Bé [n]	[g/cm^3]	Bé [n]	[g/cm^3]
0	1,0000	17	1,1335	34	1,3083	51	1,5466
1	1,0070	18	1,1425	35	1,3202	52	1,5634
2	1,0141	19	1,1516	36	1,3324	53	1,5805
3	1,0212	20	1,1609	37	1,3448	54	1,5980
4	1,0285	21	1,1703	38	1,3575	55	1,6159
5	1,0359	22	1,1799	39	1,3704	56	1,6342
6	1,0434	23	1,1896	40	1,3835	57	1,6529
7	1,0510	24	1,1995	41	1,3969	58	1,6721
8	1,0587	25	1,2096	42	1,4106	59	1,6917
9	1,0665	26	1,2198	43	1,4245	60	1,7117
10	1,0745	27	1,2302	44	1,4387	61	1,7323
11	1,0825	29	1,2408	45	1,4532	62	1,7533
12	1,0907	29	1,2515	46	1,4680	63	1,7749
13	1,0990	30	1,2625	47	1,4830	64	1,7970
14	1,1074	31	1,2737	48	1,4984	65	1,8197
15	1,1160	32	1,2850	49	1,5142	66	1,8429
16	1,1247	33	1,2965	50	1,5302	67	1,8668

Tabela 2.38 d

[g/cm^3]	°Bé	[g/cm^3]	°Bé	[g/cm^3]	°Bé
1,00	0,126	1,22	26,125	1,47	46,223
1,01	1,553	1,23	27,085	1,49	47,539
1,02	2,953	1,24	28,031	1,51	48,820
1,03	4,325	1,25	28,961	1,53	50,069
1,04	5,671	1,26	29,876	1,55	51,285
1,05	6,991	1,27	30,777	1,57	52,469
1,06	8,287	1,28	31,664	1,59	53,625
1,07	9,558	1,29	32,537	1,61	54,751
1,08	10,805	1,30	33,397	1,63	55,850
1,09	12,030	1,31	34,243	1,65	56,922
1,10	13,233	1,32	35,077	1,67	57,968
1,11	14,413	1,33	35,899	1,69	58,990
1,12	15,573	1,34	36,708	1,71	59,988
1,13	16,712	1,35	37,504	1,73	60,962
1,14	17,832	1,36	38,290	1,75	61,915
1,15	18,931	1,37	39,063	1,77	62,846
1,16	20,012	1,38	39,826	1,79	63,756
1,17	21,074	1,39	40,578	1,80	64,203
1,18	22,119	1,40	41,318	1,81	64,646
1,19	23,145	1,41	42,049	1,82	65,084
1,20	24,155	1,43	43,479	1,83	65,517
1,21	25,148	1,45	44,869	1,84	65,944

T a b e l a 2. 39. **Proprietăţile elastice ale metalelor**

Proprietăţile elastice ale metalelor, precum şi rezistenţa lor (duritatea), depind în mare măsură de puritatea metalului, de structura lui, de prelucrarea mecanică şi termică etc. De aceea, aici se dau numai valorile medii.

Între modulul de elasticitate la întindere (modulul lui Young) E şi modulul de forfecare N există relaţia (în limitele aplicabilităţii legii lui Hooke)

$$N = \frac{E}{2\,(1+\mu)},$$

unde μ este coeficientul lui Poisson, a cărui mărime pentru diferite materiale solide este cuprinsă aproximativ între limitele 0,3 şi 0,5.

În tabelă sînt date, pentru unele metale, valorile medii la temperatura camerei ale următoarelor mărimi: modulul de elasticitate la întindere E, modulul de forfecare N, limita de rezistenţă la întindere (rezistenţa la rupere) σ_B şi coeficientul lui Poisson μ (mărime adimensională).

	E [kg/mm²]	N [kg/mm²]	σ_B [kg/mm²]	μ
Alamă[1])	8000–10000	2700–3700	10–20	0,34–0,40
Alpaca[2])	11000	4000	—	0,37
Aluminiu	6300–7500	2300–2700	6–11	0,34
Argint	7000–8000	2500–2900	28–29	0,37
Aur	7000–8500	2600–3900	—	0,41
Bismut	3200	1200–1400	—	0,33
Bronz[3])	10600	4400	20–38	0,31
Constantan[4])	16600	6200	32	0,33
Cositor	4000–5400	1700	1,7–2,5	0,33
Crom	24000–25000	—	49	
Cupru	10000–12000	4000–4800	20–30	0,3–0,4
Duraluminiu	aprox. 7000	aprox. 2750	40–50	—
Fier forjat	20000–22000	8000–8300	40–60	0,28
Fontă	7500–8500	2900–3500	10–12	0,25
Fontă forjabilă	10500	4000	20	0,26
Invar[5])	14000	5600	78	—
Iridiu	5300	—	—	—
Manganin	12600	4700	—	0,33
Nichel	20000–22000	7500	50	0,30
Oţel pentru scule	21000–22000	8000–8500	50–160	—
Oţel special	22000–24000	8500–8800	50–160	—
Paladiu	10000–14000	4000–5000	—	0,39
Platină	16000–17500	6000–7200	24–34	0,38
Plumb	1500–1700	550–600	1,2–2,1	0,45
Tantal	19000	—	93	—
Zinc	8000–10000	3000–4000	13–20	0,3
Wolfram	35500	13300	420	0,27

Note la tabela 2.39. 1) Compoziţia aproximativă a alamei: 66% Cu + 34% Zn. 2) Aliaj cu compoziţia: 84% Cu + 12% Mn + 4% Ni. 2) Compoziţia aproximativă a bronzului: 91% Cu + 6% Sn + 3% Zn. 4) Compoziţia aliajului: 60% Cu + 40% Ni. 5) Aliaj de nichel-fier, conţinînd în medie 35—37% nichel.

Tabela 2.40. Proprietăţile elastice ale corpurilor nemetalice

În tabelă sînt date pentru unele corpuri nemetalice valorile aproximative ale modulului de elasticitate la întindere E; ale rezistenţei la rupere σ_B; aceste mărimi sînt exprimate în kgf/cm² şi se referă la temperatura medie a camerei.

	E [kgf/cm²]	σ_B [kgf/cm²]		E [kgf/cm²]	σ_B [kgf/cm²]
Catgut[1])	$0{,}3\cdot10^5$	$4{,}2\cdot10^3$	flint	$5{,}5\cdot10^5$	$0{,}7\cdot10^3$
Cuarţ	$6{,}8\cdot10^5$	—	organică[7])	$0{,}3\cdot10^5$	$0{,}4\cdot10^3$
Cauciuc[2])	$0{,}4\cdot10^5$	—	Gheaţă (la $-2°$C)	$0{,}3\cdot10^5$	aprox. 40
Fire:					
de cuarţ	$5{,}2\cdot10^5$	$9\cdot10^3$	Lemn[5]):		
de mătase[3])	$0{,}6\cdot10^5$	$2{,}6\cdot10^3$	bambus	$2\cdot10^5$	$2{,}2\cdot10^3$
de pînză de			mesteacăn	$1{,}5\cdot10^5$	$0{,}7\cdot10^3$
păianjen[4])	$0{,}3\cdot10^5$	$1{,}8\cdot10^3$	stejar, fag	$1{,}6\cdot10^5$	$0{,}8\cdot10^3$
Marmură	$2{,}6\cdot10^5$	$9\cdot10^3$	de fier[6])	$2{,}4\cdot10^5$	$2{,}2\cdot10^3$
Sticlă:					
crown	$7{,}2\cdot10^5$	$0{,}7\cdot10^3$	pin, molid	$0{,}9\cdot10^5$	$0{,}5\cdot10^3$

Note la tabela 2.40. 1) Coardă pentru instrumente cu arcuş şi rachete de tenis; în medicină nervură (fibră) sau „catgut". 2) Cauciuc vulcanizat moale. 3) Se micşorează rapid o dată cu creşterea sarcinii. 4) Prezintă o obosire elastică evidentă. 5) De-a lungul fibrelor. 6) Parrotia persica. 7) Produs de polimerizare a eterului metilic cu acid metacrilic, denumit de asemenea acrilat, (mai precis polimetilmetacrilat).

Tabela 2.41. Duritatea corpurilor

Duritatea H a diferitelor corpuri se determină deobicei prin presare în condiţii standard pe suprafaţa unei probe cu o sferă de oţel bine călită (metoda Brinel). Măsurînd apăsarea în kgf şi suprafaţa

amprentei obţinute pe corp datorită sferei în mm², se calculează apoi valoarea medie a apăsării specifice a sferei pe corp în kgf/mm², care este valoarea numerică a durităţii corpului după Brinel H_B (numărul de duritate), adică

$$H_B = \frac{P}{S}, \tag{2.74}$$

unde P este apăsarea sferei în kgf, iar S suprafaţa amprentei în mm²; aceasta din urmă este desigur egală cu suprafaţa segmentului de sferă de înălţime h şi diametru d, care sînt egale cu adîncimea amprentei şi cu diametrul ei pe suprafaţa probei. Aşadar se poate scrie

$$S = \pi r h = \pi D \frac{D - \sqrt{D^2 - d^2}}{2}, \tag{2.75}$$

unde D,d şi h sînt respectiv diametrul sferei de oţel, diametrul amprentei şi adîncimea ei; toate aceste mărimi sînt exprimate în mm.

Mărimea apăsării P se alege în funcţie de duritatea corpului studiat şi de diametrul sferei (diametrii obişnuiţi 10,5 şi 2,5 mm). Se foloseşte de obicei apăsarea egală numeric (în kgf) astfel: pentru corpuri foarte dure (oţel, fontă) 30 D^2, pentru corpuri mai puţin dure (cupru, bronz) 10 D^2 şi pentru metale moi (aluminiu, aur) 2,5 D^2. Presiunea la încercări trebuie mărită lin, fără salturi brusce, iar proba se ţine sub sarcina maximă timp de 30 secunde.

În tabelă sînt date pentru unele metale valorile durităţii după Brinel, exprimate în kgf/mm².

Tabela 2.41

	H_B [kgf/mm²]		H_B [kgf/mm²]
Alamă	95–140	Cupru electrolitic	28–30
Aluminiu laminat	pînă la 39	Cupru electrolitic	pînă la 80
Aluminiu moale	16–26	Fier forjat	60–80
Argint	20–25	Fontă	aprox. 160
Argint forjat	pînă la 30	Fontă dură	pînă la 200
Aur	15–20	Iridiu	170
Aur forjat	19–25	Magneziu	25–29
Bismut	9–10	Mangan	20
Cadmiu	21–24	Molibden	150–200
Calciu	30–42	Nichel laminat	110–300
Cobalt	aprox. 100	Nichel topit	90–110
Cositor	5–6	Oţel călit	pînă la 600
Crom	70–130	Oţel forjat	120–200

Tabela 2.41

	H_B [kg/mm²]		B_B [kg/mm²]
Paladiu	45–50	Sodiu	0,07–0,08
Platină dură	pînă la 60	Stibiu	30
Platină recoaptă	24–26	Zinc dur	pînă la 20
Plumb	4,0–4,2	Zinc moale	8–10
Potasiu	0,04	Wolfram	350

Tabela 2.42 a și b. **Scara decimală de duritate**

Duritatea corpurilor, în special a minereurilor se evaluează deseori conform unei scări complet convențională decimală care se numește deobicei scara Mohs. Ca etaloane de duritate în această scară sînt următoarele 10 minereuri (tabela 2.42 a).

Tabela 2.42 a

	Duritatea		Duritatea
Talc	1	Feldspat	6
Ipsos (sau sare gemă)	2	Cuarț	7
Calcit	3	Topaz	8
Fluorină	4	Corindon	9
Apatită	5	Diamant	10

Aceste minereuri sînt alese astfel, încît fiecare etalon produce pe suprafața celui precedent o zgîrietură. Aceeași metodă, producerea de zgîrieturi, servește și la determinarea durității altor minereuri și corpuri, deoarece se poate stabili întotdeauna că corpul studiat corespunde, în ceea ce privește duritatea, unuia din etaloane sau se află în intervalul dintre două etaloane vecine. Aceasta dă posibilitatea de a aprecia aproximativ duritatea corpurilor studiate, prin cifrele respective. Asemenea definiție a durității este, evident, foarte imprecisă și total convențională; cu toate acestea, ea este des folosită în practică, datorită simplității sale.

În tabela 2.42 b sînt date valorile aproximative ale durității unor elemente chimice după scara convențională decimală.

Tabela 2.42 b

	Duritatea		Duritatea
Aluminiu	pînă la 2,9	Cadmiu	2,0
Argint	2,7	Cobalt	5,5
Aur	2,5	Cositor	1,8
Bismut	2,5	Crom	9,0
Bor	9,5	Cupru	3,0

Tabela 2.42 b (*continuare*)

	Duritatea		Duritatea
Diamant	10,0	Paladiu	4,8
Fier	aprox. 4,5	Platină	4,3
Iridiu	6,5	Plumb	1,5
Litiu	0,6	Potasiu	0,5
Magneziu	2,0	Siliciu	7,0
Mangan	5,0	Sodiu	0,4
Nichel	5,8	Zinc	2,5

§ 2.17 Acustica

Tabelele 2.43 a și b. Viteza sunetului în aer

În tabela 2.43 a, este dată viteza sunetului v în aer pentru intervalul de temperaturi de la -150 la 1 000 °C. Valorile lui v sînt date cu o precizie pînă la 1 m/s, iar pentru temperaturile 0 °C și 20 °C cu o precizie pînă la 0,1 m/s. Corecția pentru temperatură se poate calcula aproximativ după formula

$$v_t = v_0 \sqrt{1 + \alpha t}, \tag{2.76}$$

unde v_t și v_0 reprezintă viteza sunetului la temperatura t [°C] și respectiv la 0 °C; $\alpha = 0,00367$ °C^{-1} este coeficientul de dilatare al aerului la presiune constantă.

Tabela 2.43 a

t [°C]	v [m/s]	t [°C]	v [m/s]	t [°C]	v [m/s]	t [°C]	v [m/s]
−150,0	216	−10,9	326	100	386	700	621
−106,2	253	0	331,5	300	478	750	632
− 45,6	305	20,0	342,4	500	552	1 000	700

O dată cu mărirea presiunii în aer viteza sunetului crește, precum se vede din tabela 2.43 b, unde sînt date valorile v în aer la 0 °C.

Tabela 2.43 b

p [atm]	1	25	50	100
v [m/s]	331,5	332,0	334,7	350,6

Tabela 2.44. Viteza sunetului în vapori şi în gaze

Valorile vitezei v a sunetului sînt exprimate în m/s şi sînt date cu o precizie pînă la 1 m/s, iar pentru anumite gaze pînă la 0,1 m/s. În tabelă este dată de asemenea temperatura t, la care se referă aceste valori. Corecţia de temperatură poate fi calculată aproximativ după formula

$$v_t = v_0 \sqrt{1 + \alpha t}, \tag{2.77}$$

unde v_t şi v_0 sînt vitezele sunetului în gazul dat la temperaturile t [°C] respectiv 0 °C; α este coeficientul de dilatare al gazului la presiune constantă, egal cu 0,00367 °C^{-1}.

Substanţa	t[°C]	v [m/s]	Substanţa	t[°C]	v [m/s]
Acetilenă	0	327	Gaz de iluminat	13,6	442
Argon	0	319,0	Heliu	0	970
Argon	300	446	Hidrogen	0	1 270
Argon	600	551	Metan	0	430
Argon	1 000	665	Metan	300	587
Azot	0	333,6	Oxid de azot	0	333,9
Azot	300	487	Oxid de carbon	0	337,6
Azot	600	599	Oxigen	0	317,5
Azot	1 000	720	Oxigen	21	328
Bioxid de carbon	0	260,3	Oxigen	−182,0	173
Bioxid de carbon	100	300	Vapori de apă saturaţi	0	401
Bioxid de carbon	300	369	Vapori de apă saturaţi	110	413
Clor	0	206	Vapori de apă saturaţi	130	424
Etan	10	308	Vapori de benzen	80	208
Etan	50	327	Vapori de brom	0	135

Tabela 2. 45. **Viteza sunetului în lichide**

Valorile vitezei v ale sunetului sînt exprimate în m/s şi sînt date cu o precizie de circa 10 m/s. În tabelă este dată de asemenea temperatura în °C, la care se referă aceste valori.

Lichidul	t [°C]	v [m/s]	Lichidul	t[°C]	v [m/s]
Acid clorhidric	15,5	1 520	Benzină	17	1 170
Alcool etilic 95%	12,5	1 241	Cloroform	15	983
Alcool etilic 95%	20,5	1 213	Eter etilic	0	1 150
Alcool etilic absolut	8,4	1 231	Eter etilic	15	1 032
Alcool etilic absolut	23,0	1 177	Petrol	7,4	1 390
Amoniac (soluţie apoasă)	16	1 660	Petrol	15	1 330
Apă	13	1 440	Soluţie de NaCl 10%	15	1 470
Apă	19	1 460	Soluţie de NaCl 15%	15	1 530
Apă	31	1 500	Soluţie de NaCl 20%	15	1 650
Apă de mare	15	1 500	Soluţie de Na_2CO_3 concentrată	22,2	1 590

Tabela 2. 46. **Viteza sunetului în corpuri solide**

În corpurile solide oscilaţiile sonore pot fi longitudinale şi transversale. În acest din urmă caz viteza de propagare a oscilaţiilor este determinată de formula aproximativă

$$v = \sqrt{\frac{N}{D}}.$$

unde N şi D sînt respectiv modulul de forfecare al corpului solid şi densitatea lui. În tabelă valorile vitezei v a sunetului sînt exprimate în m/s şi sînt date cu o precizie de circa 10 m/s. În tabelă este dată de asemenea temperatura t, la care se referă aceste valori; acolo unde temperatura nu este indicată, valorile corespund temperaturii camerei.

	t [°C]	v [m/s]		t [°C]	v [m/s]
Alamă	18	3 360	Argint	100	2 640
Alpaca	18	3 600	Argint dur	10	2 730
Aluminiu	18	5 100	Argint moale	15–20	2 600
Argilă (uscată)	8	1 650	Aur dur	10	2 110
Ardezie	–	4 540	Aur moale	15–20	1 740

T a b e l a 2. 48. **Coeficienţii de absorbţie ai sunetului**

Coeficienţii de absorbţie ai sunetului se referă la tonul de frecvenţă 512 Hz şi sînt calculaţi la 1 m^2 de suprafaţă. La calculul mărimii şi absorbţiei posibile a sunetului, mărimea suprafeţei absorbante, exprimată în m^2, trebuie înmulţită cu un coeficient corespunzător.

Mediul absorbant	Coeficientul de absorbţie	Mediul absorbant	Coeficientul de absorbţie
Beton	0,015	Pînză (48 g/m^2)	0,019
Cortină	0,23	Pîslă de lînă	0,55
Covor	0,20	Idem, acoperită cu vopsea	0,25–0,45
Covor gros	0,29	Placaj din pin tare	0,061–0,1
Găurile zidului	0,25–0,70	Plută de 2,5 cm grosime	0,16
Insulit de 1,3 cm gros	0,31	Sticlă de grosime obişnuită	0,027
Linoleum pe suport solid	0,030	Tencuială pe reţea de sîrmă	0,033
Marmură	0,010	Tencuială pe şipci de lemn	0,033
Orificiile canalelor de încălzire şi ventilaţie	0,50	Tencuială pe zid de cărămidă	0,025
Picturi în ulei cu rame	0,28	Zid de cărămidă	0,032

T a b e l a 2. 49. **Coeficienţii de izolare fonică**

Coeficientul de izolare fonică σ se defineşte ca raportul dintre intensitatea I_1 a sunetului care cade pe un obstacol şi intensitatea I_2 a sunetului care trece prin el. Coeficienţii σ se exprimă de obicei în decibeli, adică se consideră că

$$\sigma = 10 \lg \frac{I_1}{I_2} . \tag{2.78}$$

Tipul despărţiturilor	σ [db]	Tipul despărţiturilor	σ [db]
Aluminiu 0,6 mm	16	Fereastră cu sticlă de 6,4 mm, ramă simplă	30
Despărţituri de lemn în camere tencuite	30–50	Idem, cu ramă dublă şi interspaţii de 24 cm	46
Despărţituri din 17 strate de diferite materiale	75	Lemn tencuit 12,3 mm	28
Despărţituri duble cu interspaţii cu aer	40–70	Oţel 2 mm	33
Duraluminiu 0,6 mm	15	Perete de beton tencuit de 110 mm	42

Tabela 2.49 (*continuare*)

Tipul despărţiturilor	σ [db]	Tipul despărţiturilor	σ [db]
Perete de cărămidă tencuit 200 mm	48	Uşă de lemn cu placaj de mesteacăn	22
Idem, 100 mm	44	Uşă de lemn 45 mm din 6 plăci de 12,7 mm dublă cu interspaţii de 11,5 mm	43
Placaj 3 straturi 3,2 mm	19	Uşă de stejar 45 mm, bine potrivită	25
Placaj 3 straturi 6,4 mm	21	Idem, mai puţin potrivită	20
Plafoane	43–64		
Plumb 1,5 mm	30		
Idem, 3,2 mm	32		

§ 2.18. Fenomene moleculare şi căldură

Tabelele 2.50 a şi b. Coeficienţii de frecare internă (viscozitate) ai gazelor şi vaporilor

În tabele sînt date valorile coeficienţilor de frecare internă (viscozitate) η pentru unele gaze şi vapori la diferite temperaturi, care sînt specificate (tabela 2.50 a), şi valorile lui η pentru aer în intervalul de temperaturi de la 0 °C la 1 000 °C (tabela 2.50 b).

Tabela 2.50 a

	t [°C]	$\eta \cdot 10^6$ [g/cm·s]		t[°C]	$\eta \cdot 10^6$ [g/cm·s]
Aer	0	172	Metan	17	109
Idem	16	181	Oxid de azot	0	179
Idem	21,6	184	Oxid de carbon	0	166
Argon	23	221	Idem	15	174
Azot	0	167	Oxigen	0	192
Idem	15	174	Idem	14,2	197
Idem	23	177	Idem	23,0	204
Bioxid de carbon	0	137	Propan	0	75
Idem	15	144	Protoxid de azot	0	137
Idem	23	147	Idem	15	144
Bioxid de sulf	0	117	Idem	23	150
Idem	14,0	122	Vapori de apă	0	87
Idem	17,7	124	Idem	100	123
Cianură	17	99	Vapori de benzen	14,2	70
Clor	20	132	Idem	100	94
Etan	23	93	Vapori de cloroform	14,2	99
Heliu	0	186	Vapori de eter etilic	14,2	72
Idem	23	198	Vapori de sulfură de carbon	14,2	96
Hidrogen	0	84			
Idem	28,1	89	Vapori de mercur	0	162
Hidrogen sufurat	17	125	Idem	300	532

Tabela 2.50 b

t[°C]	$\eta \cdot 10^7$ [g/cm·s]	t[°C]	$\eta \cdot 10^7$ [g/cm·s]	t[°C]	$\eta \cdot 10^7$ [g/cm·s]
0	1 719	350	3 063	700	4 162
50	1 926	400	3 245	750	4 301
100	2 124	450	3 413	800	4 432
150	2 319	500	3 570	850	4 560
200	2 512	550	3 720	900	4 688
250	2 704	600	3 868	950	4 812
300	2 886	650	4 017	1 000	4 933

Tabelele 2.51 a și b. **Coeficienții de frecare internă (viscozitate) ai lichidelor**

Coeficientul de frecare internă sau de viscozitate (termenii sînt sinonimi) se calculează cu formula

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

unde F este forța de frecare internă, S suprafața și $\Delta v/\Delta x$ gradientul vitezei în direcția perpendiculară pe direcția mișcării. Dimensiunile lui η în sistemul SI sînt $L^{-1}MT^{-1}$; unitatea de viscozitate în sistemul CGS este poise, viscozitatea apei la 20°C este aproape egală cu 0,01 poise sau 1 centipoise. Observațiile au arătat că coeficienții de viscozitate ai lichidelor depind în foarte mare măsură de temperatură. Ca regulă generală s-a constatat că viscozitatea lichidelor scade rapid cu creșterea temperaturii. Aproape pentru toate lichidele neasociate servește foarte bine formula lui Bacinski

$$\eta = \frac{a}{v - \omega},$$

unde v este volumul specific al lichidului, care este în funcție de temperatură și presiune, iar mărimile a și ω sînt doi parametri, dintre care ω corespunde aproximativ constantei b din ecuația lui Van der Waals.

În tabele sînt date valorile coeficienților de frecare internă (viscozitate) pentru apă fără impurități și pentru soluții apoase de alcool etilic și zahăr în intervalul de temperaturi de la 0 °C la 80 °C [concentrația soluțiilor este dată în procente de greutate (tabela 2.51 a)], precum și valorile coeficientului η pentru unele lichide la diferite temperaturi, care sînt menționate (tabela 2.51 b). Valorile lui η sînt exprimate în g/cm·s.

Tabela 2.51 a

t[°C]	$\eta \cdot 100$ [g/cm·s]							
	Apă	Soluţie de alcool etilic				Soluţie de zahăr		
		20%	40%	60%	80%	20%	40%	60%
0	1,788	5,319	7,14	5,75	3,690	3,804	14,77	238
5	1,515	4,065	5,59	4,63	3,125	3,154	11,56	156
10	1,306	3,165	4,39	3,77	2,710	2,652	9,794	109,8
15	1,140	2,618	3,53	3,14	2,309	2,267	7,468	74,6
20	1,004	2,183	2,91	2,67	2,008	1,960	6,200	56,5
25	0,894	1,815	2,35	2,24	1,784	1,704	5,187	43,86
30	0,801	1,553	2,02	1,93	1,531	1,504	4,382	33,78
35	0,720	1,332	1,72	1,66	1,355	1,331	3,762	26,52
40	0,653	1,160	1,482	1,447	1,203	1,193	3,249	21,28
45	0,595	1,015	1,289	1,271	1,081	1,070	2,847	17,18
50	0,549	0,907	1,132	1,127	0,968	0,970	2,497	14,01
55	0,507	0,814	0,998	0,997	0,867	0,884	2,219	11,67
60	0,470	0,736	0,893	0,902	0,789	0,808	1,982	9,83
65	0,435	0,666	0,802	0,806	0,711	0,742	1,778	8,34
70	0,406	0,608	0,727	0,729	0,650	0,685	1,608	7,15
75	0,379	0,559	0,663	0,663	0,600	0,635	1,462	6,20
80	0,356	0,505	0,601	0,604	—	0,590	1,334	5,40

Tabela 2.51 b

	t[°C]	η [g/cm·s]		t[°C]	η [g/cm·s]
Acetonă	25	0,0032	Alcool metilic	19,91	0,0061
Acid acetic (concentrat)	15	0,0132	Idem	25	0,0055
			Amilacetat	8,97	0,0103
Idem	25	0,0112	Idem	19,91	0,0087
Acid azotic (concentrat)	10	0,0177	Anilină	10	0,0655
			Idem	20	0,0440
Idem	20	0,0091	Idem	30	0,0316
Idem	40	0,0070	Apă	15	0,0114
Acid sulfuric (concentrat)	10	0,352	Benzen	15	0,0070
			Idem	20	0,0065
Idem	20	0,242	Idem	25	0,0060
Idem	40	0,131	Brom	12,6	0,0107
Alcool amilic	25	0,0448	Idem	19,1	0,0100
Alcool etilic	10	0,0147	Idem	32,0	0,0089
Idem	20	0,0120	Cloroform	8,10	0,0064
Idem	30	0,0100	Idem	19,19	0,0058
Alcool metilic	8,92	0,0071	Idem	25	0,0054

Tabela 2.51 b (*continuare*)

	t[°C]	η [g/cm·s]		t[°C]	η [g/cm·s]
Eter etilic	18	0,0024	Sulfură de carbon	19,91	0,0038
Idem	25	0,0022	Idem	25	0,0035
Fenol	30	0,0700	Terebentină	20	0,0149
Idem	50	0,0320	Idem	40	0,0107
Glicerină (0,8% apă)	18	13,93	Toluen	8,86	0,0067
			Idem	19,91	0,0058
Idem	30	5,71	Idem	25	0,0055
Mercur	10,40	0,0162	Ulei de măsline	20	0,808
Idem	18,00	0,0158	Idem	30	0,557
Idem	31,15	0,0150	Ulei de ricin	17,5	12,25
Nitrobenzen	10	0,0251	Idem	35	3,12
Idem	20	0,201	Xilol (meta)	12	0,0079
Idem	30	0,0168	Idem	19,91	0,0064
Sulfură de carbon	8,92	0,0041			

Tabela 2.52. **Frecarea internă (viscozitatea) în corpuri solide**

Frecarea internă în corpurile solide nu este cercetată suficient și rezultatele numerice stabilesc adeseori numai ordinul de mărime al mărimilor măsurate. În tabelă sînt date valorile aproximative ale coeficientului de viscozitate η pentru unele corpuri solide la temperaturile specificate. Valorile sînt exprimate în g/cm·s.

	t[°C]	η [g/cm·s]		t[°C]	η [g/cm·s]
Aluminiu	9	$7{,}5 \cdot 10^{15}$	Gheață	0	$15-10 \cdot 10^{12}$
Ceară roșie	19	$1{,}1 \cdot 10^{11}$	Idem	−14	$8{,}5 \cdot 10^{12}$
Colofoniu	15	$3{,}0 \cdot 10^{16}$	Plumb	9	$0{,}47 \cdot 10^{15}$
Idem	20	$6{,}0 \cdot 10^{15}$	Sticlă	420	4.10^{12}
Cositor	9	$2{,}4 \cdot 10^{15}$	Idem	710	$4{,}5 \cdot 10^{10}$

Tabela 2. 53. **Difuzia gazelor şi vaporilor**

Coeficientul de autodifuzie al gazelor D', calculat teoretic, este aproximativ egal cu $D' = 1/3\, \bar{u} \cdot \bar{\lambda}$, unde $\bar{u}$ şi $\bar{\lambda}$ înseamnă viteza medie şi respectiv drumul liber mijlociu al moleculelor gazului. Dacă are loc difuzia reciprocă a două gaze diferite, coeficientul de difuzie D se determină cu ajutorul expresiei

$$D = \frac{n_1 D' + n_2 D''}{n_1 + n_2},$$

unde D' şi D'' sînt coeficienţii de autodifuzie al primului şi respectiv al celui de al doilea gaz, iar n_1 şi n_2 sînt concentraţiile lor. Această formulă a fost dedusă în ipoteza că difuzia are loc în mod staţionar, adică concentraţia totală a ambelor gaze rămîne constantă ($n_1 + n_2 =$ $=$ const). În aceste condiţii coeficientul de difuzie al primului gaz în al doilea (D_{12}) este egal cu coeficientul de difuzie al celui de al doilea gaz în primul (D_{21}), adică $D_{12} = D_{21} = D$.

În tabelă se presupune că gazul (vaporii) se difuzează în spaţiul ocupat de celălalt gaz (vapori); ambele corpuri se află în condiţii constante de presiune şi temperatură (aceasta din urmă este indicată în tabelă). Valorile coeficienţilor de difuzie D sînt date în cm^2/s.

Gaze	t[°C]	D	Vapori	t[°C]	D
Aer-oxigen	0	0,18	Acid acetic-aer	0	0,11
Aer-sulfură de carbon	0	0,09	Acid acetic-bioxid de carbon	0	0,07
Aer-vapori de apă	0	0,222	Acid acetic-hidrogen	0	0,40
Aer-vapori de apă	15	0,26	Alcool amilic-aer	0	0,06
Argon-heliu	15	0,70	Alcool amilic-bioxid de carbon	0	0,04
Benzen-aer	0	0,14	Alcool amilic-hidrogen	0	0,23
Benzen-hidrogen	0	0,29	Alcool etilic-aer	0	0,10
Benzen-metan	0	0,15	Alcool etilic-bioxid de carbon	0	0,07
Benzen-oxigen	0	0,18			
Bioxid de carbon-hidrogen	0	0,54	Alcool etilic-hidrogen	0	0,37

Tabela 2.53 (*Continuare*)

Gaze	t[°C]	D	Vapori	t[°C]	D
Bioxid de carbon-hidrogen	18	0,60	Alcool metilic-aer	0	0,13
Bioxid de carbon-vapori de apă	18	0,15	Alcool metilic-bioxid de carbon	0	0,08
Hidrogen-aer	0	0,64	Alcool metilic-hidrogen	0	0,50
Hidrogen-azot	12,5	0,73	Alcool metilic-metan	0	0,15
Hidrogen-bioxid de carbon	0	0,54	Alcool metilic-oxid de carbon	0	0,13
Hidrogen-etilen	0	0,48	Alcool metilic-oxigen	0	0,18
Hidrogen-metan	0	0,62	Sulfură de carbon-aer	0	0,09
Hidrogen-oxid de carbon	0	0,64	Sulfură de carbon-bioxid de carbon	0	0,06
Hidrogen-oxigen	0	0,69	Sulfură de carbon-hidrogen	0	0,36
Hidrogen-oxigen	14	0,77	Vapori de apă-bioxid de carbon	0	0,13
Oxid de carbon-etilen	0	0,11	Vapori de apă-hidrogen	0	0,69
Oxigen-azot	0	0,18			
Idem	12,5	0,20			

Tabela 2.54. **Viteza, lungimea parcursului liber, numărul de ciocniri și dimensiunile moleculelor de gaz**

Unele din formulele teoriei cinetice a gazelor, care servesc pentru calculul vitezei medii de mișcare a moleculelor, a drumului liber mijlociu dintre două ciocniri consecutive și a diametrului moleculelor sînt date mai departe; în ele s-au introdus următoarele notații: ρ este densitatea gazului în condiții normale (0 °C și 760 mm Hg), p — presiunea gazului în atmosfere (1 atmosferă = $1{,}01325 \cdot 10^6$ dyn/cm²), T — temperatura absolută, R — constanta gazelor perfecte, b — constanta din ecuația Van der Waals, η și λ sînt coeficienții de viscozitate, respectiv conductibilitate termică, ai gazului (în g/cm·s și respectiv în calorii pe cm·s·°C), c_p — căldura specifică a gazului la presiune constantă, m — masa unei molecule de gaz (în g), σ — diametrul moleculei (în cm), n_0 — numărul de molecule dintr-un centimetru cub de gaz în condiții

normale (numărul lui Loschmidt), $\bar{u}$ viteza pătratică medie a moleculelor, adică rădăcina pătrată din media aritmetică a pătratelor vitezelor tuturor moleculelor (în cm/s), $\bar{v}$ — viteza medie a moleculelor, adică media aritmetică a vitezelor tuturor moleculelor (în cm/s), l drumul liber mijlociu al moleculelor (în cm), ν numărul mediu de ciocniri al moleculelor în unitatea de timp (în s^{-1}).

Formulele fundamentale pentru calcule sînt

1. $$\bar{u} = \sqrt{\frac{3RT}{n_0 m}} = \sqrt{\frac{3p}{n_0 m}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}.$$

2. $$\bar{v} = \frac{4\,\bar{u}}{\sqrt{6\pi}} = 0{,}921\,\bar{u}$$

3. $$l = \frac{\eta}{0{,}31\,\rho\bar{v}} = \frac{2{,}02}{\sqrt{p\rho}}, \quad \nu = \frac{\bar{v}}{l}.$$

4. Cele mai complicate calcule apar la determinarea lui σ; pentru aceste calculări se folosesc trei formule fundamentale

a) din coeficientul de viscozitate $\sigma_\eta = \sqrt{\dfrac{0{,}0912\,\rho\bar{u}}{n_0\eta}}$;

b) din coeficientul de conductibilitate termică $\sigma_\varkappa = \sqrt{\dfrac{0{,}146\rho\bar{u}c_p}{n_0\lambda}}$;

c) din ecuaţia Van der Waals $\sigma_b = \sqrt{\dfrac{3b}{2\pi n_0}}$.

În tabelă sînt date rezultatele acestor calcule pentru unele gaze; sînt date valorile mărimilor: $\bar{u}$ (la 0°C) l, ν şi σ; pentru ultima mărime sînt date rezultatele calculelor folosindu-se toate trei metodele.

Tabela 2.54

	$\bar{u}$ [cm/s]	l [cm]	ν [s^{-1}]	σ_η [cm]	$\sigma_\varkappa$ [cm]	σ_b c[m]
Argon	4,1	10,1	4,0	3,5	—	3,0
Azot	$4{,}9\cdot10^4$	$9{,}4\cdot10^{-6}$	$5{,}0\cdot10^9$	$3{,}7\cdot10^{-8}$	$3{,}5\cdot10^{-3}$	$3{,}6\cdot10^{-8}$
Bioxid de carbon	3,9	6,1	6,0	4,4	4,6	3,5
Heliu	13,1	28,1	4,3	2,3	—	2,4
Hidrogen	18,4	17,8	10,0	2,6	2,5	2,4
Oxigen	4,6	10,2	4,4	3,6	3,3	—
Oxid de carbon	4,9	9,4	4,7	3,7	3,5	—

Tabelele 2.55 a şi b. **Tensiunea superficială a lichidelor**

Valorile coeficientului σ al tensiunii superficiale a lichidelor sînt exprimate în dyn/cm şi sînt date faţă de aer, bioxid de carbon sau vaporii aceluiaşi lichid, ceea ce este notat prin simbolurile *a*, CO_2 şi *v*. Pentru corpurile lichide la temperaturi obişnuite, valorile sînt date în intervalul de temperaturi medii de cameră, care se specifică (tabela 2.55 a). Pentru apă sînt date valorile exprimate în aceleaşi unităţi, pentru intervalul de temperaturi de la 0° la 80 °C în raport cu aerul uscat (tabela 2.55 b).

Tabela 2.55 a

	t[°C]	σ [dyn/cm]		t[°C]	σ [dyn/cm]
Acetonă (*v*)	16,8	23,3	Cositor (CO_2)	253	526,1
Acid acetic (*v*)	20	23,5	Eter etilic (*v*)	20	15,5
Acid azotic (70%) (*a*)	20	59,4	Idem	30	15,3
Acid sulfuric (85%) (*a*)	18	57,6	Fenol (*v*)	54,8	36,5
Alcool etilic (*v*)	20	22,75	Glicerină (D=1,23 g/cm³)	15,5	64,3
Alcool etilic (*v*)	40	20,2	Mercur (*v*)	15	487,0
Alcool metilic (*v*)	20	23,0	Mercur (*a*)	18	481,2
Alcool propilic (*v*)	16,4	23,8	Mercur (*a*)	20	471,6
Amilacetat (*v*)	14,4	24,5	Mercur (*v*)	40	468,2
Anilină (*v*)	19,5	40,8	Nitrobenzen (*v*)	13,6	42,7
Anilină (*a*)	12,5	44,7	Sulfură de carbon (*a*)	0	32,2
Anilină (*a*)	17,5	44,1	Sulfură de carbon (*v*)	19,4	33,6
Apă (*a*)	15	73,26	Sulfură de carbon (*v*)	25,0	29,8
Benzen (*v*)	11,2	29,2	Terebentină (*a*)	18	26,8
Benzen (*a*)	12,5	29,9	Terebentină (*a*)	20	26,7
Benzen (*a*)	17,5	29,2	Toluen (*a*)	12,5	29,1
Bismut (CO_2)	750	346	Toluen (*a*)	17,5	28,5
Brom (*a*)	13,0	44,1	Toluen (*a*)	27,1	26,7
Cloroform (*v*)	10,2	27,6	Ulei de ricin (*a*)	18,0	33,1
Cloroform (*v*)	45,5	23,0	Ulei de măsline	18,0	32,0
			Xilol (meta) (*v*)	20,1	28,9

Tabela 2.55 b

t[°C]	σ [dyn/cm]	t[°C]	σ [dyn/cm]	t[°C]	σ [dyn/cm]
0	75,49	23	72,08	40	69,54
5	74,75	24	71,93	45	68,6
10	74,01	25	71,78	50	67,8
12	73,70	26	71,63	55	66,9
14	73,41	28	71,33	60	66,0
16	73,11	30	71,03	65	65,1
18	72,82	32	70,74	70	64,2
20	72,53	34	70,44	75	63,3
21	72,37	36	70,14	80	62,3
22	72,22	38	69,85		

Tabela 2.56 a. Solubilitatea sărurilor anorganice

În tabela 2.56 este dată concentraţia soluţiilor saturate ale unei serii de săruri în apă la temperaturile de 20°C şi 100°C. Concentraţiile se dau în raport cu numărul de grame de sare, care se dizolvă în 100 g apă. Se presupune că sărurile sînt uscate; dacă este posibilă formarea de hidraţi, în tabelă este indicată cantitatea de apă de cristalizare, însă solubilitatea este dată în ipoteza sării uscate. Dacă temperatura nu corespunde cu cele două temperaturi menţionate, ea este dată în tabelă separat. În afară de aceasta, în tabelă este dată masa moleculară aproximativă *M* a sării (de asemenea în stare uscată).

Tabela 2.56

Substanţa	*M*	20 °C	100 °C	Observaţii
Azotat de argint	169,9	222	952	
Azotat de bariu	261,4	9,2	34,2	
Azotat de cadmiu	101,1	31,7	246	
Azotat de potasiu	119,0	65,8	105	
Bicarbonat de sodiu	142,0	19,4	42,5	hidrat 10 H_2O
Bicromat de potasiu	174,3	11,1	24,1	
Bromură de potasiu	294,2	13	104	
Carbonat de calciu	111,0	59,5	159	hidrat 6 H_2O
Carbonat de sodiu	58,4	36,0	39,1	
Clorură de amoniu	53,5	37,5	77,3	
Clorură de bariu	208,3	35,7	58,8	hidrat 2 H_2O
Clorură de calciu	109,9	34,2	30,0	hidrat H_2O
Clorură de litiu	120,4	26	73,8	hidrat 7 H_2O
Clorură de magneziu	151,0	64	35	hidrat 5 H_2O
Clorură de potasiu	100,1	0,002	0,002/75°	
Clorură de sodiu	154,8	38	77	hidrat 7 H_2O
Clorură de stronţiu	158,5	53,0	100,8	hidrat 6 H_2O
Clorură de zinc	136,3	368	615	
Sulfat de amoniu	132,1	75,4	103,3	
Sulfat de cadmiu	208,5	77,0	58,4	
Sulfat de cupru	84,0	9,6	16,4/60°	
Sulfat de litiu	42,4	78,5	127,5	hidrat H_2O
Sulfat de magneziu	95,2	54,5	72,7	hidrat 6 H_2O
Sulfat de mangan	159,6	20,7	75,4	hidrat 5 H_2O
Sulfat de nichel	331,2	52,2	127	
Sulfat de potasiu	74,6	34,0	56,7	
Sulfat de sodiu	106,0	21,5	45,5	hidrat 10 H_2O
Sulfat de zinc	161,4	54,4	80	hidrat 7 H_2O

Tabela 2.57. **Difuzia soluţiilor apoase**

Soluţia difuzează în apă pură. Valorile coeficientului *D* de difuzie sînt exprimate în centimetri pătraţi pe zile. Concentraţia este exprimată pentru electroliţi în echivalenţi-gram la litru de soluţie, pentru neelectroliţi în moli. Temperatura *t*[°C] este dată în tabelă.

Tabela 2.57

Substanţa	*t*[°C]	Cantitatea	*D* [cm²/zi]	Substanţa	*t*[°C]	Cantitatea	*D* [cm²/zi]
Acid azotic	12	0,55	1,91	Brom	12	0,1	0,8
	19,5	0,10	2,07	Bromură de			
		0,90	2,26	litiu	10	2,3	0,80
		3,90	2,46			4,4	0,90
Acid clorhi-				Bromură de			
dric	12	0,50	2,07	potasiu	10	1,0	1,13
		1,0	2,09	Bromură de			
	19,2	0,10	2,21	sodiu	10	2,9	0,86
		0,90	2,63	Carbonat de			
		3,20	3,89	potasiu	10	3,0	0,60
Acid sulfuric	12	1,0	1,12	Carbonat de			
	18	0,35	1,32	sodiu	10	2,4	0,39
		0,85	1,34	Clorură de ba-			
		2,85	1,60	riu	8	0,33	0,65
		4,85	1,90			2,4	0,66
Alcool etilic	11	0,05	0,73	Clorură de			
		0,25	0,69	calciu	9	1,5	0,72
		0,75	0,62		10	0,27	0,68
		3,75	0,45			2,0	0,68
Amoniac	12	1,0	1,42	Clorură de			
	4	3,55	0,06	cobalt	10	1,5	0,46
Azotat de ar-				Clorură de			
gint	12	0,02	1,03	cupru	10	1,5	0,43
		0,10	0,98	Clorură de			
		0,90	0,88	litiu	18	0,10	0,951
		3,9	0,53			1,0	0,920
Azotat de						4,2	0,956
plumb	12	0,22	0,71	Clorură de			
		0,82	0,66	potasiu	17,5	0,02	1,36
Azotat de po-						0,9	1,52
tasiu	17,6	0,02	1,28		18,0	1,0	1,330
		0,3	1,26			3,6	1,338
		1,4	1,10	Clorură de			
Azotat de so-				sodiu	12	1,0	0,90
diu	10,5	3,0	0,76		15	0,02	0,94
	5,0	5,0	0,83			0,1	0,94
	13	0,6	0,90			0,9	0,97
		6,0	0,77			3,9	1,02

Tabela 2.57 *(continuare)*

Substanţa	t[°C]	Cantitatea	D [cm²/zi]	Substanţa	t[°C]	Cantitatea	D [cm²/zi]
Glicerină	10,14	0,125	0,356	Sulfat de sodiu			
		0,875	0,342		10	1,4	0,66
		1,75	0,300		10,4	1,29	0,49
Sulfat de cadmiu				Sulfat de zinc	19,5	0,025	0,50
	19,0	2,0	0,246			0,55	0,36
Sulfat de cupru						2,95	0,33
	17	0,10	0,39	Zahăr de trestie			
		0,50	0,29		12	0,5	0,28
		1,95	0,23			1,0	0,25
Sulfat de potasiu					18,5	0,30	0,31
	19,6	0,02	1,01			0,97	0,24
		0,28	0,86			1,97	0,43
		0,95	0,79				

Tabela 2.58. **Punctele principale ale scării Celsius de temperaturi şi alte scări de temperaturi**

Scara Celsius de temperaturi are ca puncte fundamentale, la presiunea atmosferică de 760 mm Hg, temperaturile echilibrului de fază dintre:

1) fazele solidă şi lichidă ale apei (punctul de îngheţare) adică 0°C;

2) fazele lichidă şi gazoasă ale apei (punctul de evaporare), adică 100 °C.

Gradul scării Celsius se notează cu °C, iar temperatura se notează cu t.

Comitetul internaţional de măsuri şi greutăţi a stabilit pentru această scară încă patru puncte primare cu valori fixe de temperatură, care au fost definite de asemenea ca temperaturi ale echilibrului de fază la presiunea atmosferică de 760 mm Hg între:

1) fazele lichidă şi gazoasă ale oxigenului (punctul oxigenului) —182,970 °C;

2) fazele lichidă şi gazoasă ale sulfului (punctul sulfului) 444,60°C;

3) fazele solidă şi lichidă ale argintului (punctul argintului) 960,8 °C;

4) fazele solidă şi lichidă ale aurului (punctul aurului) 1063 °C.

La aceeaşi conferinţă, temperatura punctului triplu a fost adoptată pentru această scară la +0,0100 °C.

Pentru interpolarea temperaturilor dintre punctele fundamentale se folosesc:

a) între limitele de la —190 la 660 °C — termometrul cu rezistenţă de platină;

b) între limitele de la 660 la 1063 °C termocuplul normal platină — aliaj platină-rodiu.

c) peste 1063 °C pirometru optic.

În afară de scara Celsius, în cercetările științifice își găsește aplicație largă scara absolută termodinamică de temperaturi, sau scara Kelvin, ale cărei grade se notează cu °K. A zecea conferință generală de măsuri și greutăți din anul 1954 a hotărît să definească această scară cu ajutorul punctului triplu al apei ca punct de reper fundamental, atribuindu-i valoarea de 273,16 °K. Gradele scării absolute și ale scării centigrade sînt egale ca mărime, însă punctul 0 al scării Kelvin este temperatura 0 absolut. Pornind de la definiția scării termodinamice absolute și de la valoarea temperaturii punctului triplu în scara Celsius, considerată ca 0,0100 °C găsim diferența dintre valorile temperaturii unei stări oarecare în cele două scări; ea este, evident

$$273{,}16° - 0{,}01° = 273{,}15°.$$

De aici temperatura punctului de înghețare (0°C) în scara absolută este

$$T = 0°C + 273{,}15° = 273{,}15\ °K,$$

iar temperatura 0 absolut în scara Celsius este

$$0°C - 273{,}15° = -273{,}15\ °C.$$

Așadar, trecerea de la scara Celsius la cea absolută și invers se face după formulele

$$n\ °C = (n + 273{,}15)\ °K \qquad (2.79)$$

$$n\ °K = (n - 273{,}15)\ °C. \qquad (2.80)$$

Analiza critică a surselor de erori posibile în scara Celsius de temperaturi a arătat că acestea pot fi condiționate atît de reproducerea practică a punctelor fundamentale ale scării, cît și de măsurările lor, iar aceste erori cresc cînd se trece spre temperaturile înalte. Mărimile erorilor posibile produse de o cauză sau de alta sînt date în tabela 2.58.

Tabela 2.58

Temperatura în grade Celsius	−182,97	0	100	300	444,60	960,8	1063	2000
La reproducerea în grade Celsius	±0,003	±0,0001	±0,001	±0,002	±0,005	±0,1	±0,1	±3
La măsurarea în grade Celsius	±0,02	0	0	±0,1	±0,15	±0,5	±1	±6

În afară de aceste două scări de temperaturi, în anumite țări se folosesc și alte scări de temperatură, dintre care răspîndirea cea mai largă o au scara Fahrenheit, gradele ei notîndu-se cu °F, și scara Réaumur, ale cărei grade se notează cu °R.

În scara Fahrenheit punctul de 0 °C corespunde la 32 °F, iar 100 °C corespund la 212 °F. Aşadar 1 °C = 9/5 °C.

În scara Réaumur 0 °R coincide cu 0 °C, însă punctul de 100 °C corespunde la 80 °R. Astfel, 1 °C = 4/5 °R şi 1 °R = 5/4 °C.

Formulele pentru trecerea de la scările Fahrenheit şi Réaumur la scara Celsius şi invers sînt, deci, de forma

$$n\ {}^\circ C = \left(\frac{9}{5}n + 32\right) {}^\circ F = \frac{4}{5} n\ {}^\circ R, \tag{2.81}$$

$$n\ {}^\circ F = \frac{5}{9}(n - 32)\ {}^\circ C = \frac{4}{9}(n - 32)\ {}^\circ R, \tag{2.82}$$

$$n\ {}^\circ R = \frac{5}{4}\ {}^\circ C = \left(\frac{9}{4}n + 32\right) {}^\circ F. \tag{2.83}$$

Există tabele numerice de trecere de la temperatura unei scări la temperatura alteia.

Notă la tabela 2.58. **1.** Valoarea temperaturii de 0 absolut se ia deseori aproximativ egală cu −273 °C.

Tabela 2.59. **Coeficienţii termici de dilatare ai corpurilor solide**

În tabelă sînt date valorile medii ale coeficienţilor liniari de dilatare ai corpurilor solide, pentru intervalul de temperaturi indicat în tabelă; dacă se dă o temperatură, valoarea din tabelă, α, poate fi folosită la temperaturi, care diferă de cea indicată în medie cu ±10 °C. Coeficientul de dilatare în volum β al corpurilor solide este egal cu valoarea triplă a coeficientului liniar respectiv.

Tabela 2.59

	t[°C]	$\alpha \cdot 10^4$ [°C^{-1}]
Alamă (62% Cu, 38% Zn)	10−16	0,189
Alpaca	0−100	0,184
Aluminiu	0−100	0,238
Argint	0−100	0,197
Aur	17−100	0,143
Bismut	17−100	0,135
Bronz (84% Cu, 9% Zn, 6% Sn)	20	0,180
Bronz-aluminiu (95% Cu, 5% Al)	20−99	0,142
Cadmiu	18−43	0,247
Caolină	15−1000	0,053
Cărămidă	—	0,009

Tabela 2.59 (*continuare*)

	t[°C]	$\alpha \cdot 10^4$ [°C^{-1}]
Cărbune diamant	50	0,013
Cărbune grafit	50	0,008
Celuloid	20—40	0,074
Clorură de potasiu	0—25	0,028
Clorură de sodiu	0—25	0,042
Cobalt	40	0,127
Constantan (60% Cu, 40% Ni)	0—16	0,122
Crom	0—100	0,084
Cuarț ‖ cu axa	40	0,078
Cuarț ⊥ pe axă	40	0,141
Cuarț topit	0—80	0,004
Cupru-Molibden	18	0,167
Ebonită	17—25	0,077
Fier moale	0—100	0,114
Fluorit	40	0,019
Gheață	−10—0	0,507
Invar (36,1% Ni)	17—100	0,009
Ipsos cristalin	12—25	0,025
Iridiu	17—100	0,066
Lemn de aceracee ⊥	2—34	0,048
Lemn de aceracee ‖	2—34	0,006
Lemn de fag, straturi ⊥	2—34	0,026
Lemn de fag, straturi ‖	2—34	0,006
Lemn de stejar, straturi ⊥	2—34	0,054
Lemn de stejar, straturi ‖	2—34	0,005
Lemn roșu ⊥	2—34	0,040
Lemn roșu ‖	2—34	0,004
Lemn roșu de pin straturi ⊥	2—34	0,034
Lemn roșu de pin, straturi ‖	2—34	0,005
Magnaliu (85% Al, 14,1% Mg)	12—39	0,238
Magneziu	0—100	0,260
Manganin (84% Cu, 4% Ni, 12% Mn)	18	0,181
Marmură albă	15—100	0,014
Molibden	25—100	0,052
Nichel	0—100	0,130
Nicrom	18	0,123
Oțel (1,5% C)	0—100	0,105
Platină	0,6—21,5	0,089
Plumb	17—100	0,293
Porțelan	0—100	0,03 aprox.
Potasiu	0—50	0,083
Siliciu	3—18	0,025
Sodiu	0—50	0,072
Spat de Islanda ‖ cu axa	40	0,026
Spat de Islanda ⊥ pe axă	40	0,005
Staniu	18—100	0,270

Tabela 2.59 (*continuare*)

	t[°C]	$\alpha \cdot 10^4$ [°C^{-1}]
Stibiu	17–100	0,109
Sticlă crom	0–100	0,009 aprox.
Sticlă flint	0–100	0,007 aprox.
Sulf rombic	13–50	0,641
Wolfram	0–100	0,045

Tabela 2. 60. **Coeficienţii termici de dilatare ai lichidelor**

În tabelă sînt date valorile coeficienţilor de dilatare în volum β ai lichidelor la temperatura de 20 °C; aceleaşi valori ale lui β pot fi folosite la temperaturi, care diferă de 20 °C în medie cu ±10 °C.

Tabela 2.60

	$\beta \cdot 10^2$ [°C^{-1}]		$\beta \cdot 10^2$ [°C^{-1}]
Acetonă	0,148	Pentan (normal)	0,160
Acid acetic deshidratat	107	Petrol	aprox. 0,09
Acid azotic 25%	058	Petrol lampant (D = 0,8467)	095
Acid azotic 50%	091	Soluţie $CaCl_2$ 5,8%	025
Acid sulfuric 96%	055	Soluţie $CaCl_2$ 40,9%	046
Alcool amilic	092	Soluţie KCl 2,5%	023
Alcool etilic	110	Soluţie KCl 24,3%	035
Alcool metilic	125	Soluţie NaCl 6,1%	030
Alcool propilic	096	Soluţie NaCl 20,6%	041
Anilină	085	Sulfură de carbon	121
Apă[1])	207	Terebentină	aprox. 0,095
Benzen	124	Toluen	109
Brom	111	Xilen (meta)	099
Cloroform	127	Xilen (orto)	097
Eter etilic	165	Xilen (para)	101
Glicerină	051		
Mercur[2])	0181		

Note la tabela 2.60. 1) Vezi tabela 2.61. 2) Vezi tabela 2.62.

Tabela 2. 61. **Dilatarea termică a apei**

Dilatarea în volum a apei, în intervalul de temperaturi de la 0 la 5 °C, nu urmează legea generală a dilatării termice a corpurilor, deoarece la 4 °C (mai precis la 3,98 °C) apa are volumul specific mi-

nim, adică densitate maximă[1]). O cercetare foarte atentă a densității apei, în funcție de temperatură, a dus la o serie de formule, în care volumul apei este reprezentat ca funcție de temperatură. Formulele care dau rezultatele cele mai precise sînt date în tabelă.

Pentru intervalul de temperaturi dintre 0 și 5 °C aceste formule dau valori foarte apropiate de valorile reale ale densității apei.

Tabela 2.61

Intervalul de temperaturi [°C]	Formule	
$-10 \div 4$	$v_t = v_0(1 - 6{,}4807\cdot10^{-5}\,t + 8{,}6697\cdot10^{-6}\,t^2 - 2{,}6211\cdot10^{-7}\,t^3)$	(2.84)
$0 \div 33$	$v_t = v_0(1 - 6{,}4268\cdot10^{-5}\,t + 8{,}50526\cdot10^{-6}\,t^2 - 6{,}78977\cdot10^{-8}\,t^3 + 4{,}01209\cdot10^{-10}\,t^4)$	(2.85)
$0 \div 80$	$v_t = v_0(1 - 5{,}3255\cdot10^{-5}\,t + 7{,}61532\cdot10^{-6}\,t^2 - 4{,}37217\cdot10^{-8}\,t^3 + 1{,}64322\cdot10^{-10}\,t^4)$	(2.86)

Notă la tabela 2.61. [1]) Aici trebuie făcută următoarea observație: a) temperatura densității maxime a apei, 4 °C, corespunde la presiunea atmosferică normală; cînd presiunea crește (sensibil), temperatura densității maxime a apei scade apreciabil și astfel la 41,3 atmosfere, ea este de 3,3 °C; b) temperatura densității maxime a apei grele D_2O, care după toate proprietățile sale diferă sensibil de H_2O (tabela 2.17), se ia de 11,6 °C (la o presiune de o atmosferă).

Tabela 2.62. **Dilatarea termică a mercurului**

În tabelă sînt date dependența coeficientului de dilatare în volum β_t a mercurului, de temperatură, pentru intervalele menționate.

Tabela 2.62

Autorul	Intervalul de temperaturi [°C]	Formula	
Mendeleev	$0 \div 100$	$\beta_t = 1{,}801\cdot10^{-4} + 0{,}2\cdot10^{-7}\,t$	(2.87)
Recknagel	$0 \div 100$	$\beta_t = 1{,}8018\cdot10^{-4} + 0{,}94\cdot10^{-8}\,t + 0{,}5\cdot10^{-10}\,t^2$	(2.88)
Chappuis	$-20 \div 100$	$\beta_t = 1{,}815405\cdot10^{-4} + 0{,}195130\cdot10^{-8}\,t + 1{,}00917\cdot10^{-10}\,t^2 - 2{,}0386\cdot10^{-13}\,t^3$	(2.89)

Tabelele 2.63 a şi b. Coeficienţii termici de dilatare şi presiune ai gazelor

Coeficientul termic de dilatare α_p al gazelor la presiune constantă se determină după formula

$$\alpha_p = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}. \qquad (2.90)$$

unde V_t şi V_0 sînt volumele gazului la t °C, respectiv la 0 °C. În tabela 2.63 a sînt date valorile medii ale lui α_p pentru intervalul de temperaturi 0 — 100 °C în ipoteza că presiunea gazului rămîne constantă şi egală cu cea normală.

Coeficientul termic de presiune al gazelor la volum constant α_V se determină după formula

$$\alpha_V = \frac{p_t - p_0}{p_0 t}, \qquad (2.91)$$

unde p_t şi p_0 sînt presiunile gazului la temperaturile t °C şi 0 °C. În tabela 2.63 a sînt date valorile medii ale lui α_V pentru intervalul de temperaturi 0—100 °C, în ipoteza că $p_0 = 1\ 000$ mm Hg.

Pentru un gaz ideal, α_p şi α_V sînt egale ($\alpha_p = \alpha_V$).

Tabela 2.63 a

	$\alpha_p \cdot 10^6$ [°C^{-1}]	$\alpha_V \cdot 10^6$ [°C^{-1}]		$\alpha_p \cdot 10^6$ [°C^{-1}]	$\alpha_V \cdot 10^6$ [°C^{-1}]
Azot	3 674	3 672	Amoniac	3 804	3 770
Hidrogen	3 661	3 663	Oxigen	3 665	3 674
Aer (fără CO_2)	3 671	3 674	Oxid de carbon	3 669	3 667
Heliu	3 658	3 660	Bioxid de carbon	3 741	3 726
Protoxid de oxigen	3 719	3 676			

Cercetările au arătat totodată că valorile lui α_p şi α_V depind de presiunea iniţială p a gazului; rezultatele acestor cercetări sînt date în tabela 2.63 b.

Tabela 2.63 b

	p (atm)	α_p	p [cm Hg]	α_V
Hidrogen	200	0,00332	0,0077	0,003328
	400	0,00295	0,025	0,003623
	600	0,00261	0,47	0,003656
	800	0,00242	100,0	0,0036626

Tabela 2.63 b (*continuare*)

	p (atm)	α_p	[p cm Hg]	α_V
Oxigen	200	0,00534	0,007	0,004161
	400	0,00459	0,25	0,003984
	600	0,00357	0,51	0,003831
	800	0,00288	1,9	0,0036683
	1 000	0,00241	18,5	0,003690
Bioxid de carbon	51,8 (cm Hg)	0,0037073	51,8	0,0036981
	99,8	0,0037410	99,8	0,0037262
	137,7	0,0037703	100,0	0,0037248

Tabelele 2.64 a și b. **Punctele de topire și fierbere ale corpurilor**

În tabela 2.64 a, sînt date temperaturile de topire t_t și cele de fierbere t_f la presiunea atmosferică de 760 mm Hg pentru corpuri pure, adică fără impurități; temperaturile t_t și t_f sînt exprimate în grade Celsius. Corecția pentru punctul de fierbere, ținînd seama de presiunea atmosferică, este dată în tabela 2.66.

În tabela 2.64 b, sînt date temperaturile de topire a gheții la diferite presiuni, p, exprimate în kgf/cm².

Tabela 2.64 a

	t_t[°C]	t_f[°C]		t_t[°C]	t_f[°C]
Acetonă	−94,3	56,2	Cadmiu	320,9	766
Acid acetic (deshidratat)	16,6	118,1	Calciu	850	1440
Acid bromhidric	−88	−67,1	Camfor	176	204
Acid clorhidric	−112	−84	Clor	−223	−187,9
Alcool etilic	−117	78,5	Cloroform	−63,5	−61,0
Alcool metilic	−93,9	64,1	Clorură de potasiu (KCl)	776	1417
Aluminiu	660,1	2330	Clorură de sodiu (NaCl)	804	1413
Anilină	−6,2	184,3	Cobalt	1492	3000
Argint	960,8	2193	Crom	1800	2300
Argon	−189,2	−185,9	Cuarț topit	1725	2230(2590)
Aur	1063	2660	Cupru	1083	2582
Azot	−209,86	−195,81	Etan	−183,3	−88,6
Bariu	704	1600	Eter etilic	−116,0	34,6
Benzen	5,54	80,2	Etilen	−169,2	−103,7
Bismut	271,3	1420	Fier	1535	2800
Bor	2100	2550	Fluor	−101	−34,1
Brom	−7,2	58,8	Glicerină	18,6	290
Bromoform	6,5	149,5	Heliu	−271,4[1]	−268,9
			Hidrogen	−259,2	−252,8

Tabela 2.64 a (*continuare*)

	t_t[°C]	t_f[°C]		t_t[°C]	t_f[°C]
Kripton	−157	−153,2	Platină	1769	4000
Litiu	186	1380	Plumb	327,3	1750
Magneziu	650	1100	Potasiu	63	760
Mangan	1260	2150	Protoxid de azot	−102,4	−89,5
Mercur	−38,87	356,58	Radiu	700	1140
Metan	−182,5	−161,5	Sodiu	97,7	883
Molibden	2625	4800	Staniu	231,9	2337
Naftalină	80,1	217,7	Stibiu	630,5	1440
Neon	−248,7	−246,1	Stronţiu	770	1360
Nichel	1453	2800	Sulf	112,8	444,600³)
Nitrobenzen	5,9	210,9	Toluen	−95,0	110,6
Oxid de azot	−163,6	−151,8	Xenon	−112	−108,1
Oxid de carbon	−207	−192	Xilol (meta)	−47,7	139,0
Oxigen	−218,8	−182,970²)	Wolfram	3380	6000
Ozon (O_3)	251,4	−111,5	Zinc	419,5	907
Parafină	−38,56	350−430	Zirconiu	1860	2900
Pentan (normal)	−129,7	36,15			

Note la tabela 2.64 a. 1) La presiunea de 30 atmosfere. 2) Punctul iniţial de reper al scării Celsius de temperatură, v. tabela 2(.58). 3) Vezi nota 2).

Tabela 2.64 b

p [kgf/cm²]	1	336	615	890	1155	1410	1625	1835	2042	2200
t_t [°C]	0,0	−2,5	−5,0	−7,5	−10,0	−12,5	−15,0	−17,5	−20,0	−22,1

Tabela 2. 65. **Punctul de fierbere al apei la diferite presiuni**

În tabelă sînt date valorile punctului de fierbere t_f al apei în intervalul de presiuni H de la 680 la 800 mm Hg din mm în mm. Pentru presiuni intermediare faţă de presiunile din tabelă, punctul de fierbere al apei poate fi calculat prin interpolare liniară.

Tabela 2.65

H [mm Hg]	t_f [°C]	H [mm Hg]	t_f[°C]	H [mm Hg]	t_f [°C]	H [mm Hg]	t_f[°C]
680	96,916	684	97,077	688	97,237	692	97,397
681	956	685	117	689	277	693	437
682	996	686	157	690	317	694	477
683	97,037	687	197	691	357	695	516

Tabela 2.65 (*continuare*)

H [mm Hg]	t_f [°C]	H [mm Hg]	t_f [°C]	H [mm Hg]	t_f [°C]	H [mm Hg]	t_f [°C]
696	97,556	722	98,571	748	99,555	774	100,511
697	596	723	609	749	593	775	547
698	635	724	648	750	630	776	584
699	675	725	686	751	667	777	620
700	714	726	724	752	704	778	656
701	754	727	762	753	741	779	692
702	793	728	801	754	778	780	728
703	832	729	839	755	815	781	764
704	872	730	877	756	852	782	800
705	911	731	915	757	889	783	836
706	950	732	953	758	926	784	872
707	989	733	991	759	963	785	908
708	98,028	734	99,029	760	100,000	786	944
709	067	735	067	761	037	787	980
710	106	736	105	762	073	788	101,016
711	145	737	142	763	140	789	051
712	184	738	180	764	147	790	087
713	223	739	218	765	184	791	122
714	262	740	255	766	220	792	158
715	301	741	293	767	257	793	194
716	339	742	331	768	293	794	229
717	378	743	368	769	330	795	265
718	417	744	406	770	366	796	300
719	455	745	443	771	402	797	335
720	494	746	481	772	439	798	371
721	532	747	518	773	475	799	406
						800	441

Tabela 2.66. **Dependența de presiune a punctului de fierbere al lichidelor**

Dacă indicația barometrului nu iese din limitele oscilațiilor obișnuite ale presiunii atmosferice, punctul de fierbere al apei la presiunea H poate fi determinat după formula

$$t_f = t_0\,[1 + c(H - 760)], \qquad (2.92)$$

unde t_0 este punctul de fierbere al lichidului la presiunea atmosferică de 760 mm Hg, iar c un coeficient diferit pentru diferitele lichide; valoarea lui este dată în tabelă.

Tabela 2.66

	$c \cdot 10^6$		$c \cdot 10^6$
Acid acetic	112	Alcool metilic	103
Acetonă	117	Alcool propilic	095
Apă	101	Alcool etilic	097
Alcool amilic	097	Anilină	112

Tabela 2.66 (*continuare*)

	$c \cdot 10^6$		$c \cdot 10^5$
Benzen	122	Sulfură de carbon	129
Cloroform	024	Terebentină	131
Eter etilic	129	Toluen	117
Fenol	094	Xilol (meta-)	128
Mercur	120	Xilol (orto-)	118
Pentan (normal)	130	Xilol (para-)	136

Tabela 2.67. Presiunea şi densitatea vaporilor de apă saturanţi, în intervalul de temperaturi de la 20 pînă la 100°C

În tabelă, pentru intervalul menţionat de temperaturi sînt date: 1) presiunea p a vaporilor de apă saturanţi, exprimată în mm Hg; 2) densitatea ρ a vaporilor de apă saturanţi, exprimată în g/m³.

Tabela 2.67

t[°C]	p [mmHg]	ρ [g/m³]	t[°C]	p [mmHg]	ρ [g/m³]	t[°C]	p [mmHg]	ρ [g/m³]
−20	0,772	0,88	15	12,78	12,8	35	42,175	39,6
−18	0,935	1,05	16	13,634	13,6	36	44,563	41,7
−16	1,128	1,27	17	14,530	14,5	37	47,067	44,0
−14	1,357	1,51	18	15,477	15,4	38	49,692	46,2
−12	1,627	1,80	19	16,477	16,3	39	52,442	48,6
−10	1,946	2,14	20	17,535	17,3	40	55,324	51,2
− 8	2,321	2,54	21	18,650	18,3	45	71,88	65,6
− 6	2,761	2,99	22	19,827	19,4	50	92,51	83,2
− 4	3,276	3,51	23	21,068	20,6	55	118,04	104,6
− 2	3,879	4,13	24	22,377	21,8	60	149,38	130,5
0	4,579	4,84	25	23,756	23,0	65	187,54	161,5
2	5,294	5,60	26	25,209	24,4	70	233,71	198,4
4	6,101	6,40	27	26,739	25,8	75	289,13	242,1
6	7,013	7,3	28	28,349	27,2	80	355,12	293,8
8	8,045	8,3	29	30,043	28,7	85	433,62	354,1
10	9,209	9,4	30	31,824	30,3	90	525,76	424,1
11	9,844	10,0	31	33,695	32,0	95	633,90	505,0
12	10,518	10,7	32	35,663	33,8	100	760,00	598,0
13	11,231	11,4	33	37,729	35,6	110	1074,26	827,0
14	11,987	12,1	34	39,898	37,6	120	1489,14	1122,0

Tabela 2.68. **Tabelă psihrometrică**

La determinarea umidității aerului cu psihrometrul aspirator se folosește formula

$$E = E_1 - 0{,}00066B\,(t - t_1)\,[1 + 0{,}00115\,(t - t_1)], \qquad (2.93)$$

unde E este presiunea vaporilor de apă, care se află în aer, a căror temperatură se determină cu ajutorul unui termometru uscat, E_1 este presiunea vaporilor de apă, care satură aerul la aceeași temperatură t, iar t_1 este temperatura termometrului umed, atunci cînd atinge starea staționară.

În tabelă sînt date valorile umidității relative a aerului, în procente, în funcție de indicațiile termometrului uscat (t [°C]) și diferențele dintre indicațiile termometrului uscat și cele ale termometrului umed ($t - t_1$) [°C] în intervalul de temperaturi de la 0 la 20 °C, la presiunea de 760 mm Hg.

Tabela 2.63

t (indicațiile termometrului uscat în °C)	$t_0 - t_1$ (diferența dintre indicațiile termometrului uscat și cele ale termometrului umed, în °C)											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	100	81	63	45	28	11						
1	100	83	65	48	32	16						
2	100	84	68	51	35	20						
3	100	84	69	54	39	24	10					
4	100	85	70	56	42	28	14					
5	100	86	72	58	45	32	19	6				
6	100	86	73	60	47	35	23	10				
7	100	87	74	61	49	37	26	14				
8	100	87	75	63	51	40	29	18	7			
9	100	88	76	64	53	42	31	21	11			
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5		
11	100	88	77	66	56	46	36	26	17	8		
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11		
13	100	89	79	69	59	49	40	31	23	14	6	
14	100	89	79	70	60	51	42	34	25	17	9	
15	100	90	80	71	61	52	44	36	27	20	12	5
16	100	90	81	71	62	54	46	37	30	22	15	8
17	100	90	81	72	64	55	47	39	32	24	17	10
18	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27	20	13
19	100	91	82	74	65	58	50	43	35	29	22	15
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24	18
21	100	91	83	75	67	60	52	46	39	32	26	20
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	28	22
23	100	92	84	76	69	61	55	48	42	36	30	24
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37	31	26
25	100	92	84	77	70	63	57	50	44	38	33	27
26	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40	34	29
27	100	92	85	78	71	65	59	52	47	41	36	30
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42	37	32
29	100	93	86	79	72	66	60	54	49	43	38	33
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44	39	34

Tabelele 2.69 a şi b. Presiunea vaporilor saturanţi ai lichidelor la diferite temperaturi

În tabela 2.69 a sînt date valorile presiunii p a vaporilor saturanţi ai lichidelor, exprimate în mm Hg la diferite temperaturi. Pentru temperaturi intermediare faţă de temperaturile date în tabelă, presiunea vaporilor saturanţi poate fi calculată aproximativ prin interpolare liniară.

Tabela 2.69 a

Lichidele	t [°C]	p [mm Hg]	Lichidele	t [°C]	p [mm Hg]
Acetonă	40	420,15	Benzen	80	751,86
	50	620,86		80,3	760,0
	60	860,48		90	1012,75
Acid acetic	100	417,1	Cloroform	40	366
	110	580,8		51	541
	120	794,0		60	731
Alcool etilic	51,5	235		61,0	760,0
	61	353		70,2	1010
	68	509	Mercur	350	669,77
	77	740		354	720,56
	78,5	760,0		356	741,11
Alcool metilic	56,5	500		356,58	760,0
	60,5	600		358	774,45
	64,1	700		360	802,62
	65,8	760,0	Pentan	20	420,2
Anilină	182	713,75		30	610,9
	183	732,65		40	873
	183,9	760,0	Toluen	99,4	550
	184	751,9		102,5	600
	185	771,5		105,3	650
Benzen	50	271,37		107,8	700
	60	390,10		107,8	700
	70	547,42		110,6	760,0

În tabela 2.69 b sînt date cu mai multă precizie valorile presiunii vaporilor de mercur, în mm Hg, în intervalul de temperaturi de la −38 °C la 46 °C.

Tabela 2.69 b

t [°C]	p [mm Hg]	t [°C]	p [mm Hg]	t [°C]	p [mm Hg]	t [°C]	p [mm Hg]
−38	$1{,}45\cdot10^{-6}$	−28	$6{,}30\cdot10^{-6}$	−18	$23{,}2\cdot10^{-6}$	−8	$76{,}2\cdot10^{-6}$
−36	$1{,}97\cdot10^{-6}$	−26	$8{,}28\cdot10^{-6}$	−16	$29{,}8\cdot10^{-6}$	−6	$95{,}4\cdot10^{-6}$
−34	$2{,}66\cdot10^{-6}$	−24	$10{,}8\cdot10^{-6}$	−14	$38{,}0\cdot10^{-6}$	−4	$119{,}0\cdot10^{-6}$
−32	$3{,}59\cdot10^{-6}$	−22	$14{,}0\cdot10^{-6}$	−12	$48{,}1\cdot10^{-6}$	−2	$149{,}0\cdot10^{-6}$
−30	$4{,}78\cdot10^{-6}$	−20	$18{,}1\cdot10^{-6}$	−10	$60{,}6\cdot10^{-6}$	0	$185{,}0\cdot10^{-6}$

Tabela 2.69 b (*continuare*)

t[°C]	p[mm Hg]	t[°C]	p[mm Hg]	t[°C]	p[mm Hg]	t[°C]	p[mm Hg]
0	0,000185	12	0,000588	24	0,001691	36	0,004471
2	0,000228	14	0,000706	26	0,002000	38	0,005219
4	0,000276	16	0,000846	28	0,002359	40	0,006079
6	0,000335	18	0,001009	30	0,002777	42	0,007067
8	0,000406	20	0,001201	32	0,003261	44	0,008200
10	0,000490	22	0,001426	34	0,003823	46	0,009497

Tabela 2.70. Datele critice

În tabelă sînt date: temperatura critică t_{cr} în grade Celsius şi presiunea critică p_{cr} exprimată în atmosfere fizice.

Tabela 2.70

	t_{cr}[°C]	p_{cr}[atm]		t_{cr}[°C]	p_{cr}[atm]
Acetonă	235,0	47,0	Azot	−147,1	33,5
Acid acetic	321,6	57,2	Benzen	285,5	47,7
Acid bromhidric	90	84	Bioxid de carbon	31,1	73,0
Acid cianhidric	183,5	50	Brom	302	131
Acid clorhidric	51,4	81,55	Brom-benzen	397	44,6
Acid iodhidric	151	82	Butan (izo)	134	36
Acid propionic	339,5	53,0	Butan (normal)	152,8	37,5
Aer	−140,7	37,2	Cian	126,6	58,2
Alcooli:			Clor	144,0	76,1
— butilic (izo)	265	48	Clor-benzen	359	44,6
— butilic (normal)	287	48,4	Cloroform	262,5	54,9
— etilic	243,6	62,8	Clorură de etil	187,2	51,72
— metilic	240	78,58	Clorură de metil	143,1	65,8
— propilic(izo)	235	53	Crezol (meta)	−432	45,0
— propilic (normal)	263,7	49,95	Crezol (orto)	422	49,4
Amoniac	−228,65	26,86	Crezol (para)	426	50,8
Anilină	425,6	52,3	Etan	32,3	48,8
Anisol	369	41,3	Eter etilic	193,8	35,7
Apă	374,1	217,5	Etilamină	183,2	55,5
Apă grea	371,5	218	Etilen	9,5	50,7
Argon	−122,4	47,996	Fenol	419,2	60,5
			Fluor	−129	55
			Fluorură de metil	44,9	62,0
			Fosgen	181,7	56,0

Tabela 2.70 (*continuare*)

	t_{cr} [°C]	p_{cr} [atm]		t_{cr} [°C]	p_{cr} [atm]
Fosfină	51	64	Pentan (normal)	197,2	33,04
Heliu	−267,9	2,26	Propan	95,6	43
Hidrazină	380	145	Propilen	92,3	45,0
Hidrogen	−239,92	12,80	Protoxid de azot	36,48	71,7
Hidrogen seleniat	138	88	Radon	104	62
Hidrogen siliciat	−3,5	48	Sulf gazos	157,2	77,7
Hidrogen sulfurat	100,4	88,9	Sulfat de carbon	105	61
Kripton	−63,7	54,9	Sulfură de carbon	273	76
Mercur	1550	200	Tetraclorură de carbon	283,15	44,98
Metan	−82,1	45,8	Tetraclorură de germaniu	277	38
Naftalină	468,2	39,2	Tetraclorură de siliciu	−1,5	50
Neon	−228	26,86	Toluen	320,6	41,6
Oxid de azot	−92,9	64,6	Xenon	16,7	58,22
Oxid de carbon	−140,2	34,53	Xilol (meta)	345,6	35,8
Oxigen	−118,8	49,7			
Pentan (izo)	187,8	32,8			

Tabela 2.71. **Conductibilitatea termică a corpurilor solide**

Pentru majoritatea metalelor pure, conductibilitatea termică scade cu creşterea temperaturii, iar pentru aliaje şi corpuri slab conducătoare de căldură, se observă de obicei situaţia inversă. Dacă notăm cu λ, σ şi T coeficientul de conductibilitate termică, conductibilitatea electrică specifică şi respectiv temperatura absolută, atunci pentru metale pure raportul $\lambda/\sigma T$ rămîne aproximativ constant (vezi tabela 2.91).

În tabelă sînt date valorile coeficientului de conductibilitate termică λ pentru unele metale şi corpuri solide nemetalice, exprimate în cal/cm·s·°C; sînt date de asemenea temperaturile la care s-au efectuat măsurările.

Tabela 2.71

	t [°C]	λ		t [°C]	λ
Alamă[1])	18	0,26	Asbest (carton)	500	0,0004
Aliaj Wood	10−20	0,03	Aur	18	0,70
Alpaca[2])	18	0,06	Bismut	0	0,018
Aluminiu	20	0,48	Bismut	18	0,019
Argint	18	0,99	Bronz[3])	18	0,14

Tabela 2.71 (*continuare*)

	t [°C]	λ		t [°C]	λ
Cadmiu	18	0,22	Marmură	0	0,007
Cărbune (grafit)	7	0,012	Mică[6])	50	0,0018
Cărbune pentru arc	50	0,015	Molibden	17	0,35
			Nichel	18	0,14
Cărbune pulbere	30	0,0003	Oțel (1,5% C)	0	0,11
Ceară	20	0,0001	Parafină	17	0,0005
Celuloid	8	0,0003	Platină	0	0,167
Cobalt	30	0,16	Platină	17	0,165
Constantan[4])	18	0,054	Plumb	0	0,084
Cositor	18	0,16	Plumb	18	0,083
Cuarț cristalin ‖ cu axa	0	0,030	Plută	30	0,0007
			Porțelan	20	0,0025
Cuarț cristalin ⊥ față de axă	0	0,016	Sare gemă	30	0,015
			Sodiu	20	0,32
Cuarț topit	0	0,003	Spat de Islanda ‖ față de axă	8,5	0,009
Cupru	0	0,920			
Cupru	18	0,916	Spat de Islanda ⊥ față de axă	8,5	0,007
Ebonită	25	0,0004			
Fier moale	18	0,14	Staniu	18	0,16
Gheață	0	0,0055	Stibiu	0	0,044
Ipsos artificial	0	0,003	Sticlă crom	12,5	0,0016
Iridiu	17	0,14	Sticlă de oglindă	12,5	0,0018
Lemn de pin	20	0,0004	Sticlă flint	12,5	0,0025
Lemn de stejar	15	0,0006	Sulf rombic	0	0,0006
Magneziu	0	0,37	Wolfram	0	0,38
Manganin[5])	18	0,053	Wolfram	18	0,35

Note la tabela 2.71. 1) Compoziția: 70% Cu + 30% Zn. 2) 63% Cu + 15% Ni + 22% Zn. 3) Compoziția: 85% Cu + 6% Sn + 9% Zn. 4) Compoziția 60% Cu + 40% Ni. 5) Compoziția: 84% Cu + 12% Mn + 4% Ni. 6) În direcția perpendiculară la planul de clivaj.

Tabela 2.72. **Conductibilitatea termică a lichidelor**

Valorile aproximative ale coeficienților conductibilității termice a unor lichide sînt exprimate în cal/cm·s·°C. Cifrele din tabelă dau valorile mărimii $\lambda \cdot 10^2$; sînt indicate de asemenea temperaturile la care s-au făcut măsurările.

Tabela 2.72

	t [°C]	$\lambda \cdot 10^2$		t [°C]	$\lambda \cdot 10^2$
Acetonă	0	0,043	Acid clorhidric 12,5%	32	126
Acid acetic	12	047			
Acid acetic	25	043	Acid clorhidric 25%	32	115

Tabela 2.72 (*continuare*)

	t [°C]	$\lambda \cdot 10^2$		t [°C]	$\lambda \cdot 10^2$
Acid sulfuric 30%	32	0,124	Glicerină	20	0,068
Acid sulfuric 60%	32	105	Nitrobenzen	12,5	038
Apă	4,1	129	Pentan (normal)	14	029
Apă	20	142	Petrol lampant	13	035
Apă	80	154	Soluţii: NH_3 26%	18	119
Apă	90	160	$CaCl_2$ 15%	32	138
Alcool amilic	12	033	KCl 20%	32	133
Alcool amilic	33	027	NaCl 10%	32	148
Alcool etilic	12	042	Sulfură de carbon	0	039
Alcool etilic	33	035	Sulfură de carbon	14	034
Alcool metilic	12	047	Terebentină	12	026
Alcool metilic	32	040	Tetraclorură de carbon	23	028
Anilină	12	041			
Benzen	12	033	Toluen	0	035
Cloroform	12	029	Toluen	14,5	034
Eter etilic	14,9	032	Xilol (meta)	0	0,034
Glicerină	12	0,067			

Tabela 2.73. **Conductibilitatea termică a gazelor**

Conductibilitatea termică λ a gazelor, aşa cum rezultă din consideraţiile teoretice, trebuie să crească cu creşterea temperaturii. În tabelă sînt date valorile conductibilităţii termice a unor gaze, calculate teoretic (valorile lui λ la temperaturile de 273,1°K; 293,1 °K şi 298,1 °K au fost determinate exprimental). Valorile lui λ sînt exprimate în cal/cm·s·°K (în tabelă sînt date valorile mărimii $\lambda \cdot 10^5$); temperaturile sînt date după scara absolută.

Tabela 2.73

T [°K]	$\lambda \cdot 10^5$								
	O_2	CO	He	H_2	CH_4	NO	CO_2	N_2O	Aer
100	2,16	2,09	17,51	16,25	2,54	—	—	—	2,20
150	3,29	3,15	22,73	23,54	3,86	3,21	—	—	3,32
200	4,37	4,17	27,56	30,64	5,22	4,24	2,27	2,33	4,36
250	5,38	5,11	32,00	37,09	6,64	5,23	3,08	3,19	5,27
273,1	5,84	5,52	33,90	39,65	7,34	5,67	3,48	3,62	5,66
293,1	6,22	5,88	35,48	41,64	7,96	6,06	3,85	4,01	—
298,1	6,31	5,96	35,86	42,10	8,12	6,15	3,95	4,11	—
300	6,35	6,00	36,00	42,27	8,19	6,19	3,98	4,15	6,10
310	6,55	6,18	36,74	43,19	8,52	6,38	4,17	4,35	6,26
320	6,75	6,35	37,46	44,11	8,86	6,57	4,37	4,56	6,42
330	6,95	6,53	38,15	45,02	9,22	6,76	4,57	4,77	6,58
350	7,38	6,88	39,44	46,85	9,98	7,13	4,99	5,21	6,90
380	8,03	7,43	41,17	49,60	11,22	7,69	5,63	5,86	7,39

Tabela 2.74. **Căldurile specifice ale corpurilor solide şi lichide**

În tabelă sînt date valorile aproximative ale căldurii specifice *c* pentru o serie de corpuri solide şi lichide, medii pentru intervalele de temperaturi indicate în tabelă, precum şi valorile căldurii specifice *c* pentru unele corpuri la temperaturi joase. Toate valorile lui *c* sînt exprimate în cal/g·°C.

Tabela 2.74

	t [°C]	c		t [°C]	c
Acetonă	3—23	0,52	Constantan	0	098
Acid acetic	1—8	62	Crom	18—100	111
Acid azotic 3,4%	20	96	Cuarţ cristalin	0—100	19
Acid azotic 12,3%	20	87	Cuarţ topit	0—100	18
Acid azotic 58,3%	21—52	65	Cupru	18—100	093
Acid clorhidric 5,4%	20—50	95	Cupru	−250	0035
Acid clorhidric 16,8%	18	55	Fier	18—100	11
Acid sulfuric 5,2%	5—22	96	Fier	−182,7	05
Acid sulfuric 50%	5—22	59	Gheaţă	−20	48
Acid sulfuric 85%	0	39	Gheaţă	−10	53
Alamă	20—100	09	Glicerină	15—50	58
Alcool amilic	17—96	64	Granit	12—100	aprox. 0,19
Alcool etilic	12—30	60	Iridiu	0—100	03
Alcool metilic	15—20	57	Magneziu	17—100	25
Aluminiu	16—100	21	Mangan	20—100	12
Aluminiu	−240	009	Marmură albă	0—100	21
Anilină	12—50	515	Molibden	20—100	065
Argint	15—100	05	Nichel	15—100	11
Aur	0—100	03	Nitrobenzen	0—30	339
Benzen	6—60	41	Oţel (1,25% C)	10—13	12
Bismut	17—100	031	Paladiu	0—100	054
Bismut	−186	020	Pentan	0	51
Brom	−13,1	088	Petrol lampant	18—99	aprox. 0,50
Bronz	14—98	09	Platină	0—100	032
Cadmiu	0—100	06	Plumb	18—100	031
Carbon			Porţelan	15—950	26
— diamant	0—20	112	Potasiu	0—50	19
— diamant	−185	0025	Potasiu, clorură	16—99	16
— grafit	20—85	174	Rodiu	10—97	058
— cărbune amorf	26—76	0,168	Rubidiu	20—35	079
			Siliciu	0—99	17
			Sodiu	0—20	29
			Sodiu, clorură	17—99	0,21
			Carbon sulfură	0—30	0,24

Tabela 2.74 (*continuare*)

	t [°C]	c		t [°C]	c
Soluţii:			Stibină	17–100	0,050
KCl 25%	18	0,828	Sulf rombic	0–32	166
KCl 50%	18	904	Tantal	20	036
KCl 100%	18	948	Toluen	0	386
NaCl 25%	18	880	Wolfram	20–100	034
NaCl 50%	18	931	Xilol (meta)	30	38
NaCl 100%	18	962	Zinc	0	91
Staniu	18–100	0,058	Zinc	–201	057
Sticlă	10–50	16–20	Zinc	–233	0,027

Tabela 2.75. **Căldura specifică a apei şi a mercurului**

În tabelă sînt date: căldura specifică a apei c_{H_2O} în intervalul de temperaturi de la 0 la 100°C şi căldura specifică a mercurului c_{Hg} în intervalul de temperaturi de la 0 la 250 °C. Toate valorile sînt exprimate în cal/g·°C. Căldura specifică a apei la 20°C a fost considerată 1,0000 cal/g·°C.

Tabela 2.75

t [°C]	c_{H_2O}	t [°C]	c_{H_2O}	t [°C]	c_{Hg}
0	1,0094	50	0,9987	0	0,0334
5	0054	55	9992	20	332
10	0027	60	1,0000	40	331
15	0011	65	0008	60	330
20	1,0000	70	0016	80	329
25	0,9992	75	0024	100	328
30	9987	80	0033	140	326
35	9983	85	0043	160	325
40	9982	90	0053	200	324
45	9983	100	0074	260	323

unde Y înseamnă magnetizarea unui gram de corp, iar H este intensitatea cîmpului exterior de magnetizare.

Sînt date separat valorile lui χ pentru elemente (tabela 2.78 a) și pentru unele combinații organice și anorganice (tabela 2.78 b). Corpurile solide sînt presupuse în stare izotropă. Temperaturile t sînt date în °C.

Tabela 2.78 a

	t[°C]	$\chi\cdot10^6$		t[°C]	$\chi\cdot10^6$
Aluminiu	18	+0,65	Magneziu lichid	700	+0,55
Argint	16	−0,20	Mangan	22	+9,9
Argon	18	−0,48	Mercur	18	−0,19
Aur	18	−0,15	Mercur solid	−80	−0,15
Aur	−256,6	−0,13	Molibden	18	+0,04
Azot	18	−0,34	Neon	18	−0,33
Bariu	20	+0,91	Oxigen	20	+106,2
Bismut	18	−1,38	Oxigen lichid	−195	+259,6
Bismut	260	−1,02	Oxigen solid	−240	+60
Cadmiu	18	−0,18	Paladiu	18	+5,4
Calciu	20	+1,10	Paladiu	200	+4,6
Carbon diamant	18	−0,49	Paladiu	750	+2,6
			Paladiu	1230	+1,7
Carbon diamant	400	−0,51	Platină	18	1,10
			Platină	250	+0,66
Carbon diamant	1200	−0,56	Platină	700	+0,45
			Platină	1220	+0,30
Carbon grafit	20	−3,5	Plumb	16	−0,11
Carbon grafit	−170	−6,0	Plumb lichid	330	−0,08
Carbon grafit	600	−2,0	Potasiu	20	+0,52
Carbon grafit	1000	−1,3	Siliciu	20	−0,13
Clor lichid	−60	−0,57	Sodiu	18	+0,51
Crom	18	+3,6	Staniu cenușiu	18	−0,35
Crom	1100	+4,2	Staniu lichid	400	−0,036
Cupru	18	−0,085	Staniu	18	+0,025
Erbiu	18	+22	Stibiu	16	−0,87
Fosfor alb	20	−0,90	Stibiu lichid	800	−0,49
Heliu	18	−0,47	Sulf lichid	113	−0,49
Hidrogen	18	−1,98	Sulf lichid	220	−0,49
Iridiu	25	+0,14	Sulf rombic	18	−0,49
Iridiu	200	+0,17	Tantal	18	+0,87
Iridiu	450	+0,20	Tantal	820	+0,77
Iridiu	850	+0,26	Wolfram	16	+0,28
Iridiu	1150	+0,31	Zinc	18	−0,157
Litiu	16	+0,50	Zinc lichid	450	−0,09
Magneziu	18	+0,55			

Tabela 2.78 b

	t[°C]	$\chi \cdot 10^6$
Acetonă	15	−0,58
Acid acetic	20	−0,53
Acid azotic	22	−0,467
Acid clorhidric	22	−0,66
Acid sulfuric	22	−0,44
Aer	20	+24,2
Alcool butilic	—	−0,74
Alcool etilic	19	0,174
Alcool metilic	−3	−0,65
Aluminiu, sulfat	18	−0,48
Aluminiu, clorură	19	−0,60
Amoniac (gaz)	16	−1,1
Apă	10	−0,72
Bariu, clorură	15	−0,41
Bariu, sulfat	—	−0,306
Benzen	16,8	−0,71
Beriliu, benzen	17	−0,60
Bismut, bromură	19	−0,33
Bismut, iodură	20	−0,49
Carbon, bioxid	18	−0,42
Cloroform	15	−0,49
Cobalt, clorură	25	+90,5
Cobalt, iodură	18	+32,0
Cobalt, sulfat	22	59,6
Crom, clorură	19	+44,3
Crom, sulfat	21	+29,5
Crom, trioxid	17	+0,51
Cuarţ	20	−0,49
Ebonită	20	+0,6
Eter etilic	20	−0,77
Etil, acetat	6	−0,607
Etilen	20	−1,6
Etilen, clorură	—	−0,602
Fier, bromat	18	+48
Fier, clorat	20	+86,2
Fier, clorură	17	+101,2
Fier, oxid	20	189,1

	t[°C]	$\chi \cdot 10^6$
Fier, sulfat	19	+74,2
Gadoliniu, clorură	18	+91
Gadoliniu, oxid	20	+130,1
Glicerină	20	−0,54
Magneziu, bromură	20	−0,57
Magneziu, clorură	12	−0,58
Mangan, clorură	24	107,0
Mangan, sulfat	24	88,5
Nichel, bromură	18	+19,0
Nichel, clorură	24	+44,7
Nichel, protoxid	—	+48,3
Nichel, sulfat	15,9	+26,7
Parafină	20	aprox. −0,5
Păcură	15—20	aprox. −0,8
Plumb, bromură	20	−0,28
Plumb, clorură	15	−0,32
Plumb, iodură	19	−0,33
Potasiu, bromură	—	−0,377
Potasiu, clorură	20	−0,52
Potasiu, ferocianură	21	+7,08
Potasiu, permanganat	21	0,175
Sodiu, clorură	18	−0,50
Sodiu, sulfat	16	−0,86
Staniu, biclorură	—	−0,34
Sticlă crom	—	−0,90
Sticlă flint grea	—	−1,2
Stibiu, triclorură	15	−0,36
Stibiu, trioxid	14	−0,19
Şelac	—	−0,30
Zinc, bromură	19	−0,40
Zinc, clorură	22	−0,47
Zinc, sulfat	—	−0,48

Tabela 2.79. **Permeabilitatea magnetică a corpurilor feromagnetice**

Permeabilitatea magnetică μ a corpurilor feromagnetice se defineşte prin relaţia

$$\mu = B/H, \qquad (2.96)$$

unde B reprezintă inducţia magnetică în corp, iar H intensitatea cîmpului magnetic exterior. În tabelă sînt date valorile lui B şi μ la variaţia lui H de la 1 la 6 000 Oe pentru; 1. fier electrolitic, nichel, cobalt şi aliajul lui Geisler (75,5% Cu + 14,25% Mn + 10,15% Al).

Tabela 2.79

H	Fe		Ni		Co		Aliajul lui Geisler	
	B	μ	B	μ	B	μ	B	μ
1,0	5 800	5 800	650	650	—	—	—	—
1,5	7 500	5 000	1 350	900	—	—	—	—
2,5	9 200	3 680	2 800	1 120	210	84	120	48
5,0	11 000	2 200	4 330	865	570	114	400	80
10	12 300	1 230	4 940	494	1 700	170	720	72
20	13 450	673	5 400	270	3 400	170	1 070	54
50	14 850	297	5 850	117	5 960	119	1 540	31
100	16 000	160	6 200	62	7 840	78	1 970	20
150	16 860	112	6 400	43	9 000	60	2 250	15
300	18 400	61,3	6 700	22	—	—	2 800	9,3
500	19 200	38,4	6 910	14	—	—	3 120	6,2
1 000	20 000	20,0	7 370	7,4	—	—	3 670	3,7
2 000	21 060	10,5	8 400	4,2	—	—	4 710	2,4
3 000	22 100	7,4	9 380	3,1	—	—	5 750	1,9
4 000	23 130	5,8	1 040	2,6	—	—	6 780	1,7
5 000	24 120	4,8	—	—	—	—	7 790	1,6
6 000	25 130	4,2	—	—	—	—	8 790	1,5

Tabela 2. 80. **Permeabilitatea relativă a fierului şi oţelului în cîmpuri slabe**

Valorile permeabilităţii magnetice μ sînt date la variaţia lui H între 0,01 şi 0,2 Oe pentru: fier electrolitic, care nu a fost recopt, oţel de dinam nerecopt, recopt o dată şi recopt de două ori.

Tabela 2.80

H	μ			
	fier nerecopt	Oţel		
		nerecopt	recopt o dată	recopt de două ori
0,01	300	413	522	351
0,03	420	437	586	433
0,05	560	463	650	540
0,10	975	532	786	872
0,15	1 500	590	912	1 390
0,20	2 100	638	1 040	3 030

T a b e l a 2.81. **Magnetizarea la saturație în funcție de temperatură**

În tabelă este dată magnetizarea specifică I a corpurilor feromagnetice în stare de saturație la diferite temperaturi. Valorile I sînt date pentru: fier electrolitic; cobalt, nichel și magnetită Fe_3O_4. Temperaturile sînt date în tabelă în °C.

T a b e l a 2.81

Fe		Co		Ni		Fe_3O_4	
t[°C]		t[°C]	I	t[°C]	I	t[°C]	I
−188	221	−188	168	20	54,6	−253	99
− 78	219	17	166	79	52,6	− 79	97
16	216	205	161	128	50,4	17	93
105	213	324	157	173	47,7	116	88
181	210	362	156	216	44,3	216	81
265	206	437	153	257	39,3	316	72
337	201	470	151	278	37,0	409	61
426	192	510	149	316	29,6	497	46
499	184	614	143	334	24,4	540	33
526	179	641	141	341	21,4	557	26
562	173	693	137	347	18,8	568	18
603	162	748	132	353	15,6	573	13
630	155	803	125	358	12,0	578	0
656	144	844	120	362	9,4		
682	131	918	109	365	7,3		
700	120	971	99	369	5,6		
747	84	1 016	88	373	4,4		
751	75	1 068	72	376	3,6		
759	62	1 090	62	380	3,0		
761	59	1 133	32	388	2,2		
769	40	1 144	21	395	1,7		
772	24	1 149	18	406	1,7		

T a b e l a 2.82. **Punctul de transformare magnetică (punctul Curie)**

În tabelă sînt date valorile aproximative ale temperaturii (punctului) de transformare magnetică pentru elementele feromagnetice principale: fier, cobalt și nichel, precum și pentru unele aliaje și combinații chimice ale acestora.

Tabela 2.82

	Punctul Curie t[°C]		Punctul Curie t[°C]
Fier silicios (4,3%Si)	690	Fier	770±10
Cobalt Co	1 180±20	Aliaje	
Nichel Ni	355± 5	70% Fe+30% Ni	aprox. 70
Magnetită Fe_3O_4	572± 7	49% Fe+49% Co +2% V	980
Carbură de fier Fe C (cementit)	212	70%Ni+30%Cu	10–100
Gadoliniu	16	Aliajul lui Geisler	
Aliaje		61%Cu+26%Mn+ +13% Al	330
22% Fe+78%Ni	550		
50% Fe+50%Ni	420		

Tabela 2.83. **Componenta orizontală a magnetismului terestru**

Valorile componentei orizontale H a magnetismului terestru sînt date în sistemul $CGS\mu_0$ pentru latitudinile nordice în intervalul de la 45° la 55°.

Tabela 2.83

Latitudinea nordică (în grade)	Longitudinea estică după meridianul Greeniwch (în grade)										
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
45	0,215	0,216	0,217	0,218	0,219	0,220	0,221	0,222	0,223	0,225	0,226
46	0,210	0,211	0,212	0,212	0,213	0,214	0,215	0,216	0,217	0,219	0,221
47	0,205	0,206	0,206	0,207	0,209	0,209	0,210	0,211	0,213	0,214	0,216
48	0,201	0,202	0,202	0,203	0,204	0,205	0,206	0,207	0,209	0,210	0,211
49	0,197	0,198	0,198	0,199	0,200	0,201	0,202	0,203	0,204	0,205	0,207
50	0,192	0,193	0,193	0,194	0,195	0,196	0,197	0,198	0,199	0,201	0,203
51	0,187	0,188	0,188	0,189	0,190	0,191	0,192	0,193	0,194	0,195	0,197
52	0,183	0,184	0,184	0,185	0,186	0,187	0,188	0,189	0,190	0,191	0,192
53	0,180	0,181	0,181	0,182	0,183	0,183	0,184	0,185	0,186	0,186	0,187
54	0,176	0,177	0,177	0,178	0,178	0,179	0,180	0,182	0,183	0,183	0,183
55	0,172	0,173	0,173	0,174	0,175	0,175	0,176	0,176	0,177	0,178	0,179

Tabela 2.84. **Constanta dielectrică (permitivitatea relativă) a corpurilor solide, lichide și gazoase**

În tabelă sînt date valorile constantei dielectrice (permeabilității dielectrice) ε a unor corpuri solide, lichide și gazoase pentru cîmpuri electrice constante sau pentru frecvențe joase, cînd lungimea de undă poate fi considerată practic infinit de mare. Corpurile gazoase se

presupun că se află la presiune atmosferică normală. Sînt indicate temperaturile la care se referă valorile.

Tabela 2.84

Substanța	t[°C]	ε	Substanța	t[°C]	ε
Acetat de amil	18	4,8	Porțelan	18	5,0–6,8
Acetonă	20	21,5	Rutil ∥ cu axa	20	86
Alcool etilic	14,7	26,8	Rutil ⊥ față de axă	20	170
Alcool metilic	13,4	35,4	Sare gemă	20	5,6
Anilină	18	7,3	Silvină	18	4,9
Asfalt	18	2,7	Sticlă crom	18	5–9
Apatit	18	8,5	Sticlă de oglinzi	18	6–7
Apă	18	80,4	Sticlă flint	18	7–10
Bachelită	18	3–5	Sulf	18	3,6–4,3
Balsam de Canada	18	3,7	Sulfură de carbon	20	2,6
Benzen	18	2,3	Șelac	18	3,1–3,7
Bioxid de titan	18	40–80	Terebentină	20	2,2
Brom	5	3,1			
Ceară de albine	18	2,5–3,0	Tetraclorură de carbon	18	2,2
Chihlimbar	18	2,7–2,9	Titanat de bariu	20	1 200
Celuloid	18	4,1	Toluen	14,4	2,4
Cloroform	22	5,2			
Cuarț cristalin	18	4,5	Turmalină ∥ cu axa	18	6,0
Cuarț topit	18	3,5–4,1	Ulei de măsline	21	3,2
Diamant	18	16,5	Ulei de parafină	20	4,7
Ebonită	18	2,5–2,8	Ulei de ricin	10,9	4,6
Eter etilic	18	4,3			
Fildeș	18	6,9	Ulei de transformator	18	2,2–2,5
Getinax (material izolant)	18	3,5–5,0	*m*-Xilen	18	2,4
Gheață	–18	3,2			
Glicerină	15	39,1	*Gaze:*		
Hîrtie	18	2,5–3,0			
Lemn	18	2,2–3,7	Aer	0	1,000590
Marmură	18	8,3		19	576
Mase ceramice speciale care conțin BO și TiO_2	18	1 000–10 000	Azot	0	606
				20	581
			Bioxid de carbon	0	946
			Heliu	0	068
Mică	18	5,7–7,0	Hidrogen	0	264
Nitrobenzen	18	36,4		20	273
Parafină	20	2,0–2,5	Metan	0	953
Petrol (petrol lampant)	21	2,1	Oxid de carbon	0	690
			Oxigen	0	524

Tabela 2.85 a și b. **Tensiunile electromotoare ale elementelor galvanice**

Etalonul tensiunii electromotoare se consideră în prezent tensiunea electromotoare a unui element galvanic de cadmiu (element Weston), care se formează după schema: catod-cadmiu metalic Cd (sub forma unui amalgam de 12% mercur); electrolit — soluție apoasă saturată de sulfat de cadmiu $CdSO_4$; anod—mercur metalic Hg; depolarizator Hg_2SO_4.

Tensiunea electromotoare a unui element normal de cadmiu, care la 20 °C se ia egală cu 1,01830 V, are un coeficient de temperatură mic, dar totuși apreciabil. Dependența tensiunii electromotoare a elementului de cadmiu de temperatură este dată în tabela 2.85 a.

Tabela 2.85 a

t[°C]	T.e.m[V]	t[°C]	T/e.m.[V]	t[°C]	T.e.m.[V]
0	1,01911	15	1,01850	30	1,01789
5	1,01891	20	1,01830	35	1,01769
10	1,01871	25	1,01810	40	1,01748

Ca surse locale de curent se folosesc acumulatorii și unele elemente galvanice. Se cunosc în prezent trei tipuri de acumulatori.

1. Acumulatorii cu plumb: catodul — plumb, electrolitul — soluția apoasă de acid sulfuric H_2SO_4 (densitatea 1,2—1,3 g/cm³), anodul-peroxid de plumb Pb_2O_5; tensiunea electromotoare: maximă la încărcare pînă la 2,6 V, în stare de lucru 2,5 pînă la 2,0 V; nu trebuie admisă scăderea tensiunii electromotoare sub 1,8 V.

2. Acumulatorii cu fier-nichel: catodul-fier; electrolitul soluție de 20% KOH; anodul — Ni_2O_3; tensiunea electromotoare: la încărcare pînă la 1,8 V, la funcționarea acumulatorului scade treptat; descărcarea pînă la 1,1—1,0 V (și mai jos) este suportată de acumulator fără deteriorări.

3. Acumulatorii cu cadmiu-nichel: catodul — cadmiu în amestec cu fierul; electrolitul — soluție de 20% KOH; anodul — $Ni(OH)_3$; tensiunea electromotoare este aceeași ca la acumulatorul fier-nichel.

Unele elemente galvanice folosite în prezent sînt date în tabela 2.85 b, separat elementele cu un electrolit și separat elementele cu doi electroliți. În tabelă sînt date: schemele elementelor (catod-anod-electrolit), valorile aproximative ale tensiunii electromotoare (în V) la 18°C; este menționat de asemenea numele savantului care a propus elementul respectiv. Dacă în element se folosește depolarizator, atunci acesta este menționat; sînt introduse prescurtările: dp — depolarizator; v.p. — vas poros.

Tabela 2.85 b

	Catod	Anod	Electrolit	E(V)
			Elemente cu un singur electrolit	
Volta	Zn	Cu	Soluţie H_2SO_4	~1,0
Grenet [1]	Zn	C	H_2SO_4 dp $K_2Cr_2O_7$	~2,0
Delarive	Zn	Pt	H_2SO_4 v.p., dp PbO_3	~2,4
Clerck [2]	Zn	Hg	saturată $ZnSO_4$,dp.Hg_2SO_4	1,433
Leclanché [3]	Zn	C	NH_4Cl, dp. MnO_2	~1,5
			Elemente cu doi electroliţi	
Botton	Zn	C	Soluţie $ZnCl_2$,v.p.,soluţie HCl	~3,0
Bunsen	Zn	C	H_2SO_4, v.p., HNO_3	~1,9
d'Arsonval	Zn	C	$ZnSO_4$, v.p., soluţie $CuSO_4$	~2,7
Danielle	Zn	Cu	$ZnSO_4$, v.p., soluţie $CuSO_4$	1,09
Poggendorf	Zn	C	H_2SO_4, v.p., soluţie $K_2Cr_2O_7$	~2,0
Fleming [4]	Zn	C	$ZnSO_4$, v.p., soluţie $CuSO_4$	1,07

Note la tabela 2.85 b. [1]) Zincul în elementul Grenet se amalgamează de obicei; se recurge deseori la această operaţie şi la alte elemente. [2]) Elementul Clerck a fost folosit timp îndelungat ca element normal, însă mai tîrziu s-a dat prioritate elementului cu cadmiu, Weston, care are un coeficient de temperatură al tensiunii electromotoare mult mai mic. [3]) Aşa-numitele elemente uscate, care se folosesc pe scară foarte largă, sînt în majoritate elemente Leclanché, în care spaţiul dintre electrozi se umple cu o masă neutră poroasă (rumeguş de lemn, ipsos, nisip), înmuiată în electrolit Leclanché adică într-o soluţie de ţipirig. [4]) Elementul Fleming, care diferă de elementul Danielle numai prin densitatea foarte constantă a ambilor electroliţi, a fost un timp considerat element normal, datorită tensiunii electromotoare foarte constante.

Tabelele 2.86 a, b, c şi d. **Tensiuni termoelectromotoare**

În tabela 2.86 a sînt date valorile tensiunii termoelectromotoare E ale unei serii de metale în raport cu platina, pentru diferenţa de temperaturi de 100 °C. Se presupune că o sudură a termocuplului (platină-metal) se află la 0 °C, iar cealaltă ramură la 100 °C. Semnul pozitiv înseamnă că prin sudura care se află la 0 °C curentul trece de la metal la platină. Metalele sînt ordonate după valorile descrescătoare ale tensiunii termoelectromotoare; aceste valori sînt exprimate în milivolţi. Deosebirile posibile la datele pentru unele metale se explică prin variaţia probelor cercetate.

În tabela 2.86 b sînt date valorile tensiunii electromotoare a termocuplului normal Le Chatelier şi ale termocuplului Rh — PtRh. Valorile mai exacte ale tensiunii electromotoare a termocuplului

normal Le Chatelier Pt-Pt 10% Rh în intervalul de temperaturi 0–1700 °C sînt date în tabela 2.86 c.

În tabela 2.86 d sînt date valorile tensiunii electromotoare ale unor termocupluri de lucru.

Tabela 2.86 a

Metalul termocuplului platină-metal	E[mV]	Metalul termocuplului platină-metal	E[mV]	Metalul termocuplului platină-metal	E[mV]
Bismut ⊥ pe		Cărbune el.	+0,30	Argint	+0,79
axă	−5,2	Tantal	+0,34	Cupru	+0,77
Bismut ‖ cu axa	−7,7	Tantal	+0,51	Cupru	+0,75
Copel [1])	−4,0	Aluminiu	+0,40	Iridiu	+0,68
Constantan	−3,43	Aluminiu	+0,41	Iridiu	+0,65
Constantan	−3,47	Staniu	+0,44	Aur	+0,78
Cobalt	−1,69	Staniu	+0,42	Aur	+0,80
Nichel	−1,50	Magneziu	+0,40	Potasiu	+0,86
Nichel	−1,52	Magneziu	+0,43	Potasiu	+0,95
Potasiu	−0,94	Plumb	+0,44	Wolfram	+0,90
Potasiu	−0,83	Plumb	+0,46	Wolfram	+0,79
Paladiu	−0,28	Cesiu	+0,50	Molibden	+1,31
Paladiu	−0,30	Iridiu	+0,65	Molibden	+1,22
Paladiu	−0,32	Iridiu	+0,68	Litiu	+1,39
Sodiu	−0,21	Rodiu	+0,65	Fier moale	+1,89
Sodiu	−0,25	Taliu	+0,59	Fier dur	+1,87
Rubidiu	−0,19	Manganin	+0,57	Nicrom	+2,20
Mercur	−0,07	Manganin	+0,82	Stibiu	+4,86
Platină	0	Zinc	+0,60	Siliciu	+44,8
Grafit	+0,22	Zinc	+0,79	Sulfură de	
Cărbune el.	+0,25	Argint	+0,74	telur	+50

Tabela 2.86 b

t[°C]	Termocuplul Le Chatelier Pt-PtRh		Termocuplul Rh-PtRh		t[°C]	Termocuplul Le Chatelier Pt-PtRh		Termocuplul Rh-PtRh	
	E [mV]	$\frac{dE}{dt}$ [μV/°C]	E [mV]	$\frac{dE}{dt}$ [μV/°C]		E [mV]	$\frac{dE}{dt}$ [μV/°C]	E [mV]	$\frac{dE}{dt}$ [μV/°C]
0	0,00		0,00		400	2,26	9,3	0,57	2,8
20	0,11	6,5	—	—	500	4,23	9,7	0,95	3,8
100	0,65		0,001	0,1	600	5,24	10,1	1,40	4,5
200	1,44	7,9	0,12	1,2	700	6,27	10,3	1,96	5,6
300	2,33	8,9	0,29	1,7	800	7,34	10,7	2,62	6,6

Tabela 2.86 b *(continuare)*

Ct°	Termocuplul Le Chatelier Pt-PtRh		Termocuplul Rh-PtRh		t [°C]	Termocuplul Le Chatelier Pt-PtRh		Termocuplul Rh-PtRh	
	E [mV]	$\frac{dE}{dt}\left[\frac{\mu V}{°C}\right]$	E [mV]	$\frac{dE}{dt}\left[\frac{\mu V}{°C}\right]$		E [mV]	$\frac{dE}{dt}\left[\frac{\mu V}{°C}\right]$	E [mV]	$\frac{dE}{dt}\left[\frac{\mu V}{°C}\right]$
900	8,47	11,3	3,37	7,5	1 350	—	12,1	—	11,2
1 000	9,61	11,4	4,21	8,4	1 400	14 36	—	8,39	—
1 100	10,77	11,6	5,16	9,5	1 500	15,56	12,0	9,55	11,4
1 200	11,96	11,9	6,22	10,6	1 600	16,73	11,7	—	—
1 300	13,15	11,9	7,27	10,5					

Termocuplul normal Le Chatelier (Pt-Pt 10% Rh) a fost recomandat de Comitetul electrotehnic internaţional ca aparat de bază pentru măsurarea exactă a temperaturilor înalte (pînă la 1 500 °C). Totuşi, fiind un aparat foarte scump, termocuplul normal nu se foloseşte de obicei la măsurări, ci este utilizat în special pentru verificarea indicaţiilor termocuplurilor de lucru, care se folosesc pentru măsurări directe.

În tabelă, temperaturile sînt date în grade Celsius, tensiunile electromotoare în microvolţi. Sudura rece se presupune la 0 °C.

Tabela 2.86 c

t[°C]	0	20	40	60	80	100
0	0	112	233	363	499	642
100	642	791	945	1 104	1 268	1 435
200	1 435	1 605	1 778	1 954	2 133	2 314
300	2 314	2 498	2 683	2 871	3 059	3 249
400	3 249	3 440	3 633	3 827	4 023	4 220
500	4 220	4 419	4 619	4 820	5 022	5 226
600	5 226	5 432	5 638	5 846	6 055	6 265
700	6 265	6 477	6 691	6 906	7 122	7 339
800	7 339	7 558	7 778	7 999	8 222	8 446
900	8 446	8 672	8 900	9 129	9 359	9 591
1 000	9 591	9 823	10 055	10 289	10 523	10 757
1 100	10 757	10 993	11 229	11 467	11 706	11 946
1 200	11 946	12 187	12 428	12 670	12 912	13 155
1 300	13 155	13 399	13 642	13 886	14 128	14 371
1 400	14 371	14 613	14 885	15 097	15 339	15 580
1 500	15 580	15 820	16 060	16 298	16 534	16 770
1 600	16 770	17 004	17 236	17 466	17 695	17 922

Tabela 2.86 d. **Unele termocupluri de lucru**

(În sudura principală curentul trece de la conductorul 1 la conductorul 2).

t[°C]	Constantan1)-Cu		Constantan-Ag		Constantan-Fe		Nichel-cărbune		Nichel-aliaj Cr-Ni		Constantan-aliaj Cr-Ni	
	E [mV]	$\frac{dE}{dt}\left[\frac{\mu V}{°C}\right]$	E [mV]	$\frac{dE}{dt}\left[\frac{\mu V}{°C}\right]$	E [mV]	$\frac{dE}{dt}\left[\frac{\mu V}{°C}\right]$	E [mV]	$\frac{dE}{dt}\left[\frac{\mu V}{°C}\right]$	E [mV]	$\frac{dE}{dt}\left[\frac{\mu V}{°C}\right]$	E [mV]	$\frac{dE}{dt}\left[\frac{\mu V}{°C}\right]$
− 200	− 5,46	21,4	—	—	− 7,50	31,0	—	—	—	—	—	
− 100	− 3,32	33,2	—	—	− 4,40	44,0	—	—	—	—	—	
0	0,0		0,0		0,0	—	—	—	0,0		0,0	
20	0,76	41	0,78	44,2	—	—	0,0	22,0	0,82	40,6	1,25	56,2
100	4,1	47	4,12	42,2	5,15	51,5	1,76	24,1	4,07	40,5	5,62	64,2
200	8,8	53	8,84	52,6	10,48	53,5	4,17	23,7	8,12	41,0	11,08	70,1
300	14,1	58	14,10	56,7	15,77	52,9	6,54	18,4	12,22	41,0	19,09	73,9
400	19,9	64	19,77	60,2	20,96	51,9	8,38	19,0	16,32	43,0	26,48	77,0
500	26,3	—	25,79	63,6	26,12	51,6	10,28	22,2	20,62	42,5	34,18	77,7
600	—	—	32,15		31,47	53,5	12,50	27,9	24,87	42,5	41,95	80,7
700	—	—			37,15	56,8	15,29	30,1	29,12	40,0	50,02	79,2
800	—	—			43,25	61,0	18,30	35,0	33,12	41,5	57,94	78,2
900	—	—			49,26	61,1	21,80	38,3	37,27	41,8	65,76	—
1 000	—	—			—		25,63	41,6	41,45	41,7	—	—
1 100	—	—			—		29,79	45,6	45,62	41,5	—	—
1 200	—				—		34,35		49,77		—	

Notă la tabela 2.86. [1]) Aliajul de cupru şi nichel are compoziţia 56,5% Cu + 43,5% Ni.

Tabelele 2.87 a şi b. Rezistenţa specifică (rezistivitatea) a corpurilor solide

În tabele sînt date valorile rezistenţei specifice ρ a unor metale (tabela 2.87 a) şi a unor izolatori (tabela 2.87 b) la temperatura de 18—20 °C, exprimate în ohmi·cm. Mărimea ρ pentru metale depinde foarte mult de impurităţi. În tabelă sînt date valorile lui ρ pentru metale chimic pure. Valorile lui ρ pentru izolatori sînt date aproximativ. Metalele şi izolatorii sînt aranjate în tabelă în ordinea valorilor crescătoare ale lui ρ.

Tabela 2.87 a

	10^4 ρ [Ω·cm]		10^4 ρ [Ω·cm]		10^4 ρ [Ω·cm]
Argint	0,016	Nichel	0,070	Argentan	0,42
Cupru	0,017	Cadmiu	0,076	Nichelină	0,33
Aur	0,023	Alamă	0,08	Manganin	0,43
Aluminiu	0,029	Cobalt	0,097	Constantan	0,49
Duraluminiu	0,0335	Fier	0,10	Aliajul lui Wood [3]	0,52(0°)
Magneziu	0,044	Paladiu	0,107	Osmiu	0,602
Calciu	0,046	Platină	0,110	Aliajul lui Rose [4]	0,64(0°)
Sodiu	0,047	Staniu	0,113	Cromel	0,70—
Mangan	0,05	Crom	0,131		—1,10
Iridiu	0,063	Tantal	0,146	Invar	0,81
Wolfram	0,053	Bronz [1]	0,18	Mercur	0,958
Molibden	0,054	Toriu	0,18	Nicrom [5]	1,10
Rodiu	0,047	Plumb	0,208	Bismut	1,19
Zinc	0,061	Platinit [2]	0,45	Fecral [6]	1,20
Potasiu	0,066	Stibiu	0,405	Grafit	8,0

Tabele 2.87 b

	ρ [Ω·cm]		ρ [Ω·cm]		[Ω·cm]
Azbest	10^8	Sticlă cu sodiu	10^{12}	Şelac	10^{16}
Ardezie	10^8	Sticlă pirex	10^{14}	Colofoniu	10^{16}
Lemn uscat	10^{10}	Cuarţ cu axa ∥	10^{14}	Cuarţ cu axa ⊥	$3 \cdot 10^{16}$
Marmură	10^{10}	Cuarţ topit	$2 \cdot 10^{14}$	Sulf	10^{17}
Celuloid	$2 \cdot 10^{10}$	Mică	10^{15}	Polistiren	10^{17}
Bachelită	10^{11}	Micanit	10^{15}	Ebonită	10^{18}
Getinax	$5 \cdot 10^{11}$	Porţelan	$2 \cdot 10^{15}$	Parafină	$3 \cdot 10^{18}$
Diamant	10^{12}	Ceară roşie	$5 \cdot 10^{15}$	Chihlimbar	10^{19}

Note la tabelele 2.87. [1]) Aliaj cu 88 % Cu + 12 % Sn. [2]) Aliaj cu compoziţia: 62 % Cu + 15 % Ni + 22 % Zn. [3]) Aliaj cu compoziţia: 50 % Bi + 25 % Pb + 12,5 % Sn + 12,5 % Cd. [4]) Aliaj cu compozitia: 50 % Bi + 27,1 % Pb + 22,9 % Sn. [5]) Aliaj Ni şi Cr în compoziţia: 80 % Ni + 20 % Cr; idem aliaj cu compoziţia: 67,5 % Ni + 15 % Cr + 16 % Fe + 1,5 % Mn. [6]) Aliaj cu compoziţia: 78 % Fe + 17 % Cr + 5 % Al.

Tabela 2.88. **Coeficientul termic de rezistență al metalelor pure și aliajelor**

Dependența rezistenței R a metalelelor de temperatură se determină pe baza formulei

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t) \tag{2.97}$$

Tabela 2.88

	t[°C]	α [°C^{-1}]		t[°C]	α [°C^{-1}]
Metale pure:			Sodiu	18	44
Aluminiu	18—100	0,0038	Staniu	20	42
Argint	0—100	36	Stibiu	18	36
Aur	0—100	34—25	Stronțiu	18	38
Bismut	18	40	Tantal	0—100	35
Cadmiu	18—100	42	Wolfram	0—170	51
Calciu	18	33	Zinc	20	37
Cobalt	0—160	66	*Aliaje*		
Cupru	18	43	Alamă [5]	15	0,0010
Fier	45	62	Idem [6]	15	0,0020
Indiu	18	47	Aliajul lui Rose	0	0,0020
Iridiu	18	39	Aliajul lui Wood	20	0,0037
Litiu	18	47	Aliajul CuMn [7]	—	0,00022
Litiu	230	52	Aliajul PtIr [8]	0	0,0008
Magneziu	18	39	Aliajul PtRh [9]	0	0,00013
Mercur	0—25	09	Alpaca	18	0,0003
Molibden	0—110	43	Bronz [2]	20	0,0005
Nichel	0—100	62	Bronz pe bază de		
Osmiu	18	42	aluminiu [3]	—	0,00102
Paladiu	18—100	37	Idem [4]	—	0,00320
Platină	0—100	38	Constantan	25	0,00002
Plumb	18	0,0042	Manganin [1]	18	0,00001
Potasiu	18	51	Nicrom	20	0,0004
Rodiu	18	44	Platinit	0	0,003

Note la tabela 2.88. 1) Majoritatea probelor de constantan și manganin în domeniul temperaturilor camerei, au practic un coeficient termic de rezistență nul. Pentru unele probe ale acestor aliaje coeficientul de temperatură avea o valoare, care se află dincolo de limitele preciziei măsurărilor (a șasea zecimală). Totuși, această valoare infimă a lui α pentru constantan și manganin se observă numai în domeniul temperaturilor medii; la trecerea la temperaturi mai ridicate valoarea sa crește sensibil. Astfel, la 500°C, valoarea lui α pentru constantan devine 0,000027, iar pentru manganin 0,00011. 2) Aliaj cu compoziția: 88% Cu + 12% Sn. 3) Aliaj cu compoziția: 97 % Cu + + 3 % Al. 4) Aliaj cu compoziția: 90 % Cu + 10 % Al. 5) Aliaj cu compoziția: 60 % Cu + 40 % Zn. 6) Aliaj cu compoziția: 66 % Cu + + 34 % Al. 7) Aliaj cu compoziția: 96,5 % Cu + 3,5 % Mn. 8) Aliaj cu compoziția: 80% Pt + 20% Ir. 9) Aliaj cu compoziția: 90% Pt + + 10 % Rh.

unde R_t şi R_0 sînt rezistenţa metalului la temperaturile t respectiv 0°C şi α este coeficientul termic al rezistenţei, care pentru metale pure are valori apropiate de 0,00367 $°C^{-1}$, iar pentru aliaje are o valoare cu totul diferită.

În tabelă sînt date valorile lui α pentru unele metale şi aliaje şi sînt indicate temperaturile t(°C), cărora le corespund aceste valori.

Tabelele 2.89 a şi b. **Rezistenţa metalelor pure la temperaturi joase**

În tabela 2.89 a sînt date valorile rezistenţei specifice (în Ω·cm) a unor metale pure la temperaturi joase (0 °C). În tabela 2.89 b este dat raportul R_T/R_0 al rezistenţelor metalelor pure la temperaturile T şi 273 °K.

Tabela 2.89 a

	t[°C]	$10^4\rho$ [Ω·cm]		t[°C]	$10^4\rho$ [Ω·cm]
Argint	−258,6	0,00009	Fier	−252,7	0,00011
Aur	−252,8	0,00018	Mercur	−183,5	0,0697
Bismut	−200	0,348	Platină	−265	0,0010
Cupru	−258,6	0,00014	Plumb	−252,9	0,00009

Tabela 2.89 b

	T[°K]	R_T/R_0		T[°K]	R_T/R_0
Aluminiu	77,7	1,008	Molibden	77,8	0,1370
	20,4	0,0075		20,4	0,0448
Argint	78,8	0,1974	Nichel	78,8	0,0919
	20,4	0,0100		20,4	0,0066
Aur	78,8	0,2189	Platină	91,4	0,2500
	20,4	0,0060		20,4	0,0061
Bismut	77,8	0,3255	Plumb	73,1	0,2321
	20,4	0,0810		20,5	0,0301
Crom	80,0	0,1340	Staniu	79,0	0,2098
	20,6	0,0533		20,4	0,0116
Cupru	81,6	0,1440	Stibiu	77,7	0,2041
	20,4	0,0008		20,4	0,0319
Fier	78,2	0,0741	Zinc	83,7	0,2351
	20,4	0,0076		20,4	0,0087
Mercur	90,1	0,2851	Wolfram	78,2	0,1478
	20,4	0,4900		20,4	0,0317

T a b e l a 2.90. **Dependența rezistenței metalelor de presiune**

Variația ΔR a rezistenței metalelor din cauza presiunii poate fi reprezentată prin formula

$$\Delta R = R\,(Ap + Bp^2), \qquad (2.98)$$

unde R este rezistența metalului la presiune normală, p — presiunea, iar A și B coeficienți constanți, diferiți pentru diferite metale. De exemplu, pentru mangan și crom s-a găsit:

T a b e l a 2.90

Metalul	Formula
Mangan	$7{,}012 \cdot 10^{-6}\, p + 5{,}63 \cdot 10^{-11}\, p^2$
Crom	$5{,}8 \cdot 10^{-7}\, p$ (pentru crom $B = 0$)

T a b e l a 2.91. **Raportul dintre conductivitatea termică și conductivitatea electrică a metalelor**

În tabelă sînt date valorile mărimii $\lambda/\sigma T$ = const. (tabela 2.71) unde λ este conductibilitatea termică, exprimată în $W/cm \cdot {}^\circ K^{-1}$, σ este conductibilitatea electrică, exprimată în $\Omega^{-1} \cdot cm^{-1}$, iar T este temperatura absolută, ale cărei valori sînt date în tabelă separat.

T a b e l a 2.91

	T[°K]	$(\lambda/\sigma T)10^8$		T [°K]	$(\lambda/\sigma T)10^8$
Aluminiu	291,2	2,18	Mercur	196,2	2,55
	373,2	2,27		86,2	2,65
Argint	273,2	2,31	Nichel	373,2	2,28
	373,2	2,37	Platină	273,2	2,51
Aur	273,2	2,35		373,9	2,60
	373,8	2,40	Plumb	273,2	2,47
				373,2	2,56
Bismut	291,2	3,31	Staniu	291,2	2,52
	373,2	2,89		373,2	2,49
Cupru	273,2	2,23	Stibiu	273,2	2,83
	374,8	2,23		90,0	3,03
Fier	273,2	2,47	Zinc	293,2	2,56
Magneziu	273,2	2,47		83,2	2,04

Tabela 2.92. **Rezistenţa specifică a electroliţilor**

În tabela 2.92 a sînt date valorile rezistenţei specifice a electroliţilor în $\Omega \cdot cm$ la temperatura de 18 °C. Concentraţia c a soluţiilor este dată în %, care determină numărul de grame de sare deshidratată sau de acid în 100 g soluţie.

Tabela 2.92 a

c [%]	NH_4Cl	NaCl	$ZnSO_4$	$CuSO_4$	KOH	NaOH	H_2SO_4
5	10,9	14,9	52,4	52,9	5,8	5,1	4,8
10	5,6	8,3	31,2	31,3	3,2	3,2	2,6
15	3,9	6,1	24,1	23,8	2,4	2,9	1,8
20	3,0	5,1	21,3	–	2,0	3,0	1,5
25	2,5	4,7	20,8	–	1,9	3,7	1,4

În tabela 2.92 b sînt date valorile conductibilităţii electrice specifice a soluţiilor apoase de KCl şi NaCl la diferite temperaturi (în limitele 10–30 °C), exprimate în Ω^{-1} cm^{-1}. Soluţiile KCl sînt luate: normală, 1/10 normală şi 1/100 normală; soluţiile de clorură de sodiu se presupun saturate la toate temperaturile indicate în tabelă.

Tabela 2.92 b

Soluţia	10 °C	15 °C	20 °C	25 °C	30 °C
KCl norm.	0,08319	0,09252	0,10207	0,11180	–
KCl 1/10 n	0,00933	0,01048	0,01167	0,01288	0,1412
KCl 1/100 n	0,001020	0,001147	0,001278	0,001413	0,003036
NaCl	0,1779	0,2014	0,2259	0,2513	0,2774

Tabela 2.93. Echivalenţi electrochimici

În tabelă sînt date: cantitatea de metal în miligrame şi volumul de gaz detonant în cm³, care se degajă la un curent de 1 amper în timp de o secundă, 1 minut şi o oră.

Tabela 2.93

	Ag [mg]	Cu [mg]	H_2 [mg]	Gaz detonant [cm³]
În timp de 1 secundă	1,118[1])	0,3294	0,01036	0,1740
În timp de 1 minut	67,08	19,76	0,6215	10,44
În timp de 1 oră	4 025	1 186	37,29	626

Nota la tabela 2.93. 1) Conferinţa internaţională din anul 1908 de la Londra a pus echivalentul electrochimic al argintului la baza definiţiei adoptate atunci pentru amperul internaţional, şi anume, determinîndu-l drept curent de mărime constantă, care separă în voltametru dintr-o soluţie apoasă de azotat de argint, într-o secundă, 1,11800 miligrame argint (amper internaţional). În prezent s-a confirmat o altă definiţie a amperului (§ 2.1).

Tabela 2.94. Mobilitatea ionilor în apă

În electrochimie, mobilitatea u a ionilor se numeşte produsul dintre numărul lui Faraday şi aşa-numita viteză absolută v a ionilor în soluţii, care se exprimă în cm²/V·s şi corespunde mobilităţilor ionilor în gaze (v. tabela 2.95). Aşadar, putem scrie

$$u_a = v_a F \text{ şi } u_c = v_k F, \qquad (2.99)$$

unde u_a şi u_c sînt mobilităţile anionilor şi cationilor: v_a şi v_c sînt vitezele lor absolute; F — numărul lui Faraday.

Din aceste formule găsim că mobilitatea ionilor în soluţie se exprimă în cm²/Ω·echivalent-gram. În tabelă sînt date valorile mobilităţii unor ioni în soluţii apoase la 18°C pentru concentraţii c foarte slabe, ale căror valori în echivalenţi-gram la 1 litru este menţionată.

Tabela 2.94

c	Mobilitatea [cm²/echivalent/gram · Ω]							
	K	Na	Li	Cs	Ag	Cl	J	Br
0,0001	64,1	43,2	33,2	67,4	53,7	64,9	65,6	67,0
0,0002	64,0	43,0	33,0	67,2	53,4	64,8	65,5	66,8
0,0005	63,7	42,8	32,8	66,9	53,1	64,4	65,3	66,5
0,001	63,3	42,4	32,5	66,6	52,8	64,0	64,9	66,1
0,002	62,8	42,0	32,1	66,0	52,2	63,5	64,4	65,5
0,005	61,8	41,3	31,5	64,9	51,3	62,5	63,5	64,4
0,01	60,7	40,5	30,8	63,7	50,2	61,5	62,7	63,7
0,02	59,5	39,5	30,0	62,0	49,0	60,2	61,6	62,4
0,05	57,2	37,9	28,8	60,0	46,0	57,9	60,1	60,6
0,1	55,1	36,4	27,5	58,0	44,0	55,8	58,8	59,1

Tabela 2. 95. **Mobilitatea ionilor în gaze**

La mişcarea ionilor în gaze sub acţiunea unui cîmp electric constant valoarea medie $\bar{u}$ a vitezei lor în direcţia liniilor de forţă ale cîmpului este proporţională cu intensitatea sa E, adică se poate scrie

$$\bar{u} = KE. \quad (2.100)$$

Coeficientul de proporţionalitate $K = \bar{u}/E$ se numeşte mobilitatea ionilor în gaze; se obişnuieşte ca u să se exprime în cm/s, iar E în v/cm. Aşadar, K se exprimă în cm²/V·s, adică corespunde mărimii, care în electrochimie se numeşte viteza absolută de mişcare a ionilor în electroliţi (tabela 2.94).

În tabelă sînt date vitezele de mişcare $\bar{u}$ ale ionilor de gaz, pozitivi şi negativi pentru unele gaze, măsurate în cm/s. Intensitatea cîmpului se presupune egală cu 1 V/cm, presiunea gazului corespunde celei normale, temperatura este de 18 pînă la 20 °C. Este dată şi valoarea aproximativă a masei moleculare M a gazelor.

Tabela 2.95

	M	K^+	K^-		M	K^+	K^-
Aer	29	1,38	1,87	Hidrogen	2	6,70	7,95
Amoniac	17	0,74	0,80	Oxid de carbon	28	1,1	1,4
Azot	28	1,27	1,84				
Benzen	78	0,18	0,21	Oxigen	32	1,32	1,83
Bioxid de carbon	44	0,84	1,05	Protoxid de azot	44	0,82	0,90
Heliu	4	5,09	6,31				

§ 2.20. Optica

Tabela 2.96 **Strălucirea unor surse de lumină**

În tabelă sînt date valorile aproximative ale strălucirii unor surse de lumină, exprimate în stilbi (sb).

Tabela 2.96

Sursa de lumină	Strălucirea [sb]	Sursa de lumină	Strălucirea [sb]
Lumînare de parafină	0,5	Lămpi de luminescenţă	0,53—0,66
Lumînare Gefner	0,7	Arc electric	8 000—18 000
Lumînare din spermanţet	1,0	Idem, de putere mare	pînă la 100 000
Flacără de acetilenă	10,8	Surse naturale de lumină	
Lampă cu incandescenţă:		Soare cu cer senin:	
cu filament de cărbune	50—55	la zenit	165 000
cu filament de wolfram	1 200	la orizont	350
Idem, de proiecţie	2 500	Cer fără nori	0,8
Ştift Nernst (2,3 W/sb)	260	Cer înnorat	0,1
		Luna	0,25

Tabelele 2.97 a și b. **Linii intense de emisie**

În tabele sînt date pentru partea vizibilă a spectrului: 1) lungimile de undă λ ale liniilor spectrale intense, ale unor elemente în ångströmi (1 Å = 10^{-8} cm) (tabela 2.97 a); 2) liniile din spectrul neonului, exprimate în metri (tabela 2.97 b); în această tabelă sînt indicate de asemenea, aproximativ, culoarea și strălucirea relativă a liniilor.

Tabela 2.97a

Element	λ(Å)
Ag-Argint	4055,26
	4210,94
	4212,68
	4668,48
	5209,07
	5465,49
	5471,55
Ba-Bariu	4554,04
	4934,09
	5535,55
	5777,66
	6141,72
	6496,90
	6595,32
	7059,96
	7120,31
	7280,27
Ca-Calciu	4226,73
	4454,78
	4585,87
	6439,07
	7148,15
	7203,17
	7326,15
Cd-Cadmiu	4678,16
	4799,92
	5085,822
	6099,18
	6438,470

Element	λ(Å)
Cs-Cesiu	4555,35
	4593,18
	5844,7
	6212,87
	6586,51
	6723,28
	6870,45
	6973,29
	7228,53
Cu-Cupru	4022,66
	4062,70
	4530,82
	4586,95
	4651,13
	4704,70
	5105,543
	5153,251
	5218,202
	5700,24
	5782,159
	6920,06
	7570,09
H-Hidrogen	4101,737
	4340,429
	4340,497
	4861,280
	4861,358
	6562,711
	6562,847

Element	λ(Å)
He-Heliu	4026,189
	4471,482
	4713,144
	4921,930
	5015,680
	5875,625
	6678,150
	7065,70
	7281,35
Hg-Mercur	4046,56
	4347,50
	4358,343
	4398,62
	4487,48
	4825,62
	5460,742
	5769,598
	5790,659
	6100,36
	7301,68
K-Potasiu	4044,14
	4047,20
	5339,67
	5359,52
	5782,60
	5801,96
	6911,30
	6938,98
	7664,91
	7698,98

Element	λ(Å)
Li-Litiu	4132,29
	4602,86
	4971,99
	6103,64
	6240,1
	6707,846
Mg-Magneziu	4481,33
	5167,34
	5172,70
	5183,62
	5528,46
Na-Sodiu	4668,60
	4982,84
	5149,09
	5153,64
	5688,22
	5889,965
	5895,932
	6154,23
	6160,76
Ra-Radiu	4340,64
	5660,81
	6200,30
	6446,20
	6487,32
	6980,22
	7118,50
	7141,21
	7225,16

Element	λ(Å)
Rb-Rubidiu	4201,85
	4215,56
	5724,45
	6070,75
	6206,31
	6298,33
	7408,17
Sn-Staniu	4511,30
	4524,74
	5631,68
	5970,30
	6037,70
	6149,67
	6462,36
Tl-Taliu	4737,05
	5109,47
	5152,14
	5350,46
	5527,90
	5949,04
	6549,77
	6713,69
Zn-Zinc	4057,71
	4680,198
	4722,164
	4810,535
	5181,99
	6362,35

Tabela 2.97 b

Liniile din spectrul neonului	Strălucirea relativă	λ[mμ]	Liniile din spectrul neonului	Strălucirea relativă	λ[mμ]
Roşu strălucitor	10	640,2	Verde	6	540,0
Roşu deschis	10	614,3	Verde	8	533,0
Roşu-Oranj	5	594,5	Verde	5	503,1
Galben	20	585,3	Albastru-verde	8	484,9
Verde deschis	4	576,5			

Tabela 2.98. **Lungimile de undă ale unor linii Fraunhofer**

În tabelă sînt date valorile lungimilor de undă ale liniilor principale Fraunhofer ale spectrului solar, exprimate în ångströmi, notaţia lor şi elementul căruia aparţin.

Tabela 2.98

λ[Å]	Notaţie	Element	λ[Å]	Notaţie	Element
7620,5	*A*	Oxigen	5167	b_4	Fier-(magneziu)[1])
7594,1			4957,6	*c*	Fier
6869,9	*B*	Oxigen	4861,37	*F*	Hidrogen
6562,8	*C*	Hidrogen	4668	*d*	Fier
6278,1	α	Oxigen	4383,6	*e*	Fier
5895,93	D_1	Sodiu	4340,4	*G'*	Hidrogen
5889,97	D_2	Sodiu	4325,8	—	Fier
5875,62	D_3	Heliu	4307,9	*G*	Fier (calciu)[2])
5269,56	*E*	Fier	4226,7	*g*	Calciu
5183,62	b_1	Magneziu	4101,8	*h*	Hidrogen
5172,7	b_2	Magneziu	3968,4	*H*	Calciu
5169,0	b_3	Fier	3933,6	*K*	Calciu

Note la tabela 2.98 1). Liniile apropiate: 5167,49 (Fe) şi 5167,34 (Mg). 2) Liniile apropiate: 4307,91 (Fe) şi 4307,74 (Ca).

Tabela 2.99. **Benzile de absorbţie ale bioxidului de carbon şi vaporilor de apă în partea infraroşie a spectrului**

În tabelă este dată valoarea maximelor benzilor de absorbţie din infraroşu ale bioxidului de carbon şi vaporilor de apă în partea infraroşie a spectrului (pînă la 15 μ); toate valorile lungimilor de undă sînt exprimate în microni.

Tabela 2.99

Bioxid de carbon	2,71 (slab)		4,27 (tare)		14,7 (tare)	
Vapori de apă	0,944	2,898	3,402	7,44	8,73	11,24
	1,128	2,948	3,463	7,58	8,99	11,47
	1,157	2,997	4,98	7,75	9,30	11,66
	1,367	3,028	5,04	7,88	9,50	11,89
	1,411	3,070	5,18	8,04	9,74	12,42
	1,480	3,112	5,24	8,17	9,98	12,82
	1,843	3,194	6,42	8,23	10,30	13,34
	1,870	3,245	6,49	8,36	10,66	13,62
	1,904	3,295	6,56	8,42	10,80	14,32
	1,985	3,340	6,61	8,51	10,94	14,98

Tabela 2.100. **Absorbţia radiaţiilor infraroşii de către cuarţ**

Absorbţia radiaţiilor lumnioase la incidenţă normală pe un strat absorbant este determinată de formula

$$I = I_0 e^{-kx}, \tag{2.101}$$

unde I_0 şi I sînt valorile intensităţii radiaţiilor, atunci cînd cad asupra corpului şi respectiv după trecerea prin el; x este grosimea stratului absorbant, iar k coeficientul de absorbţie, care se calculează de obicei pentru plăci de 1 cm grosime.

În tabelă sînt date valorile lui k pentru o radiaţie obişnuită din intervalul spectral de la 2,72 la 4,50 μ; pentru radiaţii cu lungimea de undă mai mare decît 6 μ, cuarţul poate fi considerat practic netransparent.

Tabela 2.100

λ [μ]	2,72	2,83	2,95	3,07	3,17	3,38	3,67	3,82	3,96	4,12	4,50
k	0,20	0,47	0,57	0,31	0,20	0,15	1,26	1,61	2,04	3,41	7,30

Tabela 2.101. **Reflexia luminii de către metale**

Coeficientul de reflexie r al razelor luminoase la incidența normală pe o suprafață de oglindă este dat de formula

$$r = I/I_0, \qquad (2.102)$$

unde I_0 și I sînt intensitățile razelor incidente și reflectate.

În tabelă sînt date valorile r, exprimate în procente pentru unele lungimi de undă în partea vizibilă a spectrului; lungimile de undă se exprimă în milimicroni.

Tabela 2.101

λ [mμ]	Aliaj lucios	Oțel	Ni	Cu	Pt	Au	Ag
420	83,3	51,9	56,6	32,7	51,8	29,3	86,6
450	83,4	54,4	59,4	37,0	54,7	33,1	90,5
500	83,3	54,8	60,8	43,7	58,4	47,0	91,3
550	82,7	54,9	62,6	47,7	61,1	74,0	92,7
600	83,0	55,4	64,9	71,8	64,2	84,4	93,6
650	82,7	56,4	66,6	80,0	66,5	88,9	94,7
700	83,3	57,6	68,8	83,1	69,0	92,3	95,4

Tabela 2.102. **Indicii de refracție ai cristalelor**

În tabelă sînt date valorile indicilor de refracție ai unor cristale la 18 °C pentru radiațiile din partea vizibilă a spectrului, ale căror lungimi de undă se referă la linii spectrale determinate. Elementele, cărora le aparțin aceste linii, sînt menționate; sînt indicate de asemenea valorile aproximative ale lungimilor de undă λ ale acestor linii în ângströmi; valorile mai exacte ale lungimilor lor de undă sînt date în tabela 2.97.

Tabela 2.102

λ[Å]	Spat de Islanda		Fluorină	Sare gemă	Silvină
	Raza ordinară	Raza extraordinară			
6708 (Li, roșu)	1,6537	1,4843	1,4323	1,5400	1,4866
6563 (H, roșu)	6544	4846	4325	5407	4872
6438 (Cd, roșu)	6550	4847	4327	5412	4877
5893 (Na, galben)	6584	4864	4339	5443	4904
5461 (Hg, verde)	6616	4879	4350	5475	4931
5086 (Cd, verde)	6653	4895	4362	5509	4961
4861 (H, verde)	6678	4907	4371	5534	4983
4800 (Cd, albastru)	6686	4911	4379	5541	4990
4047 (Hg, violet)	6813	4969	4415	5665	5097

T a b e l a 2.103. **Indicii de refracție ai sticlei**

În tabelă sînt date valorile indicilor de refracție ai liniilor *C*, *D* și *F* (tabela 2.98), ale căror lungimi de undă sînt aproximativ egale cu: 0,6563 μ, 0,5893 μ și 0,4861 μ (tabela 2.98).

T a b e l a 2.103

	Notația	n_C	n_D	n_F
Cron borosilicat	516/641	1,5139	1,5163	1,5220
Cron	518/589	1,5155	1,5181	1,5243
Silex ușor	548/459	1,5445	1,5480	1,5565
Barit cron	659/560	1,5658	1,5688	1,5759
Barit cron	572/576	1,5697	1,5726	1,5796
Silex ușor	575/413	1,5709	1,5749	1,5848
Silex de barit ușor	579/539	1,5763	1,5795	1,5871
Cron greu	589/612	1,5862	1,5891	1,5959
Cron greu	612/586	1,6095	1,6126	1,6200
Flint	512/369	1,6081	1,6129	1,6247
Flint	617/365	1,6120	1,6169	1,6290
Flint	619/363	1,6150	1,6199	1,6321
Flint	624/359	1,6192	1,6242	1,6366
Flint de barit greu	626/391	1,6213	1,6259	1,6379
Flint greu	647/339	1,6421	1,6475	1,6612
Flint greu	672/322	1,6666	1,6725	1,6874
Flint greu	755/275	1,7473	1,7550	1,7747

T a b e l a 2.104. **Indicii de refracție ai cuarțului pentru partea vizibilă a spectrului**

În tabelă sînt date valorile indicilor de refracție ai razelor ordinară (n_0) și extraordinară (n_e) pentru intervalul spectral de aproximativ 0,4—0,7 μ.

T a b e l a 2.104

λ[μ]	n_o	n_e	Cuarț topit	λ[μ]	n_o	n_e	Cuarț topit
0,404656	1,557356	1,56671	1,46968	0,533852	1,546799	1,555996	1,46067
0,434047	1,553963	1,563405	1,46690	0,546072	1,546174	1,555350	1,46013
0,435834	1,553790	1,563225	1,46675	0,58929	1,544246	1,553355	1,45845
0,467815	1,551027	1,560368	1,46435	0,643874	1,542288	1,551332	1,45674
0,479991	1,550118	1,559428	1,46355	0,656278	1,541899	1,550929	1,45640
0,486133	1,549683	1,558979	1,46318	0,706520	1,540488	1,549472	1,45517
0,508582	1,548229	1,557475	1,46191				

Tabelele 2.105 a și b. Indicii de refracție ai lichidelor

În tabela 2.105 a sînt date valorile indicilor de refracție *n* ai lichidelor pentru raza cu lungimea de undă aproximativ egală cu 0,5893 μ (linia galbenă a sodiului); temperatura lichidului, la care s-au efectuat măsurările lui *n*, este menționată.

În tabela 2.105 b sînt date valorile indicilor de refracție *n* ai soluțiilor apoase de zahăr (la 20°C) în funcție de concentrația *c* a soluției (*c* indică procentul în greutate al zahărului în soluție).

Tabela 2.105 a

Lichidul	t[°C]	n	Lichidul	t[°C]	n
Acetat etilic	18	1,37216	Clorură de metilen	24	1,4237
Acetonă	19,4	1,35886	Diacetil	18	1,39331
Acid	20	1,37137	Eter etilic	20	1,3538
Alcool alilic	20	1,41345	Etil benzen	20	1,4959
Alcool amilic	13	1,414	Furfurol	20	1,52608
Alcool butilic	20	1,39931	Glicerină	20	1,4730
Alcool etilic	18,2	1,36242	Iodură de etil	20	1,5168
Alcool metilic	14,5	1,33118	Nitrobenzen	20	1,55291
Alcool propilic (n)	20	1,38543	Nitrotoluen (orto)	20,4	1,54739
Aldehidă acetică	20	1,3316	Paraaldehidă	20	1,40486
Anilină	20	1,5863	Pentan (izo)	20	1,3537
Anisol	22	1,5150	Pentan (n)	20	1,3575
Benzen	20	1,50112	Sulfură de carbon	18	1,62950
Bromoform	19	1,5980	Tetraclorură de carbon	15	1,45305
Bromură de etil	20	1,42386	Toluen	20	1,49693
Bromură de etilen	20	1,53789	Xilol (meta)	20	1,49722
Clorbenzen	20	1,52479	Xilol (orto)	20	1,50545
Cloroform	18	1,44643	Xilol (para)	20	1,49582
Clorpicrină	23	1,46075			

Tabela 2.105 b

c[%]	n	c[%]	n	c[%]	n	c[%]	n
0	1,330	10	1,3479	35	1,3802	60	1,4418
2	1,3359	15	1,3557	40	1,3997	65	1,4532
4	1,3388	20	1,3639	45	1,4096	70	1,4651
6	1,3418	25	1,3723	50	1,4200	75	1,4774
8	1,3448	30	1,3811	55	1,4307	80	1,4901

Tabela 2.106. Indicii de refracție ai apei

În tabelă sînt date valorile indicilor de refracție n ai apei la temperatura de 20 °C în intervalul aproximativ de lungimi de undă 0,3—1 μ.

Tabela 2.106

λ[μ]	n	λ[μ]	n	λ[μ]	n
0,3082	1,3567	0,4861	1,3371	0,6562	1,3311
0,3611	1,3474	0,5460	1,3345	0,7682	1,3289
0,4341	1,3403	0,5893	1,3330	1,028	1,3245

Tabela 2.107. Indicii de refracție ai gazelor

În tabelă sînt date valorile indicilor de refracție n ai gazelor în condiții normale pentru linia D a cărei lungime de undă este aproximativ egală cu 0,5893 μ.

Tabela 2.107

Gazul	n	Gazul	n
Aer	1,000292	Hidrogen	1,000132
Amoniac	1,000379	Hidrogen sulfurat	1,000641
Argon	1,000281	Neon	1,000067
Azot	1,000298	Oxid de carbon	1,000334
Bioxid de carbon	1,000451	Oxigen	1,000271
Clor	1,000768	Sulf gazos	1,000686
Etilen	1,000719	Vapori de apă	1,000255
Heliu	1,000035		

Tabela 2.108. Rotația planului de polarizare în soluții

În tabelă sînt date valorile rotației specifice $[\alpha]$ a planului de polarizare al razelor polarizate liniar în soluțiile unor substanțe organice. Valorile lui $[\alpha]$ sînt determinate pe baza relației.

$$[\alpha] = \alpha/bc, \tag{2.103}$$

unde α este unghiul de rotație al planului de polarizare în soluția dată; b este grosimea stratului de soluție, exprimată în dm; iar c este concentrația, adică numărul de grame de corp dizolvat în 100 cm^3 soluție. Valorile lui $[\alpha]$ din tabelă se referă la temperatura medie a camerei.

Tabela 2.108

Soluția și concentrația ei	λ[μ]	[α]°	Soluția și concentrația ei	λ[μ]	[α]°
Glucoză + apă $c = 5{,}5$	0,447	96,62	Acid tartric + apă $c = 28{,}62$	0,275	−296,8
	0,479	83,88		0,300	−166,0
	0,508	73,61		0,350	− 16,8
	0,535	65,35		0,400	− 6,0
	0,598	52,76		0,450	+ 6,6
	0,656	41,89		0,500	+ 7,5
Zahăr de trestie + apă $c = 26$	0,4047	452,8		0,550	+ 8,4
	0,4208	139,9		0,589	+ 9,82
	0,4358	128,8	Camfor + alcool etilic $c = 34{,}70$	0,334	612,5
	0,4678	109,9		0,350	378,3
	0,4800	103,05		0,400	158,6
	0,5086	91,43		0,450	109,8
	0,5209	86,80		0,500	81,7
	0,5780	69,36		0,550	62,0
	0,6438	55,70		0,589	52,4
	0,6708	50,45			

Tabela 2.109. **Rotația planului de polarizare în cuarț**

În tabelă sînt date valorile unghiului de rotație al planului de polarizare la trecerea razelor de diferite lungimi de undă printr-o placă de cuarț în direcția paralelă cu axa sa optică. Grosimea plăcii se consideră egală cu 1 mm, iar lungimea de undă a razelor este exprimată în microni.

Tabela 2.109

λ[μ]	α	λ[μ]	α	λ[μ]	α	λ[μ]	α
0,1854	370,9	0,2174	226,91	0,3726	58,89	0,6563	17,32
0,1857	368,6	0,2194	220,7	0,4047	48,93	0,6708	16,54
0,1862	356,6	0,2571	143,3	0,4359	41,54	1,040	6,69
0,1930	325,31	0,2747	121,1	0,4916	31,98	1,450	3,41
0,1935	322,76	0,3286	78,58	0,5086	29,72	1,770	2,28
0,1990	295,65	0,3441	70,59	0,5895	21,72	2,140	1,55

Tabela 2.110. **Rotația magnetică a planului de polarizare**

Rotația magnetică a planului de polarizare se observă la toate corpurile introduse în cîmp magnetic, dacă prin ele trece o rază pola-

rizată liniar în direcție paralelă cu liniile de forță magnetice. Mărimea rotației magnetice χ a planului de polarizare este dată de expresia

$$\chi = clH, \tag{2.104}$$

unde l și H reprezintă drumul razei luminoase în corp și respectiv intensitatea cîmpului magnetic; c este un coeficient de proporționalitate, care se numește „rotația magnetică specifică", sau constanta lui Verdet. Mărimile l și H se măsoară în cm și respectiv în oerstezi, iar χ și c se dau de obicei în minute de arc.

În tabelă sînt date valorile lui c pentru cîteva corpuri solide și lichide la temperaturile specificate; raza luminoasă are lungimea de undă egală cu 0,5893 μ (raza galbenă a sodiului).

Tabela 2.110

	t[°C]	c		t[°C]	c
Acid acetic	21,0	0,7976	Bromură de etil	19,7	1,395
Acid fluorhidric	20,8	0,7990	Clorură de etil	5,0	1,035
Alcool etilic	16,8	0,8637	Cuarț cu axa $\perp$	20	0,0166
Alcool izoamilic	19,9	0,9888	Iodură de etil	18,1	2,251
Alcool propilic	15,6	0,9139	Sticlă: crown	18	0,0161
Apă	20	0,013	flint greu	18	0,0888
Benzen	15	2,062	Sulfură de carbon	0	0,0435

§ 2.21. Structura atomului și procesele nucleare

Tabela 2.111. Spectrul hidrogenului

Spectrul hidrogenului se calculează după formula lui Bohr

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Pentru $m = 1$ și $n = 2$, 3 și 4 avem trei linii ale seriei Lyman; pentru $m = 2$ și $n = 3, 4, 5,...$ avem peste 30 linii ale seriei Balmer; pentru $m = 3$ și $n = 4, 5, 6, ..., 10$ avem 8 linii ale seriei Paschen; pentru $m = 4$ și $n = 6$ avem o linie a seriei Pfund. În tabelă sînt date lungimile de undă ale liniilor spectrului hidrogenului, obținute experimental (λ_{exp}) și valorile teoretice respective (λ_{teor}). Pentru seriile Lyman, Balmer și Paschen lungimile de undă ale liniilor sînt date în ångströmi [Å], iar pentru seriile Brackett și Pfund în microni [μ].

Tabela 2.111

Seria	n	$\lambda_{exp.}$	$\lambda_{teor.}$
Lyman $\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (anul 1906)	2	1 215,7	1 216,68
	3	1 026,0	1 025,73
	4	972,7	972,54
Balmer $\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$. (anul 1885)	3	6 562,8473	6 562,793
		6 562,7110	
	4	4 861,3578	4 861,327
		4 861,2800	
	5	4 340,497	4 340,466
		4 340,429	
	6	4 101,7346	4 101,738
	7	3 970,0740	3 970,075
	8	3 889,0575	3 889,052
	9	3 835,397	3 835,387
	10	3 797,910	3 797,900
Paschen $\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (anul 1908)	4	18 751,3	18 751,1
	5	12 817,6	12 818,1
	6	1,09	10 938,1
	7	10 049,8	10 049,4
	8	9 546,2	9 546,0
	9	9 929,7	9 229,1
	10	9 015,3	9 014,9
	11	8 863,4	8 862,9
Brackett $\nu = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (anul 1922)	5	4,05	4,051
	6	2,63	2,625
Pfund $\nu = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (anul 1924)	6	7,40	7,458

Tabela 2.112. **Distribuţia electronilor în atomi**

Starea energetică şi distribuţia electronilor în păturile atomice sînt determinate de patru numere, care se numesc *numere cuantice*, şi se notează de obicei cu n, l, s şi j; numerele cuantice sînt discontinue sau discrete, adică pot lua numai valori discrete, întregi sau semiîntregi.

În ceea ce priveşte numerele cuantice n, l, s, şi j trebuie avut în vedere şi următoarele:

1. Numărul cuantic n se numeşte *număr cuantic principal*: el este acelaşi pentru toţi electronii, care intră în componenţa unei

aceleiaşi pături electronice; cu alte cuvinte, fiecărei pături electronice a atomului îi corespunde o anumită valoare a numărului cuantic principal, şi anume, pentru păturile electronice *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* şi *Q* numerele cuantice principale sînt egale respectiv cu: 1, 2, 3, 4, 5, 6 şi 7. În cazul unui atom cu un singur electron (atomul de hidrogen), numărul cuantic principal determină orbita electronică şi totodată energia atomului în stare staţionară.

2. Numărul cuantic *l* se numeşte număr cuantic *orbital* şi determină momentul cinetic al electronului produs de rotaţia sa în jurul nucleului atomic. Acest număr cuantic poate lua valorile: 0, 1, 2, 3, ... şi se notează în general prin simbolurile *s*, *p*, *d*, *f*, ... Electronii, care au acelaşi număr cuantic orbital, formează o subgrupă sau se mai spune că se află pe acelaşi subnivel energetic.

3. Numărul cuantic *s* se numeşte deseori număr cuantic *de spin*, deoarece el determină momentul cinetic al electronului datorit rotaţiei sale proprii (momentul de spin).

4. Numărul cuantic *j* se numeşte număr cuantic *al momentului cinetic total* sau număr cuantic *intern* şi este determinat de suma vectorilor *l* şi *s*.

Distribuţia electronilor în păturile atomice este guvernată de asemenea de anumite legi generale, dintre care trebuie să menţionăm:

1. *Principiul Pauli*, în conformitate cu care în atom nu pot exista doi electroni cu aceleaşi valori ale tuturor celor patru numere cuantice, adică, doi electroni dintr-un acelaşi atom trebuie să difere prin valoarea cel puţin a unui număr cuantic.

2. *Principiul energetic*, în conformitate cu care în starea fundamentală a atomului toţi electronii săi trebuie să se afle la nivele energetice cele mai joase.

3. *Principiul numărului de electroni în pături*, în conformitate cu care numărul limită de electroni dintr-o pătură nu poate depăşi $2n^2$, unde n este numărul cuantic principal al păturii date. Dacă numărul de electroni dintr-o anumită pătură atinge valoarea limită, pătura este umplută şi în celelalte elemente începe formarea unei noi pături electronice.

În conformitate cu ceea ce s-a spus, în tabela 2.112 a, sînt date: 1) notaţiile în litere ale păturilor electronice: 2) valorile respective ale numerelor cuantice principal şi orbital; 3) simbolurile subgrupelor; 4) numărul maxim de electroni calculat teoretic atît din subgrupe, cît şi din pături. Trebuie menţionat că în păturile *K*, *L* şi *M* numărul de electroni şi distribuţia lor pe subgrupe determinate experimental sînt în perfectă concordanţă cu teoria, însă în păturile următoare se observă abateri însemnate: numărul de electroni în subgrupa *f* atinge valoarea limită abia în pătura *N*, în pătura următoare el se micşorează, iar apoi dispare întreaga subgrupă *f*, aşa cum se poate vedea din tabela 2.112 b.

În tabela 2.112 b sînt date numărul electronilor în pături şi distribuţia lor în subgrupe pentru toate elementele chimice, printre care şi transuranice. Datele numerice ale acestei tabele au fost determinate prin cercetări spectroscopice amănunţite.

Tabela 2.112 a

Pătura	K	L		M			N				O					P						Q						
n	1	2		3			4				5					6						7						
l	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6
Subgrupa	*s*	*s*	*p*	*s*	*p*	*d*	*s*	*p*	*d*	*f*	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*	*h*	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*	*h*	*i*
Numărul de electroni din subgrupă	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	18	2	6	10	14	18	22	2	6	10	14	18	22	26
Numărul de electroni din pătură ($2n^2$)	2	8		18			32				50					72						98						

Tabela 2.112 b *(continuare)*

Z	Elementul	K	L		M			N				O				P			Q
		0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	
	A șasea perioadă																		
66	Dy	2	2	6	2	6	10	2	6	10	9	2	6	1		2			
67	Ho	2	2	6	2	6	10	2	6	10	10	2	6	1		2			
68	Er	2	2	6	2	6	10	2	6	10	11	2	6	1		2			
69	Tu	2	2	6	2	6	10	2	6	10	12	2	6	1		2			
70	Yb	2	2	6	2	6	10	2	6	10	13	2	6	1		2			
71	Lu	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	1		2			
72	Hf	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	2		2			
73	Ta	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	3		2			
74	W	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	4		2			
75	Re	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	5		2			
76	Os	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	6		2			
77	Ir	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	7		2			
78	Pt	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	8		2			
79	Au	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		1			
80	Hg	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2			
81	Tl	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	1		
82	Pb	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	2		
83	Bi	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	3		
84	Po	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	4		
85	At	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	5		
86	Rn	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6		
	A șaptea perioadă																		
87	Fr	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6		1
88	Ra	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6		2
89	Ac	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	1	2
90	Th	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	1	2	6	1	2
91	Pa	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	2	6	1	2
92	U	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	3	3	6	1	2
93	Np	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	4	2	6	1	2
94	Pu	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	5	2	6	1	2
95	Am	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	6	2	6	1	2
96	Cm	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6	1	2
97	Bk	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	1	2
98	Cf	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	2	2
99	Es	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	3	2
100	Fm	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	4	2
101	Mv	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	5	2
102	No	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	6	2
103	Lw	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	7	2

Tabela 2.113. **Potențiale de ionizare ale elementelor**

În tabelă sînt date valorile primelor potențiale de ionizare ale unor elemente, exprimate în electronvolți; sînt date de asemenea numerele de ordine și simbolurile elementelor.

Tabela 2.113

Nr. de ord.		Potențialul de ionizare	Nr. de ord.		Potențialul de ionizare	Nr. de ord.		Potențialul de ionizare	Nr. de ord.		Potențialul de ionizare
1	H	13,54	14	Si	8,15	34	Se	9,75	53	J	10,44
2	He	24,56	16	S	10,31	36	Kr	13,94	54	Xe	12,13
3	Li	5,39	18	Ar	15,71	37	Rb	4,18	55	Cs	3,88
4	Be	9,32	19	K	4,32	38	Sr	5,69	56	Ba	5,21
5	B	8,30	20	Ca	6,11	42	Mo	7,18	57	La	5,61
6	C	11,27	24	Cr	6,76	44	Ru	7,50	74	W	7,98
7	N	14,52	25	Mn	7,40	45	Rh	7,70	78	Pt	8,96
8	O	13,56	26	Fe	7,90	46	Pd	8,33	79	Au	9,19
10	Ne	21,48	27	Co	7,81	47	Ag	7,57	80	Hg	10,39
11	Na	5,14	28	Ni	7,63	48	Cd	8,99	82	Pb	7,38
12	Mg	7,64	29	Cu	7,70	50	Sn	7,32	83	Bi	7,25
13	Al	5,98	30	Zn	9,38	51	Sb	8,53	88	Ra	5,25

Tabela 2.114. **Emisia termoelectronică**

În tabelă sînt date valorile constantelor A și b din ecuația pentru densitatea j a curentului termoelectronic

$$j = AT^2e^{-b/T}; \qquad (2.105)$$

unde T este temperatura absolută. Dacă j se măsoară în A/cm², A se măsoară în $A/cm^2 \cdot {}^\circ K^2$.

Tabela 2.114

Substanța	A	b	Substanța	A	b
Wolfram	60–100	$5{,}24 \cdot 10^4$	Nichel	$1{,}38 \cdot 10^3$	$5{,}84 \cdot 10^4$
Molibden	60	$5{,}15 \cdot 10^4$	Fier	—	$5{,}53 \cdot 10^4$
	55	$4{,}82 \cdot 10^4$	Cupru	65	$5{,}02 \cdot 10^4$
Tantal	60,2	$4{,}72 \cdot 10^4$	Argint	60,2	$4{,}70 \cdot 10^4$
	37,2	$4{,}76 \cdot 10^4$	Aur	40	$5{,}00 \cdot 10^4$
Paladiu	60	$5{,}80 \cdot 10^4$	Cesiu	1,62	$2{,}10 \cdot 10^4$
	60–70	$3{,}89 \cdot 10^4$	Calciu	60	$2{,}60 \cdot 10^4$
Platină	$1{,}7 \cdot 10^4$	$7{,}25 \cdot 10^4$	CaO	—	$2{,}05 \cdot 10^4$
Zirconiu	330	$4{,}79 \cdot 10^4$	SrO	—	$1{,}47 \cdot 10^4$
Hafniu	14,5	$4{,}10 \cdot 10^4$	BaO	—	$1{,}15 \cdot 10^4$
Niobiu	57	$4{,}60 \cdot 10^4$	MgO	—	$1{,}18 \cdot 10^4$

Tabelele 2. 115 a și b. **Radiațiile Röntgen**

În tabela 2.115 a sînt date pentru unele elemente, lungimile de undă ale liniilor α_1 și α_2 ale radiației caracteristice Röntgen din seria cea mai dură K. Conform legii lui Mosley, lungimile de undă ale liniilor radiației caracteristice scad cu creșterea numărului de ordine al elementelor. Valorile lui λ sînt date în unități X, iar pentru elemente sînt date numerele de ordine Z și simbolurile chimice.

Atenuarea radiației Röntgen în diferitele corpuri se supune legii generale, exprimată prin formula

$$I = I_0 e^{-\mu d}, \tag{2.106}$$

unde I_0 și I sînt intensitatea radiației Röntgen înainte și respectiv după trecerea prin stratul atenuator; d este grosimea stratului, iar μ este coeficientul de atenuare. Cîtul dintre μ și densitatea ρ a corpului atenuator, adică μ/ρ, se numește coeficientul masic de atenuare a radiației Röntgen și se notează de obicei cu $\bar{\mu}$. În tabela 2.115 b sînt date: 1) valorile coeficientului masic de atenuare $\bar{\mu}$ al radiației Röntgen pentru unele corpuri de duritate diferită; 2) grosimea stratului $d_{1/2}$ al acestor corpuri în cm, care produce atenuarea radiației pînă la jumătate din intensitatea inițială. Duritatea radiației este determinată în tabelă prin lungimea lor de undă λ, măsurată în Å.

Tabela 2.115 a

Z	Elementul	λ		Z	Elementul	λ	
		α_1	α_2			α_1	α_2
12	Mg	9869,0		42	Mo	712,1	707,8
13	Al	8320,5		47	Ag	562,7	558,3
19	K	3737,1	3733,7	51	Sb	473,9	469,3
20	Ca	3355,0	3351,7	56	Ba	389,0	384,4
22	Ti	2746,8	2743,2	57	La	374,7	370,0
23	V	2502,1	2498,3	73	Ta	219,7	214,9
24	Cr	2288,9	2285,0	74	W	213,4	208,6
25	Mn	2101,5	2097,5	77	Ir	195,5	190,6
26	Fe	1936,0	1932,1	78	Pt	190,0	182,2
27	Co	1789,2	1785,3	79	Au	184,8	185,1
28	Ni	1658,3	1654,4	83	Bi	165,2	160,4
29	Cu	1541,2	1537,4	92	U	130,7	125,6

Tabela 2.115 b

λ [Å]	Aer $\bar{\mu}$	Aer $d_{1/2}$	Apă $\bar{\mu}$	Apă $d_{1/2}$	Aluminiu $\bar{\mu}$	Aluminiu $d_{1/2}$	Cupru $\bar{\mu}$	Cupru $d_{1/2}$	Plumb μ	Plumb $d_{1/2}$
0,1			0,16	4,3	0,16	1,6	0,36	0,21	3,8	0,016
0,2			0,18	3,9	0,28	0,92	1,5	0,051	4,9	0,013
0,3			0,29	2,4	0,47	0,55	4,3	0,018	14	0,0044
0,4			0,44	1,6	1,1	0,23	9,8	0,0078	31	0,0020
0,5	0,48	1 120	0,66	1,1	2,0	0,13	19	0,0040	54	0,0011
0,6	0,75	720	1,0	0,69	3,4	0,076	32	0,0024	90	0,0007
0,7	1,3	410	1,5	0,46	5,1	0,050	48	0,0016	139	0,0004
0,8	1,6	340	2,1	0,33	7,4	0,035	70	0,0011		
0,9	2,1	260	2,8	0,25	11	0,023	98	0,0008		
1,0	2,6	210	3,8	0,18	15	0,017	131	0,0006		
1,5	8,7	62	12	0,058	46	0,006	49	0,0016		
2,0	21	26	18	0,025	102	0,002	108	0,0007		
2,5	39	14	51	0,014	194	0,001	198	0,0004		

Tabelele 2.116 a, b şi c. **Seriile radioactive ale uraniului, radiului, actiniului şi toriului**

Legea fundamentală a dezintegrării radioactive este dată de formula

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (2.107)$$

unde N_0 şi N reprezintă numărul iniţial de atomi al substanţei radioactive şi respectiv numărul de atomi la momentul t, iar λ este un coeficient constant pentru substanţa respectivă, care se numeşte constanta de dezintegrare. În afară de constanta de dezintegrare λ, dezintegrarea radioactivă se caracterizează foarte des prin perioada de înjumătăţire $T_{1/2}$ adică prin intervalul de timp, în care s-au dezintegrat jumătate din numărul iniţial de atomi. Această perioadă $T_{1/2}$ legată de constanta de dezintegrare prin relaţia $T_{1/2} = 0{,}693/\lambda$, variază pentru corpurile radioactive în limite foarte largi; datorită acestui fapt, ea se măsoară de obicei în diferite unităţi de timp, adică în ani, zile, ore, minute şi secunde.

În tabelele 2.116 *a*, b şi c sînt date pentru seria uraniu-radiului, actiniului şi toriului, în afară de denumire, simbolul chimic, numărul de ordine Z şi numărul de masă A al tuturor verigilor dezintegrării, încă: 1) perioadele lor de înjumătăţire $T_{1/2}$; 2) tipul radiaţiei respective; 3) lungimea parcursului radiaţiei alfa (l_α) în aer în condiţii normale; 4) energia radiaţiei alfa E_α măsurată în MeV.

Seria uraniu-radiu Tabela 2.116 a

Denumirea	Simbolul	Z	A	$T_{1/2}$	Radiația	l_α [cm]	E_α [MeV]
Uraniu I	UI	92	238	$4{,}49\cdot10^9$ a	α	2,653	4,18
Uraniu X_1	UX_1	90	234	24,1 d	β	—	—
Uraniu X_2	UX_2	91	234	1,14 min	β	—	—
Uraniu Z	UZ	91	234	6,7 h	β	—	—
Uraniu II	UII	92	234	$2{,}52\cdot10^5$ a	α	3,211	4,78
Ioniu	—	90	230	$8{,}3\cdot10^4$ a	α	3,176	4,682
Radiu	Ra	88	226	1590 a	α	3,30	4,791
Radon[1])	Rn	86	222	3,82 d	α	4,051	5,4860
Radiu A	RaA	84	218	3,05 min	α	4,657	5,9981
Radiu B	RaB	82	214	26,8 min	β	—	—
Astatiniu[2])	At	85	218	1,5—2s	α	—	6,57
Radiu C	RaC	83	214	19,7 min	β	—	5,5048
Radon 218[3])	^{218}Rn	86	218	$1{,}9\cdot10^{-2}$ s	α	—	7,12
Radiu C′	RaC′	84	214	$1{,}55\cdot10^{-4}$ s	α	6,907	7,6802
Radiu C″	RaC″	81	210	1,32 min	β	—	—
Radiu D	RaD	82	210	22 a	β	—	—
Radiu E	RaE	83	210	5,0 d	β	—	—
Poloniu	Po	84	206	140 d	α	3,842	5,2984
Taliu	^{206}Tl	81	206	4,23 min	β	—	—
Radiu G	RaG	82	206	Stabil		—	—

Note la tabela 2.116 a. 1) Înainte se numea emanație de radiu; această denumire folosindu-se uneori și astăzi; 2) izotopul 218 al astatiniului; 3) este conținut în radon într-o proporție de cca. 0,1%;

Seria actiniului Tabela 2.116 b

Denumirea	Simbolul	Z	A	$T_{1/2}$	Radiația	l_α [cm]	E_α [MeV]
Actinouraniu	AcU	92	235	$7{,}13\cdot10^8$ a	α	3,02	4,52
Uraniu Y	UY	90	231	25,51 h	β	—	—
Protactiniu	Pa	91	231	$3{,}2\cdot10^4$ a	α	3,51	5,05
Actiniu	Ac	89	227	21,7 a	α,β	3,46	4,95
Radioactiniu	RdAc	90	223	18,9 d	α	4,71	6,03
Franciu[1])	Fr	87	223	21 min	β	—	—
Actiniu	AcX	88	223	11,4 d	α	4,32	5,72
Actinon[2])	An	86	219	3,92 s	α	5,69	6,82
Actiniu A	AcA	84	215	$1{,}83\cdot10^{-3}$ s	α,β	6,46	7,37
Actiniu B	AcB	82	211	36,1 min	β	—	—
Astatiniu[3])	At	85	215	$\approx10^{-4}$ s	α	—	8,00
Actiniu C	AcC	83	211	2,16 min	α,β	5,43	6,62
Actiniu C′	AcC′	84	211	$\approx5\cdot10^{-3}$ s	α	6,55	7,43
Actiniu C″	AcC″	81	207	4,76 min	β	—	—
Actiniu D	AcD	82	207	Stabil		—	—

Note la tabela 2.116 b. 1) Se mai numeşte actiniu K; este conţinut în radioactiniu în proporţie de cca. 1,2%. 2) S-a numit înainte emanaţie de actiniu. 3) Izotopul 215 al astatiniului.

Seria toriului Tabela 2.116 c

Denumirea	Simbolul	Z	A	$T_{1/2}$	Radiaţia	l_α [cm]	E_α [MeV]
Toriu	Th	90	232	$1{,}39 \cdot 10^{10}$ a	α	2,70	4,20
Mezotoriu 1	$MsTh_1$	88	228	6,7 a	β	—	—
Mezotoriu 2	$MsTh_2$	89	228	6,13 h	β	—	—
Radiotoriu	RdTh	90	228	1,90 a	α	3,98	5,42
Toriu X	ThX	88	224	3,64 d	α	4,28	5,68
Toron[1])	Tn	86	220	54,5 s	α	4,00	6,28
Toriu A	ThA	84	216	0,16 s	α, β	5,64	6,77
Toriu B	ThB	82	212	10,6 h	β	—	—
Astatiniu[2])	At	85	216	$3 \cdot 10^{-4}$ s	α	—	7,79
Toriu C	ThC	83	212	60,5 min	α, β	4,73	6,05
Toriu C′	ThC′	84	212	$2{,}2 \cdot 10^{-7}$ s	α	8,57	8,78
Toriu C″	ThC″	81	208	3,1 min	β	—	—
Toriu D	ThD	82	208	Stabil		—	—

Note la tabela 2.116 c. 1) Înainte se numea emanaţie de toriu; 2) Izotopul 216 al astatiniului.

Tabela 2.117. **Radioactivitatea naturală a altor elemente**

Studiul sistematic al tuturor elementelor sistemului periodic al lui D.I. Mendeleev a arătat că în afară de elementele care formează familiile radioactive, mai există cinci elemente care manifestă o radioactivitate foarte slabă, dar fără îndoială naturală. S-a constatat în toate cazurile că, dintre izotopii acestor elemente, numai unul singur prezintă proprietăţi radioactive naturale, iar ceilalţi izotopi sînt stabili.

Aceste elemente radioactive naturale sînt menţionate în tabele, unde se dau:

1) denumirea lor şi numărul de ordine Z;
2) numărul de masă A şi simbolul izotopului radioactiv natural;
3) perioada sa de înjumătăţire $T_{1/2}$;
4) felul radiaţiilor.

Valorile lui $T_{1/2}$ trebuie considerate ca foarte aproximative.

Tabela 2.117

Elementul	Z	A	Notația	$T_{1/2}$	Radiația
Potasiu	19	40	^{40}K	$13{,}1 \cdot 10^{8}$ a	β
Rubidiu	37	87	^{87}Rb	$6{,}0 \cdot 10^{10}$ a	β
Samariu	62	152	^{152}Sm	$3{,}4 \cdot 10^{11}$ a	α
Lutețiu	71	176	^{176}Lu	$2{,}4 \cdot 10^{10}$ a	β
Reniu	75	187	^{187}Re	$4 \cdot 10^{12}$ a	β

Tabela 2.118 a și b. **Dezintegrarea radonului și a precipitatului său activ**

Legea fundamentală a dezintegrării radioactive, determinată prin formula (2.107), poate fi verificată experimental, observîndu-se: 1) dezintegrarea emanației de radiu (radon) și 2)dezintegrarea radiului *A*, *B* și *C*, care formează așa-numitul precipitat activ al radonului. În tabele sînt date:

1. În tabela 2.118 a valorile mărimii $e^{-\lambda t}$ pentru radon în intervale de timp t (pînă la 30 zile); cantitatea inițială de radon, considerată convențional ca unitate; constanta de dezintegrare a radonului λ, considerată egală cu $2{,}098 \cdot 10^{-6}$ s^{-1}.

2. În tabela 2.118 b valorile $e^{-\lambda_1 t}$, $e^{-\lambda_2 t}$ și $e^{-\lambda_3 t}$ pentru RaA, RaB și RaC, ale căror cantități inițiale sînt considerate de asemenea convențional egale cu unitatea, iar constantele lor de dezintegrare sînt luate egale cu: λ_1 (RaA) $= 3{,}79 \cdot 10^{-3}$ s^{-1}, λ_2 (RaA) $= 4{,}31 \cdot 10^{-4}$ s^{-1} și λ_3 (RaC) $= 5{,}86 \cdot 10^{-4}$s^{-1}.

Tabela 2.118 a

t	$e^{-\lambda t}$	t	$e^{-\lambda t}$	t	$e^{-\lambda t}$
0 h	1,0000	12 h	0,9134	1 d	0,8343
1 „	0,9925	13 „	0,9064	2 „	0,6960
2 „	0,9850	14 „	0,8997	3 „	0,5806
3 „	0,9776	15 „	0,8929	4 „	0,4844
4 „	0,9703	16 „	0,8861	5 „	0,4041
5 „	0,9629	17 „	0,8795	6 „	0,3371
6 „	0,9557	18 „	0,8729	7 „	0,2812
7 „	0,9485	19 „	0,8662	8 „	0,2346
8 „	0,9414	20 „	0,8597	9 „	0,1957
9 „	0,9343	21 „	0,8533	10 „	0,1633
10 „	0,9273	22 „	0,8468	11 „	0,1362
11 „	0,9203	23 „	0,8405	12 „	0,1136

Tabela 2.118 a (*continuare*)

t	$e^{-\lambda t}$	t	$e^{-\lambda t}$	t	$e^{-\lambda t}$
13 d	0,09481	19 d	0,03196	25 d	0,01078
14 „	0,07910	20 „	0,02667	26 „	0,00899
15 „	0,06599	21 „	0,02225	27 „	0,00750
16 „	0,05505	22 „	0,01856	28 „	0,00626
17 „	0,04592	23 „	0,01548	29 „	0,00522
18 „	0,03831	24 „	0,01292	30 „	0,00435

Tabela 2.118 b

t [min]	$e^{-\lambda_1 t}$ (RaA)	$e^{-\lambda_2 t}$ (RaB)	$e^{-\lambda_3 t}$ (RaC)	t [min]	$e^{-\lambda_1 t}$ (RaA)	$e^{-\lambda_2 t}$ (RaB)	$e^{-\lambda_3 t}$ (RaC)
0	1,0000	1,0000	1,0000	35	0,0004	0,4129	0,3002
3	0,5057	0,9254	0,8998	40	0,0001	0,3554	0,2448
5	0,3208	0,8787	0,8387	50	—	0,2744	0,1722
10	0,1033	0,7721	0,7034	60	—	0,2119	0,1211
15	0,0331	0,6784	0,5899	90	—	0,0975	0,0421
20	0,0106	0,5961	0,4948	120	—	0,0449	0,0147
25	0,0034	0,5238	0,4149	150	—	0,0207	0,0051
30	0,0011	0,4603	0,3480	180	—	0,0095	0,0018

Tabela 2.119. **Secţiunile eficace ale unor nuclee pentru neutroni**

La studiul unor procese de interacţiune, cum ar fi împrăştierea elastică şi neelastică, captura etc., se lucrează cu *secţiunea eficace* σ, care este definită ca secţiunea pe care ar avea-o un nucleu cînd o particulă, considerată punctiformă, îndreptată asupra lui ar provoca o reacţie nucleară. Tipul de reacţie diferă de la nucleu la nucleu. Astfel, pentru nucleele diferitelor elemente, la interacţiunea lor cu neutronii, se definesc secţiunile de captură σ_c, de împrăştiere σ_i etc. Suma acestor mărimi se numeşte de obicei *secţiunea totală* σ_t a nucleului considerat.

În tabele sînt date secţiunile eficace ale nucleelor unor elemente la interacţiunea lor cu neutronii; 1) rapizi, (n. r. energia 3—10 MeV) şi 2) termici (n.t. energia $\leqslant$ 0,025 eV). Pentru neutronii rapizi sînt date secţiunile eficace totale σ_t, pentru cei termici-secţiunile de împrăştiere σ_i şi de captură σ_c; pentru neutronii termici $\sigma_t = \sigma_i + \sigma_c$. Toate valorile sînt date în barni şi sînt calculate ca medii ale rezultatelor diferiţilor autori.

Tabela 2.119

Element	N.r. σ_t	N.t. σ_i	N.t. σ_c	Element	N.r. σ_t	N.t. σ_i	N.t. σ_c
$_1H$	0,9	38 (H_2)	0,33	$_{24}Cr$	3	4	2,9
$_1D$	1,0	7	0,0066	$_{25}Mn$	3,0	2,1	13,3
$_2He$	1,4	0,8	~0	$_{26}Fe$	3,0	11,4	2,53
$_3Li$	1,5	1,2	71	$_{27}Co$	3,2	6	36
$_4Be$	1,7	7,5	0,010	$_{28}Ni$	3,2	17,5	4,6
$_5B$	1,4	4,4	755	$_{29}Cu$	3,2	7,8	3,7
$_6C$	1,3	5	0,003	$_{30}Zn$	3,5	4	1,1
$_7N$	1,4	11	1,88 < 0,0002	$_{38}Sr$	4,9—3,7	10	1,2
$_8O$	1,3	4,2		$_{47}Ag$	4,3	6	62
$_{11}Na$	2,4	3,4	0,51	$_{48}Cd$	4,3	7	2600
$_{12}Mg$	1,6	3,6	0,06	$_{50}Sn$	4,4	5	0,6
$_{13}Al$	1,7	1,4	0,23	$_{51}Sb$	4,3	4,1	5,0
$_{16}S$	2,0	1,2	0,49	$_{52}Te$	4,4	4,4	4,5
$_{19}K$	~2,4	2,0	2,0	$_{74}W$	4,9	6	19
$_{20}Ca$	~2,3	3,0	0,43	$^{235}_{92}U$	1,3	—	687

Tabela 2.120. **Proprietățile nucleare ale elementelor și izotopilor lor stabili**

În tabelă sînt enumerate elementele și izotopii lor stabili și sînt specificate cîteva proprietăți ale nucleelor lor, și anume, în afară de numărul de ordine Z și de simbolurile elementelor și izotopilor lor (coloana a doua și ultima a tabelei), mai sînt date: 1) numărul de masă A; 2) numărul de neutroni din nucleu N; 3) conținutul procentual al izotopilor în starea naturală a elementului; 4) valoarea spinului s, exprimată în unități $\hbar = h/2\pi$; 5) valorile momentului magnetic μ al nucleului, exprimate în magnetoni nucleari. Dintre elementele nestabile, în tabelă sînt date numai elementele radioactive naturale cu perioadă de înjumătățire foarte mare; sînt enumerate de asemenea și elementele transuraniene.

Tabela 2.120

Z	Simbolul	A	N	Conținutul %	s	μ	Izotopii (stabili)
0	n	1	1	—	$1/2$	— 1,9130	^1H
1	H	1	0	99,98 (5)	$1/2$	+ 2,7927	^1H
	D	2	1	0,01 (5)	1	+ 0,8574	^2H

Tabela 2.120 (*continuare*)

Z	Simbolul	A	N	Conținutul %	s	μ	Izotopii (stabili)
2	He	3 4	1 2	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$ ≈ 100	$^{1}/_{2}$ 0	(−)2,1275 —	^{3}He ^{4}He
3	Li	6 7	3 4	7,30 92,70	1 $^{3}/_{2}$	+ 0,8213 + 3,2561	^{6}Li ^{7}Li
4	Be	9	5	100	$^{3}/_{2}$	(−)1,1774	^{9}Be
5	B	10 11	5 6	18,83 81,17	3 $^{3}/_{2}$	+ 1,8008 + 2,6884	^{10}B ^{11}B
6	C	12 13	6 7	98,892 1,108	0 $^{1}/_{2}$	— + 0,7023	^{12}C ^{13}C
7	N	14 15	7 8	99,65 0,35	1 $^{1}/_{2}$	+ 0,40370 − 0,2831	^{14}N ^{15}N
8	O	16 17 18	8 9 10	99,759 0,037 0,204	0 $^{1}/_{2}$, $^{3}/_{2}$ —	— — —	^{16}O ^{17}O ^{18}O
9	F	19	10	100	$^{1}/_{2}$	+ 2,6289	^{19}F
10	Ne	20 21 22	10 11 12	90,92 0,257 8,823	— ($^{3}/_{2}$) —	— (negativ) —	^{20}Ne ^{21}Ne ^{22}Ne
11	Na	23	12	100	$^{3}/_{2}$	+ 2,2174	^{23}Na
12	Mg	24 25 26	12 13 14	79,98 10,05 10,97	— $^{5}/_{2}$ —	— (−0,97) —	^{24}Mg ^{25}Mg ^{26}Mg
13	Al	27	14	100	$^{5}/_{2}$	+ 3,6412	^{27}Al
14	Si	28 29 30	14 15 16	92,28 4,67 3,05	0 $^{1}/_{2}$ 0	— — —	^{28}Si ^{29}Si ^{30}Si
15	P	31	16	100	$^{1}/_{2}$	+ 1,1316	^{31}P

Tabela 2.120 (*continuare*)

Z	Simbolul	A	N	Conținutul %	s	μ	Izotopii (stabili)
16	S	32	16	95,018	0	—	^{32}S
		33	17	0,750	$^3/_2$	(0,632)	^{33}S
		34	18	4,215	0	—	^{34}S
		36	20	0,017	0	—	^{36}S
17	Cl	35	18	75,4	$^3/_2$	+ 0,8210	^{35}Cl
		37	20	24,6	$^3/_2$	+ 0,6833	^{37}Cl
18	Ar	36	18	0,337	—	—	^{36}Ar
		38	20	0,063	—	—	^{38}Ar
		40	22	99,600	—	—	^{40}Ar
19	K	39	20	93,08	$^3/_2$	+ 0,3915	^{39}K
		40	21	0,0119	4	— 1,290	^{40}K
		41	22	6,9081	$^3/_2$	+ 0,215	^{41}K
20	Ca	40	20	96,92	—	—	^{40}Ca
		42	22	0,64	—	—	^{42}Ca
		43	23	0,129	—	—	^{43}Ca
		44	24	2,13	—	—	^{44}Ca
		46	26	0,003	—	—	^{46}Ca
		48	28	0,178	—	—	^{48}Ca
21	Sc	45	24	100	$^7/_2$	+ 4,7563	^{45}Sc
22	Ti	46	24	7,95	—	—	^{46}Ti
		47	25	7,75	—	—	^{47}Ti
		48	26	73,45	—	—	^{48}Ti
		49	27	5,51	—	—	^{49}Ti
		50	28	5,34	—	—	^{50}Ti
23	V	50	27	0,23	—	—	^{50}V
		51	28	99,77	($^7/_2$)	+ 5,1481	^{51}V
24	Cr	50	26	4,31	—	—	^{50}Cr
		52	28	83,76	—	—	^{52}Cr
		53	29	9,55	—	—	^{53}Cr
		54	30	2,38	—	—	^{54}Cr
25	Mn	55	30	100	$^5/_2$	+ 3,4680	^{55}Mn

Tabela 2.120 (*continuare*)

Z	Simbolul	A	N	Conţinutul %	s	μ	Izotopii (stabili)
26	Fe	54	28	5,81	—	—	^{54}Fe
		56	30	91,64	—	—	^{56}Fe
		57	31	2,21	—	$\mu \approx 0$	^{57}Fe
		58	32	0,34	—	—	^{58}Fe
27	Co	59	32	100	$^7/_2$	+ 4,6485	^{59}Co
28	Ni	58	30	67,77	—	—	^{58}Ni
		60	32	26,16	—	—	^{60}Ni
		61	33	1,25	—	$\mu \leqslant 0,25$	^{61}Ni
		62	34	3,66	—	—	^{62}Ni
		64	36	1,16	—	—	^{64}Ni
29	Cu	63	34	68,94	$^3/_2$	+ 2,2259	^{63}Cu
		65	36	31,06	$^3/_2$	+ 2,3843	^{65}Cu
30	Zn	64	34	48,80	—	—	^{64}Zn
		66	36	27,81	—	—	^{66}Zn
		67	37	4,07	$^5/_2$	+ 0,9	^{67}Zn
		68	38	18,61	—	—	^{68}Zn
		70	40	0,62	—	—	^{70}Zn
31	Ga	69	38	60,16	$^3/_2$	+ 2,0165	^{69}Ga
		71	40	39,84	$^3/_2$	+ 2,5611	^{71}Ga
32	Ge	70	38	20,65	0	—	^{70}Ge
		72	40	27,43	0	—	^{72}Ge
		73	41	7,86	$^9/_2$	—	^{73}Ge
		74	42	36,34	0	—	^{74}Ge
		76	44	7,72	0	—	^{76}Ge
33	As	75	42	100	$^3/_2$	+ 1,5	^{75}As
34	Se	74	40	0,87	—	—	^{74}Se
		76	42	9,02	—	—	^{76}Se
		77	43	7,58	$^1/_2$	—	^{77}Se
		78	44	23,52	—	—	^{78}Se
		80	46	49,82	0	—	^{80}Se
		82	48	9,19	—	—	^{82}Se
35	Br	79	44	50,53	$^3/_2$	+ 2,1059	^{79}Br
		81	46	49,47	$^3/_2$	+ 2,2702	^{81}Br

cărora, pentru determinarea factorilor λ_1 şi λ_2, li se adaugă ecuaţiile suprafeţelor. Rezultanta $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ se numeşte *reacţiunea liniei date*: ea este normală la această linie.

§ 3.32. Momentul unei forţe

Măsura acţiunii mecanice, care ia în considerare poziţia forţei faţă de un punct dat şi care se exprimă prin produsul vectorial dintre raza vectoare a punctului de aplicare a forţei şi vectorul acestei forţe, se numeşte *momentul forţei* faţă de punctul dat. Momentul se reprezintă printr-un vector aplicat în punctul dat, (fig. 3.45)

$$\vec{M}_O(\vec{P}_A) = \overrightarrow{OA} \times \vec{P} = \vec{r} \times \vec{P}. \tag{3.98}$$

Modulul vectorului moment se măsoară prin unităţile de măsură [forţa] × [lungimea] = kgf·m şi se exprimă prin produsul dintre modulul forţei $\vec{P}$ şi distanţa de la punctul O pînă la suportul forţei, numită *braţul forţei* faţă de centrul dat

$$|\vec{M}_O| = |\vec{P}| \cdot h. \tag{3.99}$$

Triunghiul OAB cu vîrful în punctul O şi cu baza reprezentată de vectorul forţă, se numeşte *triunghi de moment*. Fără a lua în considerare dimensiunile

$$|\vec{M}_O(\vec{P}_A)| = 2\Delta OAB. \tag{3.100}$$

Dacă produsul vectorial $\vec{r} \times \vec{P}$ se construieşte după convenţia triedrului drept, vectorul moment se orientează normal pe planul triunghiului de moment, în acea parte a lui din care vectorul forţă indică o rotire în jurul punctului O în sens invers mersului acelor ceasornicului. La construirea produsului vectorial $\vec{r} \times \vec{P}$ după convenţia unui sistem stîng, sensul vectorului moment se schimbă în cel opus. Dacă planul triunghiului de moment se observă dintr-o parte aleasă arbitrar, atunci modulului momentului i se aplică semnul pozitiv sau negativ în funcţie de sensul în care este îndreptat vectorul moment: anume, mărimea momentului se consideră pozitivă dacă vectorul moment este îndreptat în acea parte, de unde se observă planul triunghiului de moment, şi negativă în caz contrar. Într-un sistem drept, mărimea momentului se consideră pozitivă, dacă direcţia vectorului forţă indică o rotaţie în jurul punctului O în sens invers mersului acelor ceasornicului, şi negativă în caz contrar. Dacă linia de acţiune a forţei trece prin punctul O, modulul momentului este egal cu zero. Dacă punctul în raport cu care se calculează momentul este (x_0, y_0, z_0), vectorul moment se exprimă în funcţie de coordonatele (x, y, z) ale

punctului de aplicaţie şi de proiecţiile X, Y, Z ale forţei $\vec{P}_A$ pe axă, prin următoarea formulă:

$$\vec{M}_O(\vec{P}_A) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \qquad (3.101)$$

La schimbarea polului din punctul O în punctul O', vectorul moment se transformă după formula

$$\vec{M}_O(\vec{P}_A) = \vec{M}_{O'}(\vec{P}_A) + \overrightarrow{OO'} \times \vec{P}. \qquad (3.102)$$

De aici rezultă că

$$\text{pr}_{OO'}\vec{M}_O(\vec{P}_A) = \text{pr}_{OO'}\vec{M}_{O'}(\vec{P}_A), \qquad (3.103)$$

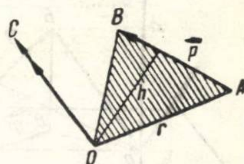


Fig. 3.45.

adică proiecţiile vectorului momentului faţă de doi poli pe axa care leagă aceşti poli, sînt egale între ele. Mărimea scalară, egală cu proiecţia pe o axă dată a vectorului momentului unei forţe în raport cu un punct arbitrar de pe aceeaşi axă, se numeşte *momentul forţei în raport cu această axă*. Dacă axa Δ trece prin punctul $c(x_0, y_0, z_0)$ şi are versorul $\vec{e}$, care formează cu axele de coordonate unghiurile α, β, γ, momentul forţei $\vec{P}_A$ cu proiecţiile X, Y, Z, aplicată în punctul $A(x, y, z)$, se exprimă analitic cu formula

$$M_\Delta(\vec{P}_A) = [\vec{M}_C(\vec{P}_A)\vec{e}] = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X & Y & Z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}. \qquad (3.104)$$

În particular, momentele unei forţe în raport cu axele de coordonate se exprimă cu formulele

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} = yZ - zY, \quad M_y = \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} = zX - xZ, \\ M_z &= \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = xY - yX. \end{aligned}\right\} \qquad (3.105)$$

Momentul unei forţe în raport cu o axă este egal cu zero, dacă vectorul forţă este situat în acelaşi plan cu axa, adică o intersectează sau este paralel cu ea. Dacă forţa $\vec{P}$ este aşezată în planul xOy şi este aplicată în punctul $A(x,y,o)$, atunci $M_x = M_y = 0$, $M_z = xY - yX$. Întrucît în acest caz $M_z = \pm |\vec{M}_O(\vec{P}_A)|$, atunci scalarul momentul forţei

$M_O(\vec{P}_A)$ în raport cu originea coordonatelor se exprimă cu aceeaşi formulă

$$M_O(\vec{P}_A) = xY - yX. \tag{3.106}$$

Momentul forţei $\vec{P}_A$ în raport cu axa Δ (fig. 3.46) se poate deduce direct, proiectînd vectorul forţei $\vec{P}$ pe planul (Π), perpendicular pe axa Δ şi calculînd mărimea algebrică a momentului acestei proiecţii $\vec{P}'$ în jurul punctului de intersecţie a planului de proiecţie cu axa Δ

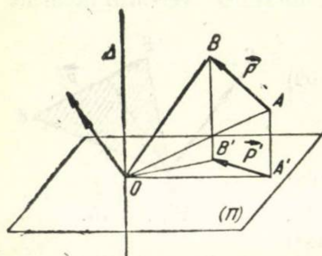


Fig. 3.46.

$$M_\Delta(\vec{P}_A) = M_O(\vec{P}'_{A'})$$

Dacă în punctul A sînt aplicate n forţe $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$, suma momentelor lor faţă de un punct comun O se exprimă cu formula

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{P}_k) = \vec{OA} \times \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k. \tag{3.107}$$

Dacă forţele $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ au o rezultantă $\vec{R}$, această formulă exprimă *teorema lui Varignon*: suma momentelor forţelor, aplicate într-un punct, este egală cu momentul rezultantei

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{P}_k) = \vec{M}_O(\vec{R}_A). \tag{3.108}$$

Dacă însă forţele $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ sînt în echilibru, atunci

$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k = 0$ şi formula (3.107) ia forma

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{P}_k) = 0. \tag{3.109}$$

Proiectînd ambii membri ai formulelor (3.108) şi (3.109) pe o axă arbitrară Δ, atunci pentru momentele în raport cu o axă ale unui sistem de forţe concurente se obţin formulele

$$\sum_{k=1}^{n} M_\Delta(\vec{P}_k) = M_\Delta(\vec{R}_A), \tag{3.108'}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_\Delta(\vec{P}_k) = 0. \tag{3.109'}$$

3.5
Teoria geometrică a staticii rigidului

§ 3.33. Proprietăţile forţelor exterioare aplicate unui rigid

În mecanică fiecare corp se studiază ca un ansamblu de puncte materiale. Dacă distanţele dintre orice puncte materiale ale corpului rămîn neschimbate la orice acţiuni mecanice, corpul se numeşte *perfect rigid* sau, mai scurt, *rigid*. Forţele care măsoară acţiunea altor corpuri asupra punctelor corpului dat se numesc *forţe exterioare*, aplicate corpului dat. Un ansamblu de forţe exterioare, care, fiind aplicat unui corp rigid nu schimbă starea mecanică a corpului este prin definiţie un *sistem de forţe în echilibru*. În particular, un *sistem în echilibru*, fiind aplicat unui corp rigid, care se găseşte în stare de repaus, nu schimbă această stare a corpului.

În toate problemele mecanicii corpului rigid, acestuia i se pot adăuga orice sisteme de forţe exterioare în echilibru. Ansamblul forţelor, care, fiind adăugat unui sistem dat de forţe, compun împreună cu el un sistem de forţe în echilibru, se numeşte *sistem de echilibrare* al sistemului dat. Două sisteme de forţe, care pot fi echilibrate prin adăugarea aceluiaşi sistem de forţe, se numesc *sisteme* echivalente. În toate problemele de mecanică a corpului rigid, un sistem dat de forţe se poate înlocui cu un sistem, care îi este echivalent. Faptul că sistemul de forţe $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n)$ este echilibrat, se notează: $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n) \backsim 0$ şi despre un astfel de sistem se spune că este echivalent cu zero. Dacă sistemele de forţe $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n)$ şi $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ...$ $..., \vec{Q}_m)$ sînt echivalente, acest fapt se notează astfel:

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n) \backsim (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_m).$$

Dacă în două puncte ale unui rigid sînt aplicate, pe aceeaşi dreaptă, două forţe egale în modul şi opuse ca sens, ele se echilibrează pe acel corp şi invers, dacă două forţe se echilibrează reciproc pe un corp rigid, ele au module egale şi sînt îndreptate, în sensuri opuse, pe aceeaşi dreaptă. Din această proprietate rezultă că o forţă dată este echivalentă cu o altă forţă al cărei vector este egal cu vectorul forţei date, iar punctul ei de aplicaţie este deplasat într-un punct oarecare pe linia de acţiune a forţei date. De aceea, în statica geometrică a corpului solid vectorul unei forţe exterioare nu se consideră aplicat într-un punct anumit, ci ca alunecînd pe o dreaptă dată. Dacă o forţă dată $\vec{R}$ este rezultantă a sistemului de forţe $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n)$, aplicate în acelaşi punct A, atunci ea este echivalentă cu acest sistem: $\vec{R}_A \backsim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n)$. Dacă sistemul dat $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n)$ se transformă în sis-

temul $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \ldots, \vec{Q}_m)$ cu ajutorul deplasării forţelor pe liniile de acţiune, prin adunarea şi descompunerea forţelor aplicate într-un punct, prin adăugarea şi înlăturarea unor sisteme echilibrate de forţe, atunci sistemul dat şi cel obţinut vor fi echivalente între ele.

Dacă acţiunea corpului *II* (fig. 3.47) asupra corpului *I* se măsoară prin forţa $\vec{P}_A$, atunci acţiunea corpului *I* asupra corpului *II* se măsoară prin forţa $\vec{Q}_B$, care are aceeaşi valoare cu forţa $\vec{P}_A$ şi este îndreptată după aceeaşi dreaptă *AB* ca şi această forţă, însă în sens opus. În aceasta constă *legea egalităţii acţiunii şi reacţiunii.*

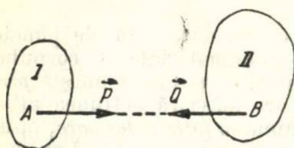


Fig. 3.47.

Dacă din condiţiile problemei, un corp rigid trebuie să se rezeme pe alte corpuri rigide sau trebuie să fie legat de ele prin fire întinse, atunci un astfel de corp nu este liber, iar limitările care împiedică mişcarea acestui corp, provocate de alte corpuri, se numesc *legături*. Forţele, care măsoară acţiunea asupra unui corp supus la legături din partea acelor corpuri care realizează legăturile impuse, se numesc *reacţiunile legăturilor*.

Reacţiunea unui fir este îndreptată dinspre corp în lungul firului. Reacţiunea unei suprafeţe de reazim este îndreptată dinspre suprafaţă în acea parte, unde se găseşte corpul. Dacă reacţiunea unei suprafeţe de sprijin este îndreptată obligator pe normala la suprafaţă în punctul de sprijin, suprafaţa se numeşte *netedă*. În caz contrar, reacţiunea $\vec{R}_A$ (fig. 3.48) se descompune într-o componentă $\vec{N}_A$ după normala la suprafaţă şi o componentă $\vec{F}_A$ perpendiculară pe ea. Componenta $\vec{N}_A$ se numeşte *reacţiune normală a suprafeţei*. Componenta $\vec{F}_A$ măsoară reacţiunea la o alunecare posibilă a corpului pe suprafaţa de reazim şi se numeşte *forţă de frecare de alunecare*. Raportul dintre mărimea forţei de frecare de alunecare şi mărimea forţei de reacţiune normală, atunci cînd corpul este în mişcare, se numeşte *coeficient de frecare de alunecare*. Raportul dintre mărimea forţei de frecare maxime şi mărimea reacţiunii normale, în cazul cînd corpul este în repaus, se numeşte *coeficient de frecare statică*. Coeficientul de frecare static este mai mare decît coeficientul de frecare de alunecare. Unghiul de deviere maximă a reacţiunii suprafeţei de sprijin de la normală, a cărui tangentă trigonometrică este egală cu coeficientul de frecare statică, se numeşte *unghi de frecare*, iar conul cu vîrful în punctul de contact al corpului cu suprafaţa de sprijin, ale cărui generatoare indică abaterile maxime ale reacţiunilor de la normala suprafeţei de sprijin, se numeşte *con de frecare*. Dacă punctul material trebuie să rămînă pe o supra-

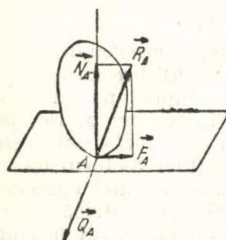


Fig. 3.48.

față rugoasă sub acțiunea unei forțe date $\vec{P}$, atunci pentru echilibrul punctului este necesar și suficient ca vectorul $\vec{P}$ să fie cuprins în interiorul conului de frecare, sau în cazul limită să fie situat pe o generatoare a lui.

§ 3.34. Forțe concurente

Sistemul de forțe exterioare $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n)$, aplicate în diferite puncte ale unui același rigid, se numește *sistem de forțe concurente*, dacă liniile de acțiune ale acestor forțe se intersectează într-un punct C. Sistemul de forțe concurente este echivalent cu o singură forță $\vec{R}_C$, al cărei vector este egal cu suma vectorilor tuturor forțelor sistemului, iar linia de acțiune trece prin punctul de concurență: $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots, \vec{P}_n) \backsim \vec{R}_C$; $\vec{R} = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{P}_k$. În particular, dacă $\vec{R} = 0$, sistemul de forțe concurente este echivalent cu zero, adică este în echilibru.

Criteriul geometric de echilibru al unui sistem de forțe concurente este închiderea *poligonului de forțe*, compus din vectorii acestor forțe, iar analitic condițiile de echilibru se exprimă prin egalarea cu zero a sumelor proiecțiilor forțelor date pe trei axe, nesituate în același plan: $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \sum\limits_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \sum\limits_{k=1}^{n} P_{kz} = 0$, adică prin aceleași ecuații (3.95), care exprimau condițiile de echilibru ale forțelor într-un punct.

Dacă sistemul de forțe $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n)$ concurente în punctul C este echilibrat de o singură forță $\vec{Q}_A$, atunci linia de acțiune a acestei forțe trece prin punctul de concurență C al sistemului dat, iar vectorul ei este $\vec{Q} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \vec{P}_k$. În particular dacă două forțe concurente sînt echilibrate de o a treia, toate cele trei forțe sînt situate în același plan și formează un sistem convergent.

Exemplu. Un arc cu trei articulații (fig. 3.49, *a*), compus din două părți, legate prin articulația C, este fixat pe două articulații fixe A și B și se găsește sub acțiunea sarcinii $\vec{P}_D$, al cărei vector este situat în același plan cu articulațiile A, B, C. Să se găsească reacțiunile $\vec{S}_A$ și $\vec{Q}_B$ ale articulațiilor A și B. Deoarece

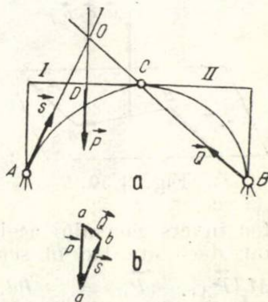


Fig. 3.49.

jumătatea neîncărcată a arcului se găsește sub acțiunea doar a două reacțiuni în punctele B și C, atunci $\vec{Q}_B \parallel BC$. Deoarece forțele $\vec{P}_D$ și $\vec{Q}_B$ sînt concurente în punctul O, atunci $\vec{S}_A \parallel AO$. Vectorii $\vec{S}$ și $\vec{Q}$ se obțin din triunghiul de forțe dab (fig. 3.49, b), în care $da \parallel \vec{P}$, $ab \parallel AO$, $bd \parallel BO$.

§ 3.35. Cupluri de forțe

Se numește *cuplu de forțe* un sistem de două forțe exterioare, ale căror module sînt egale între ele, liniile de acțiune paralele, iar sensurile opuse. Distanța dintre liniile de acțiune a forțelor cuplului se numește *braț*.

Produsul dintre modulul forțelor cuplului și braț se numește *modulul momentului cuplului*. Un cuplu de forțe, al căror modul este P și care sînt aplicate în punctele A și B, se notează $(\vec{P}_A, -\vec{P}_B)$. Dacă brațul este egal cu d, momentul are modulul Pd. Suma vectorilor momentelor forțelor cuplului în jurul oricărui centru este aceeași și se exprimă cu formula

$$\vec{M}_O(\vec{P}_A) + \vec{M}_O(-\vec{P}_B) = \vec{BA} \times \vec{P} = \vec{M}_B(\vec{P}_A).$$

Vectorul liber (fig. 3.50) egal cu suma momentelor forțelor cuplului în jurul unui centru arbitrar, se numește *momentul cuplului* și se notează $\vec{M}(\vec{P}_A, -\vec{P}_B)$, astfel că

$$\vec{M}(\vec{P}_A, -\vec{P}_B) = \vec{BA} \times \vec{P}. \tag{3.110}$$

Momentul cuplului are modulul $|\vec{M}(\vec{P}_A, -\vec{P}_B)| = Pd$ și este îndreptat perpendicular pe planul cuplului în aceeași parte a lui ca și vectorul moment $\vec{M}_B(\vec{P}_A)$. Prin urmare, în cazul convenției triedrului drept pentru produsul vectorial, momentul cuplului este îndreptat dinspre plan în acea parte, de la care cuplul se observă ca rotindu-și brațul în sens invers mersului acelor ceasornicului.

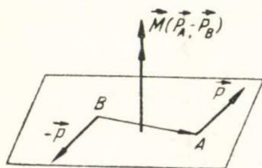


Fig. 3.50.

Atunci cînd planul cuplului este observat dintr-o parte aleasă arbitrar, momentului cuplului i se atribuie semnul pozitiv sau negativ după felul cum cuplul pare că-și rotește brațul: dacă rotația are loc invers mersului acelor ceasornicului, $M(\vec{P}_A, -\vec{P}_B) = +Pd$, iar dacă are loc în sensul mersului acelor ceasornicului, atunci $M(\vec{P}_A, -\vec{P}_B) = -Pd$. Momentul unui cuplu servește ca măsură a acțiunii mecanice a acestui cuplu asupra corpului căruia îi este aplicat.

Două cupluri, care au acelaşi moment, sînt echivalente şi invers, dacă două cupluri sînt echivalente, momentele lor sînt egale între ele. În particular, dacă două cupluri sînt situate într-un plan sau în plane paralele, atunci pentru echivalența lor este necesar şi suficient ca scalarii momentelor lor să fie egali. Orice sistem de cupluri, aplicate unui corp, este echivalent cu un cuplu unic, al cărui vector de moment este egal cu suma momentelor acestor cupluri:

$$\sum_{k=1}^{n} (\vec{P}_k, -\vec{P}_k) \backsim (\vec{R}_A, -\vec{R}_B) \text{ și } \vec{M}(\vec{R}_A, -\vec{R}_B) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}(\vec{P}_k, -\vec{P}_k).$$

În particular, un sistem plan de cupluri este echivalent cu un cuplu unic în acelaşi plan şi mărimea algebrică a momentului său este egală cu suma algebrică a scalarilor momentelor cuplurilor date. *Condiția* necesară şi suficientă *ca un sistem de cupluri* să fie în echilibru este ca suma momentelor lor să fie egală cu zero. În particular, un sistem plan de cupluri este în echilibru atunci şi numai atunci, cînd suma algebrică a scalarilor momentelor acestor cupluri este egală cu zero. Cuplul nu poate fi echivalent cu o forță şi nu poate fi echilibrat cu o singură forță. Cu ajutorul unui cuplu, forța $\vec{P}_A$ poate fi deplasată, fără a-i schimba vectorul $\vec{P}$, din punctul A în orice punct B, adăugînd cuplul $(\vec{P}_A, -\vec{P}_B)$ de moment $\vec{M}(\vec{P}_A, -\vec{P}_B) = \vec{M}_B(\vec{P}_A)$, adică $\vec{P}_A \backsim \vec{P}_B$, $(\vec{P}_A, -\vec{P}_B)$. Această operație se numeşte *transportul paralel al forței*.

Exemplu. Un arc cu trei articulații, A, B şi C (fig. 3.51) se găseşte sub acțiunea cuplului $(\vec{P}, -\vec{P})$, aplicat unei jumătăți în planul articulațiilor A, B, C. Să se găsească reacțiunile $\vec{S}_A$ şi $\vec{Q}_B$.

Întrucît aceste reacțiuni trebuie să formeze un cuplu, care să echilibreze sarcina dată, $M(\vec{Q}_B, \vec{S}_A) + M(\vec{P}, -\vec{P}) = 0$. Deoarece $\vec{Q}_B \parallel BC$, atunci $\vec{S}_A \parallel BC$ şi $S = Q = \frac{|M(\vec{P}, -\vec{P})|}{h}$, unde h este distanța de la articulația A pînă la dreapta BC.

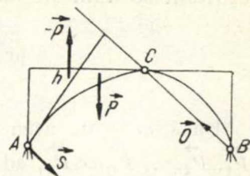


Fig. 3.51.

§ 3.36. Reducerea unui sistem de forțe într-un punct dat

Orice sistem de forțe exterioare $(P_1, P_2, ..., P_n)$, aplicat unui corp rigid, se poate transforma într-un sistem cu care este echivalent, constînd dintr-o forță aplicată unui punct dinainte dat O şi dintr-un cuplu

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n) \backsim \vec{R}_0, \quad (\vec{Q}_A, -\vec{Q}_B). \qquad (3.111)$$

Vectorul $\vec{R}$ al forței este egal cu suma vectorilor forțelor date

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k. \tag{3.112}$$

El se numește *vectorul rezultant al sistemului de forțe*. Vectorul rezultant nu depinde de alegerea centrului O de reducere. Vectorul $\vec{M}_O$ al momentului cuplului $(\vec{Q}_A, -\vec{Q}_B)$ este egal cu suma momentelor forțelor date în jurul centrului de reducere ales

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{P}_k). \tag{3.113}$$

El se numește *vectorul moment rezultant al sistemului de forțe*. Momentul rezultant depinde în general de alegerea centrului de reducere, iar vectorii $\vec{M}_O$ și $\vec{M}_{O'}$ sînt legați între ei cu formula

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O'} + \overrightarrow{OO'} \times \vec{R}. \tag{3.114}$$

Transformarea ulterioară a sistemului depinde de valoarea rezultantei $\vec{R}$. Dacă $\vec{R} = 0$, atunci și $\vec{M}_O = \vec{M}_{O'}$, adică momentul rezultant nu depinde în acest caz de alegerea centrului de reducere și sistemul, după reducere, se transformă într-un singur cuplu, al cărui vector de moment este egal cu valoarea constantă a momentului rezultant. Dacă această valoare este zero, sistemul este în echilibru.

Dacă $\vec{R} \neq 0$ (fig. 3.52), atunci proiectînd pe suportul vectorului rezultant formula (3.114), se obține: $\text{pr}_{\vec{R}} \vec{M}_O = \text{pr}_{\vec{R}} \vec{M}_{O'}$. Mărimea constantă m a proiecției momentului rezultant pe direcția vectorului rezultant se numește *momentul rezultant minim al sistemului de forțe*

$$\text{pr}_{\vec{R}} \vec{M}_O = m = \frac{(\vec{M}_O \cdot \vec{R})}{|\vec{R}|}. \tag{3.115}$$

Dacă $m = 0$, atunci sau $\vec{M}_O = 0$, sau $\vec{M}_O \perp \vec{R}$. În primul caz $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n) \backsim \vec{R}_0$, adică sistemul este echivalent cu forța rezultantă, a cărei linie de acțiune trece prin centrul O de reducere. În al doilea caz (fig. 3.53) cuplul poate fi luat în forma $(-\vec{R}_O, \vec{R}_C)$, unde $OC \perp \vec{R}$,

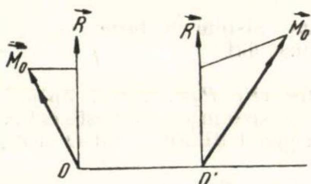


Fig. 3.52.

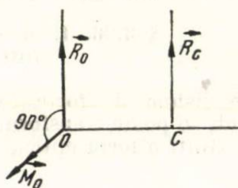


Fig. 3.53.

$\vec{M}_O$, $OC = \dfrac{|\vec{M}_O|}{|\vec{R}|}$ și atunci $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n) \backsim \vec{R}_C$, adică sistemul este din nou echivalent cu o forță rezultantă unică $\vec{R}_C$. În acest caz

$$\vec{M}_O(\vec{R}_C) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{P}_k).$$

Dacă $m \neq 0$ (fig. 3.54), atunci descompunînd $\vec{M}_O$ în componentele $\vec{m}$ și $\vec{n}$ astfel ca $\vec{m} \parallel \vec{R}$ și $\vec{n} \perp \vec{R}$. înlocuim cuplul ce are momentul $\vec{M}_O$, prin două cupluri, $(-\vec{R}_O, \vec{R}_C)$ cu momentul $\vec{n}$, avînd $OC \perp \vec{R}$, $\vec{M}_O$, $OC = \dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{R}|}$, și $(\vec{T}_D, -\vec{T}_C)$ cu momentul $\vec{m}$, și atunci $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n) \backsim \vec{R}_C, (\vec{T}_D, -\vec{T}_C)$.

Momentul rezultant $\vec{M}_C$ are la reducerea în centrul C un vector egal cu momentul $\vec{m}$: $\vec{M}_C = \vec{m}$. Mărimea algebrică a acestei componente este egală cu cel mai mic moment m al sistemului dat. Sistemul redus — $\vec{R}_C, (\vec{T}_D, -\vec{T}_C)$, compus dintr-o forță și un cuplu al cărui plan este perpendicular pe vectorul forței, se numește *torsor minimal* sau *dinamă*. Raportul dintre vectorul $\vec{m}$ al momentului cuplului torsorului minimal și vectorul $\vec{R}$ al forței sale se numește *parametrul torsorului minimal*.

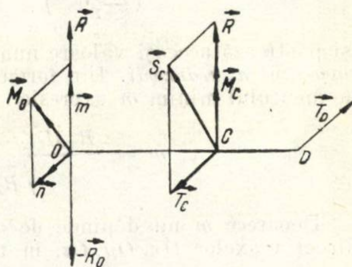


Fig. 3.54.

Adunînd forțele $\vec{R}_C$ și $-\vec{T}_C$ în rezultanta $\vec{S}_C$, se obține: $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n) \backsim \vec{S}_C, \vec{T}_D$ astfel că vectorii $\vec{S}_C$ și $\vec{T}_D$ nu se intersectează.

Prin urmare, rezultatele reducerii sistemului se pot așeza într-o tabelă

$\vec{R} \neq 0$, $m \neq 0$	Torsor minimal sau două forțe care nu se intersectează,	$\vec{R} = 0$, $\vec{M} \neq 0$	un cuplu,
$\vec{R} \neq 0$, $m = 0$	forță rezultantă,	$\vec{R} = 0$, $\vec{M} = 0$	sistem în echilibru (echivalent cu zero).

§ 3.37. Invarianţii reducerii

Dacă sistemul de forţe $(\vec{P}_1, \vec{P}_2 ..., \vec{P}_n)$ este redus la centrul O, considerat ca origine a axelor de coordonate Ox, Oy, Oz, atunci vectorul rezultant $\vec{R}$ şi momentul rezultant $\vec{M}_O$ se exprimă prin proiecţiile X_k, Y_k, Z_k ale forţelor $\vec{P}_k$ şi prin coordonatele x_k, y_k, z_k ale punctelor lor de aplicaţie cu ajutorul formulelor

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} X_k,\; R_y = \sum_{k=1}^{n} Y_k,\; R_z = \sum_{k=1}^{n} Z_k,$$

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} (y_k Z_k - z_k Y_k),\quad M_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} z_k X_k - x_k Z_k), \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} (x_k Y_k = y_k X_k). \end{aligned}\right\} \tag{3.116}$$

Deoarece $|\vec{R}|$ nu depinde de alegerea centrului O, în toate sistemele de axe expresia

$$I_1 = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)^2 \tag{3.117}$$

îşi păstrează aceeaşi valoare numerică şi de aceea se numeşte *primul invariant al reducerii*. Din formula (3.115) se obţine pentru scalarul momentului minim m expresia

$$m = \frac{R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}.$$

Deoarece m nu depinde de alegerea centrului de reducere şi de direcţia axelor Ox, Oy, Oz, în toate cazurile expresia

$$I_2 = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz} \tag{3.118}$$

îşi păstrează aceeaşi valoare numerică şi de aceea se numeşte *al doilea invariant al reducerii*. Dacă $I_1 = 0$, atunci şi $I_2 = 0$ şi sistemul se reduce la un cuplu sau este echilibrat. Dacă $I_1 \neq 0$, iar $I_2 = 0$, sistemul se reduce la o forţă rezultantă. Dacă $I_1 \neq 0$ şi $I_2 \neq 0$, sistemul se reduce la o dinamă.

§ 3.38. Axa centrală

Dacă rezultanta $\vec{R} \neq 0$ şi momentul minim $m \neq 0$, există o dreaptă, faţă de punctele căreia momentul rezultant al sistemului de forţe dat este paralel cu vectorul rezultant al acestui sistem.

Această dreaptă se numeşte *axa centrală a sistemului de forţe*. În orice sistem de axe $Oxyz$, ea este determinată de ecuaţiile

$$\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z} \tag{3.119}$$

Vectorul forţă al acelei diname, care este echivalentă cu sistemul de forţe dat, este îndreptat după axa centrală. Prin axă centrală a unui sistem, echivalent cu o forţă rezultantă $\vec{R}_C$, se înţelege linia de acţiune a acestei forţe. Ecuaţiile de proiecţii ale liniei de acţiune a forţei rezultante pe planele de coordonate se exprimă cu formulele

$$yR_z - zR_y = M_{Ox}, \; zR_x - xR_z = M_{Oy}, \; xR_y - yR_x = M_{Oz}. \tag{3.120}$$

§ 3.39. Condiţiile necesare de echilibru ale unui rigid

Dacă sub acţiunea unui sistem $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n)$ de forţe exterioare un rigid se găseşte în echilibru, acest sistem trebuie să fie în echilibru, adică pentru el $\vec{R} = 0$ şi $\vec{M}_O = O$. În proiecţii pe axele Ox, Oy, Oz aceste condiţii dau şase ecuaţii de echilibru

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \; \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \; \sum_{k=1}^{n} P_{kz} = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\vec{P}_k) = \sum_{k=1}^{n} (y_k P_{kz} - z_k P_{ky}) = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\vec{P}_k) = \sum_{k=1}^{n} (z_k P_{kx} - x_k P_{kz}) = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\vec{P}_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k P_{ky} - y_k P_{kx}) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.121}$$

adică în cazul echilibrului unui corp rigid sub acţiunea unui sistem de forţe exterioare, suma proiecţiilor tuturor forţelor aplicate corpului pe fiecare axă de coordonate şi suma momentelor acestor forţe în raport cu fiecare axă de coordonate sînt egale cu zero. În cazul corpului supus la legături, în aceste ecuaţii intervin atît forţele date, cît şi reacţiunile legăturilor, care apar.

Pentru un rigid cu un punct fix O, condiţiile de echilibru sînt reprezentate de ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\vec{F}_k) = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F}_k) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.122}$$

unde $\vec{F}_k$ sînt forţele date.

Exemplu. O uşă de greutate P, care se roteşte în jurul unei axe verticale AB, este fixată jos într-un lagăr axial A şi sus în lagărul B; ea se află în repaus sub acţiunea forţei $\vec{Q}_D$, aplicată normal pe planul uşii în punctul D, şi al unei forţe orizontale necunoscute $\vec{T}_C$, aplicată în punctul C al cărei suport formează cu latura AC un unghi de 45°. Să se determine scalarul T al forţei $\vec{T}_C$ şi reacţiunile $\vec{S}_A$ şi $\vec{R}_B$ (fig. 3.55).

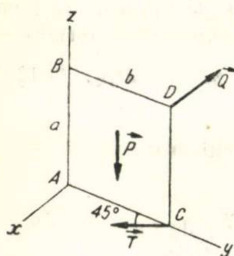


Fig. 3.55.

Luînd AB drept axă Oz şi AC drept axă Oy, compunem tabela proiecţiilor şi momentelor forţelor

	x	y	z	M_{Ox}	M_{Oy}	M_{Oz}
$\vec{P}$	0	0	$-P$	$-\frac{bP}{2}$	0	0
$\vec{Q}$	$-Q$	0	0	0	$-aQ$	bQ
$\vec{T}$	$T\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-T\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	0	$-\frac{b\sqrt{2}}{2}T$
$\vec{S}_A$	S_x	S_y	S_z	0	0	0
$\vec{R}_B$	R_x	R_y	0	$-aR_y$	aR_x	0

De aici rezultă ecuaţiile de echilibru

$$S_x + R_x - Q + T\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad S_y + R_y - T\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad -P + S_z = 0,$$

$$-aR_y - \frac{bP}{2} = 0, \qquad aR_x - aQ = 0, \qquad bQ - \frac{b\sqrt{2}}{2}T = 0.$$

Prin urmare

$$T = Q\sqrt{2}, \quad R_x = Q, R_y = -\frac{Pb}{2a}, \quad S_y = Q + \frac{Pb}{2a}, \quad S_z = P.$$

Pentru un rigid cu două puncte fixe O și O', condiția de echilibru este

$$\sum_{k=1}^{n} M_{OO'}(\vec{F}_k) = 0, \tag{3.123}$$

unde $\vec{F}_k$ sînt forțele date. Considerînd dreapta OO' drept axă Oz, pentru determinarea reacțiunilor $\vec{N}_0$ și $\vec{N}'_0$ ale punctelor fixe O și O' obținem ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} F_{kx} + N_x + N'_x = 0, \sum_{k=1}^{n} F_{ky} + N_y + N'_y = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} F_{kz} + N_z + N' = 0, \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\vec{F}_k) - hN'_y = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\vec{F}_k) + hN'_x = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.124}$$

unde $h = OO'$. Aceste ecuații determină componentele transversale la axa OO' și ale lui $\vec{N}_x$, $\vec{N}_y$, $\vec{N}'_x$, $\vec{N}'_y$ și suma $\vec{N}_z + \vec{N}'_z$ ale componentelor longitudinale.

§ 3.40 Sistemul plan de forțe

Dacă suporturile tuturor forțelor exterioare, aplicate unui rigid se găsesc în același plan, sistemul se numește *plan*. Suportul rezultantei lui, $\vec{R}$ este situată în același plan, iar momentul rezultant $\vec{M}_O$ calculat în raport cu un punct O din acest plan este perpendicular pe plan. Din acest motiv, pentru un sistem plan momentul rezultant minim $m = 0$ și acest sistem plan nu se poate reduce la o dinamă, ci este echivalent cu o forță unică $\vec{R}$, dacă $\vec{R} \neq 0$, sau cu un cuplu, dacă $\vec{R} = 0$ și $\vec{M}_O \neq 0$ sau, în sfîrșit, este în echilibru dacă $\vec{R} = 0$ și $\vec{M}_O = 0$. Dacă se ia ca plan xOy, planul forțelor, condițiile de echilibru ale unui sistem plan se exprimă prin trei ecuații

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \sum_{k=1}^{n} M_O(\vec{P}_k) = 0. \tag{3.125}$$

Exemplu. Un arc cu trei articulaţii, A, B şi C se găseşte sub acţiunea sarcinilor $\vec{P}_1$ şi $\vec{P}_2$. Să se găsească reacţiunile $\vec{S_A}$ şi $\vec{Q_B}$ (fig. 3.56). Ecuaţiile de echilibru ale arcului, considerat ca un singur corp, sînt

$$P_{1x} + P_{2x} + S_x + Q_x = 0,$$
$$P_{1y} + P_{2y} + S_y + Q_y = 0.$$
$$M_A(\vec{P}_1) + M_A(\vec{P}_2) + (a_1 + a_2) Q_y = 0.$$

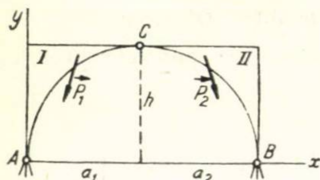


Fig. 3.56.

Ele conţin patru necunoscute. A patra ecuaţie dă condiţia de echilibru a jumătăţii din stînga a arcului

$$M_C(\vec{P}_1) - a_1 S_y + h S_x = 0.$$

În locul acestor trei ecuaţii se pot folosi, independent de alegerea axelor, trei ecuaţii de momente. Astfel, pentru ca un sistem plan de forţe să fie în echilibru este necesar şi suficient să fie nule sumele algebrice ale momentelor forţelor în raport cu trei puncte din planul lor nesituate pe aceeaşi dreaptă.

§ 3.41. Metoda grafică de reducere a unui sistem plan de forţe

Pentru reducerea grafică a unui sistem plan de forţe ($\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, ..., $\vec{P}_n$), se construieşte înainte de toate *poligonul forţelor* (fig. 3.57), adică linia frîntă $a\ a_1, a_2 \ldots b$, ale cărei laturi sînt echipolente cu vectorii forţe ai sistemului dat. Vîrful acestui poligon se leagă prin razele (*1*), (*2*), (*3*,)...,($n + 1$) cu un pol arbitrar O din planul forţelor. După aceasta, dintr-un punct arbitrar K se construieşte linia frîntă $KB_1B_2...B_nL$ (fig. 3.58), ale cărei vîrfuri intermediare $B_1B_2...B_n$ se

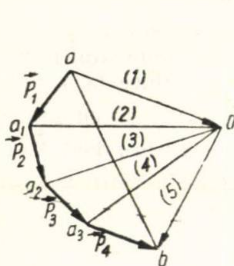


Fig. 3.57.

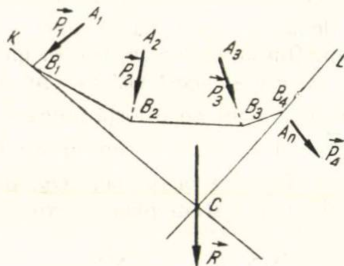


Fig. 3.58.

află pe suporturile forțelor sistemului dat, laturile fiind paralele cu razele polare ale poligonului de forțe, care se reazimă pe laturile corespunzătoare forței examinate. Această linie frîntă $KB_1B_2...B_nL$ se numește *poligonul lui Varignon* sau *poligonul funicular*.

Sînt posibile trei cazuri.

1) Dacă poligonul forțelor nu este închis (fig. 3.57), vectorul $\vec{ab}$, care îl închide, reprezintă vectorul rezultant $\vec{R}$ al sistemului și sistemul este echivalent cu o forță unică $\vec{R}_C$ care trece prin punctul C de intersecție a laturilor extreme ale poligonului lui Varignon (fig. 3.58).

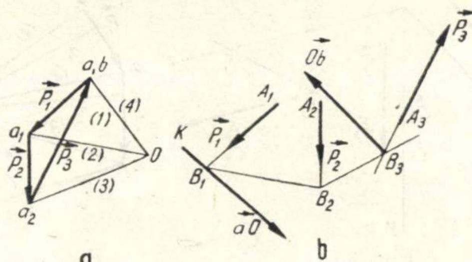


Fig. 3.59.

2) Dacă poligonul forțelor este închis (fig. 3.59, *a*), prima și ultima rază se confundă, iar laturile extreme ale poligonului lui Varignon sînt paralele între ele. Vectorul rezultant $\vec{R} = 0$ și sistemul este echivalent cu un cuplu de forțe (fig. 3.59, *b*), ale cărui forțe sînt îndreptate după laturile extreme ale poligonului lui Varignon și se reprezintă printr-o rază polară dublă, orientată în sensuri opuse: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n) \backsim (\vec{aO}_{B_1}, \vec{Ob}_{B_3})$.

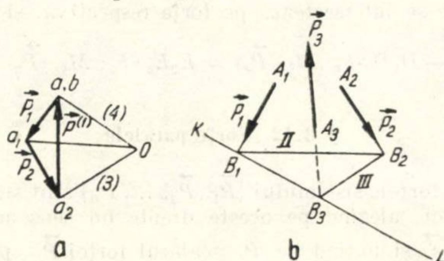


Fig. 3.60.

3) Dacă avem $\vec{R} = 0$ (fig. 3.60, *a*) și laturile extreme ale poligonului lui Varignon sînt situate pe aceeași dreaptă (fig. 3.60, *b*), el se numește *închis* și sistemul plan de forțe este în acest caz în echilibru.

Figura compusă din poligonul forţelor şi din razele sale se numeşte *conjugată* cu figura compusă din poligonul lui Varignon şi din liniile de acţiune ale forţelor sistemului dat în sensul că pentru fiecare dreaptă din prima figură există o dreaptă paralelă cu a doua, iar unui triunghi din prima figură (de exemplu ΔaOa_1), îi corespunde pe a doua un punct B_1, în care se intersectează dreptele paralele cu laturile triunghiului primei figuri. Prin schimbarea punctului O se schimbă razele poligonului de forţă şi laturile poligonului lui Varignon.

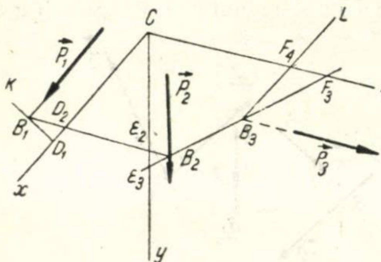


Fig. 3.61.

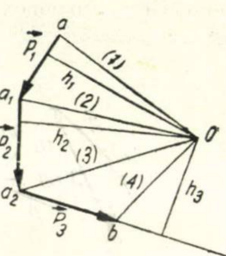


Fig. 3.62.

În acelaşi timp, laturile omoloage a două poligoane Varignon, construite pentru punctele O şi O', se intersectează pe o dreaptă paralelă cu OO'. Cu ajutorul poligonului lui Varignon se pot determina grafic momentele forţelor unui sistem plan faţă de un punct C. Pentru aceasta, prin punctul C se duc drepte, paralele cu forţele (fig. 3.61), iar din punctul O se coboară perpendiculare pe laturile poligonului forţelor (fig. 3.62). Pe dreptele duse prin C paralele cu forţele se însemnă segmentele delimitate pe ele de către laturile poligonului Varignon, care se intersectează pe forţa respectivă, şi se obţine

$$M_C(\vec{P}_1) = -D_1D_2 \cdot h_1;\ M_C(\vec{P}_2) = E_2E_3 \cdot h_2;\ M_C(\vec{P}_3) = F_3F_4 \cdot h_3.$$

§ 3.42. Forţe paralele

Dacă toate forţele sistemului $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n)$ sînt situate pe drepte paralele, atunci, alegînd pe aceste drepte un sens anumit, indicat prin versorul $\vec{e}$, şi notînd cu P_k scalarul forţei $\vec{P}_k$, pentru vectorul rezultant $\vec{R}$ al sistemului şi pentru momentul rezultant $\vec{M}_O$ obţinem formulele

$$\vec{R} = \vec{e}\sum_{k=1}^{n} P_k, \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} P_k\vec{r}_k \times \vec{e},$$

unde $\vec{r}_k$ sînt razele vectoare ale punctelor de aplicație ale forțelor față de centrul O. Vectorul

$$\vec{S}_O = \sum_{k=1}^{n} P_k \vec{r}_k \tag{3.126}$$

se numește *vectorul momentului static al sistemului de forțe paralele* față de punctul O, iar proiecțiile pe axele, Ox, Oy, Oz, adică

$$S_x = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k, \quad S_y = \sum_{k=1}^{n} P_k y_k, \quad S_z = \sum_{k=1}^{n} P_k z_k, \tag{3.127}$$

se numesc *momentele statice în raport cu planele yOz, zOx și xOy respectiv*. Momentul rezultant $\vec{M}_O$ se exprimă în funcție de cel static $\vec{S}_O$ cu formula

$$\vec{M}_O = \vec{S}_O \times \vec{e}, \tag{3.128}$$

Dacă se deplasează punctul O în O', astfel că $\overrightarrow{OO'} = \vec{\rho}$, momentul static se schimbă după formula

$$\vec{S}_O = \vec{S}_{O'} + \vec{\rho} \sum_{k=1}^{n} P_k. \tag{3.129}$$

Dacă $\sum_{k=1}^{n} P_k \neq 0$, atunci $\vec{R} \perp \vec{M}_O$ și de aceea un sistem de forțe paralele nu se poate reduce la o dinamă. În cazul cînd $\sum_{k=1}^{n} P_k \neq 0$, există un centru C, în care momentul static este egal cu zero. Acest centru se numește *centrul forțelor paralele*. Poziția lui față de originea arbitrară O este determinată de raza vectoare

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{S}_O}{\sum_{k=1}^{n} P_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \tag{3.130}$$

iar coordonatele sînt date de formulele

$$y_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \quad z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}. \tag{3.131}$$

Poziţia centrului sistemului de forţe paralele nu depinde de direcţia forţelor, ci numai de mărimile lor şi de punctele de aplicaţie. Momentul rezultant $\vec{M}_C = 0$ şi de aceea pentru $\sum_{k=1}^{n} P_k \neq 0$ sistemul de forţe paralele este echivalent cu rezultanta $\vec{R}_C$, a cărei linie de acţiune trece prin centrul sistemului: $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n) \backsim \vec{R}_C$. În cazul a două forţe îndreptate în acelaşi sens, centrul împarte interior segmentul, care uneşte punctele lor de aplicaţie, în părţi, invers proporţionale cu modulele forţelor, şi exterior în cazul forţelor îndreptate în sensuri opuse.

Dacă $\sum_{k=1}^{n} P_k = 0$, momentul static şi cel rezultant nu depind de alegerea centrului sistemului şi sistemul este echivalent cu un cuplu (pentru $\vec{M}_O \neq 0$) sau este în echilibru (pentru $\vec{M}_O = 0$).

Ultima condiţie este satisfăcută pentru $\vec{S}_O = 0$ şi atunci ecuaţiile de echilibru au forma

$$\left.\sum_{k=1}^{n} P_k = 0, \sum_{k=1}^{n} P_k x_k = 0, \sum_{k=1}^{n} P_k y_k = 0, \sum_{k=1}^{n} P_k z_k = 0. \right\} \tag{3.132}$$

Sistemul de forţe paralele rămîne în echilibru cînd se schimbă direcţia forţelor şi echilibrul se numeşte *indiferent* (sau *astatic)*. Condiţia $\vec{M}_O = 0$ este satisfăcută şi pentru $\vec{S}_O \parallel \vec{e}$ şi atunci ecuaţiile de echilibru au forma

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = 0, \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k x_k}{\cos\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k y_k}{\cos\beta} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k z_k}{\cos\gamma}, \tag{3.133}$$

unde α, β, γ, sînt unghiurile cu axele dreptelor pe care sînt situate forţele paralele. Acest echilibru nu se menţine la schimbarea direcţiei forţelor.

§ 3.43. Centrul de greutate

În problemele tehnice, forţele care reprezintă greutăţile punctelor materiale ale unui corp rigid se pot considera paralele şi în acest caz centrul acestor forţe paralele se numeşte *centrul de greutate al corpului*. Poziţia centrului de greutate al corpului faţă de corp nu depinde de orientarea corpului faţă de pămînt. Pentru determinarea centrului de greutate al unui corp continuu, care umple volumul V, se descompune volumul în particule infinit mici ΔV_k. Dacă mărimea greutăţii particulei ΔV_k este ΔP_k, limita raportului $\frac{\Delta P_k}{\Delta V_k}$, atunci cînd ΔV_k se reduce la un punct $M(x, y, z)$, se numeşte *greutate specifică* a

corpului în punctul dat M: $\lim\limits_{\Delta V_k \to M} \frac{\Delta P_k}{\Delta V_k} = \gamma(x, y, z)$. În puncte diferite, greutatea specifică are, în general, valori diferite. Dacă ea este, însă, constantă, corpul se numește *omogen*. Greutatea totală P a corpului se exprimă în funcție de greutatea specifică dată $\gamma(x,y,z)$ cu formula

$$P = \lim_{\Delta V_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} P_k = \iiint_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{3.134}$$

Formulele generale (3.131) pentru coordonatele centrului forțelor paralele, capătă, în cazul centrului de greutate, forma

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\iiint_{(V)} \gamma(x, y, z)\, x\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}, \\ y_C &= \frac{\iiint_{(V)} \gamma(x, y, z)\, y\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}, \\ z_C &= \frac{\iiint_{(V)} \gamma(x, y, z)\, z\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}, \end{aligned}\right\} \tag{3.135}$$

iar în cazul corpului omogen

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\iiint_{(V)} x\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{(V)} dx\, dy\, dz}, \quad y_C = \frac{\iiint_{(V)} y\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{(V)} dx\, dy\, dz}, \\ z_C &= \frac{\iiint_{(V)} z\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{(V)} dx\, dy\, dz}. \end{aligned}\right\} \tag{3.135'}$$

Centrul de greutate al corpului omogen se numește uneori *centrul volumului* acelui corp. Dacă un corp omogen are un plan, o axă sau un centru de simetrie geometrică, centrul lui de greutate este situat

în planul, pe axa sau în centrul de simetrie. Dacă un corp omogen are forma unui strat de grosime infinit mică h, limitat de suprafaţa S, de arie A, atunci, împărţind suprafaţa în elemente infinit mici $\Delta\sigma_k$, pentru coordonatele centrului de greutate se obţin formulele

$$x_G = \frac{\iint_{(S)} x\,\mathrm{d}\sigma}{A}, \quad y_G = \frac{\iint_{(S)} y\,\mathrm{d}\sigma}{A}, \quad z_G = \frac{\iint_{(S)} z\,\mathrm{d}\sigma}{A}. \qquad (3.136)$$

Dacă suprafaţa S este un trapez plan curbiliniu, limitat de curba $y = f(x)$ şi de dreptele $x = a$ şi $x = b$, centrul ei de greutate este determinat de coordonatele

$$x_G = \frac{\int_b^a xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}, \quad y_C = \frac{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}. \qquad (3.136')$$

Acest punct C se numeşte *centrul de greutate al suprafeţei.*

Dacă un corp omogen are forma unei linii infinit subţiri L cu secţiunea transversală σ, atunci, împărţind linia în părţi infinit mici ΔL_k, pentru coordonatele centrului de greutate se obţin formulele

$$x_C = \frac{\int_L x\,\mathrm{d}S}{L}, \quad y_C = \frac{\int_L y\,\mathrm{d}S}{L}, \quad z_C = \frac{\int_L z\,\mathrm{d}S}{L}. \qquad (3.137)$$

Acest punct C se numeşte *centrul de greutate al liniei.*

Dacă un corp, o suprafaţă sau o linie sînt împărţite în n părţi, ale căror dimensiuni şi poziţii ale centrelor de greutate sînt cunoscute, atunci coordonatele centrului de greutate al corpului, suprafeţei sau liniei se determină cu următoarele formule:

pentru corp

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k V_k}{V}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k V_k}{V}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k V_k}{V}$$

pentru suprafaţă

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k A_k}{A}, \quad y_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k A_k}{A}, \quad z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k A_k}{A} \qquad (3.138)$$

pentru linie

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k L_k}{L}, \quad y_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k L_k}{L}, \quad z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k L_k}{L}$$

unde x_k, y_k, z_k sînt coordonatele centrelor de greutate ale părţii respective.

Dacă un corp cu volumul V are golurile $V_k (k = 1,2, ..., n)$, ale căror centre de greutate au coordonatele x_k, y_k, z_k, iar volumul $V' = V + V_1 + V_2 + ... + V_n$ are centrul de greutate în punctul $C'(x', y', z')$, atunci centrul de greutate al volumului V are coordonatele

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{V'x' - \sum_{k=1}^{n} V_k x_k}{V}, \quad y_C = \frac{V'y' - \sum_{k=1}^{n} V_k y_k}{V}, \\ z_C &= \frac{V'z' - \sum_{k=1}^{n} V_k z_k}{V}. \end{aligned}\right\} \quad (3.139)$$

Pentru centrele de greutate ale curbei plane şi ale suprafeţei plane există teoremele Papp-Guldin.

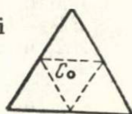
1) Dacă o curbă plană se roteşte cu un unghi oarecare în jurul unei axe oarecare, situată în planul curbei şi care nu intersectează curba, atunci aria suprafeţei de revoluţie, descrisă de curbă în timpul acestei rotaţii, este egală cu lungimea curbei, înmulţită cu lungimea drumului descris de centrul ei de greutate.

2) Dacă o curbă plană închisă se roteşte cu un unghi oarecare în jurul unei axe situate în acelaşi plan cu ea şi care nu-i intersectează conturul, atunci volumul corpului de rotaţie, descris de figură în timpul acestei rotaţii, este egal cu suprafaţa, înmulţită cu lungimea drumului descris de centrul ei de greutate.

Centrul de greutate al unor linii

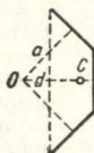
1) Segmentul rectiliniu AB. — Mijlocul C al segmentului $AC = CB$.

2) Perimetrul unui riunghi.



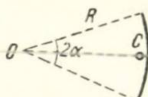
Centrul C al cercului înscris în triunghiul, ale cărui vîrfuri sînt situate pe mijloacele laturilor triunghiului dat.

3) Perimetrul unei linii frînte regulate de lungime L, de coardă d şi de apotemă a.



C este situat pe perpendiculara coborîtă din centrul O pe coardă la distanţa $OC = \frac{ad}{L}$.

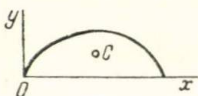
4) Un arc de cerc de rază R cu unghiul la centru 2α



C este situat pe bisectoarea unghiului la centru la distanța $OC = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ de la centrul O al arcului. Pentru un semicerc

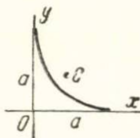
$$OC = \frac{2R}{\pi} \approx \frac{7}{11}\,R.$$

5) Un arc de cicloidă $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$



$$x_C = \pi a, \quad y_C = \frac{4}{3}\,a.$$

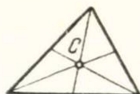
6) Un sfert de astroidă $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, situat în primul cadran



$$x_C = y_C = \frac{2}{5}\,a.$$

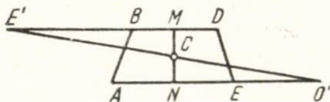
Centrul de greutate al unor suprafețe

1) Suprafața unui triunghi



Punctul C de intersecție al medianelor.

2) Suprafața unui trapez



Pe dreapta MN, care leagă jumătățile bazelor $AE = a$, $BD = b$, la distanța h_a de baza AE, unde

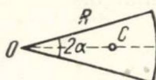
$$h_a = \frac{1}{3}\,h\,\frac{a + 2b}{a + b},$$

h fiind înălțimea trapezului. Centrul C de greutate al trapezului se poate obține construind $BE' = a$, $ED' = b$; la intersecția dreptelor MN și $E'D'$ se află punctul C.

3) Un paralelogram

Punctul de intersecție al diagonalelor.

4) Un sector de cerc de rază R cu unghiul la centru 2α

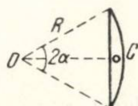


Pe bisectoarea unghiului la centru la distanța $OC = \frac{2}{3} R = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ de centrul O al cercului.

Pentru semicerc

$$OC = \frac{4R}{3\pi} \approx \frac{14}{33} R.$$

5) Un segment de cerc de rază R cu unghiul la centru 2α

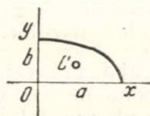


Pe bisectoarea unghiului la centru la distanța

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$

de centrul O al cercului.

6) Suprafața unui sfert din elipsă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$$x_C = \frac{4a}{3\pi}, \ y_C = \frac{4b}{3\pi}.$$

7) Suprafața cicloidei $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

$$x_C = \pi a, \quad y_C = \frac{5}{6} a.$$

8) Suprafața unui sfert din astroida

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$x_C = y_C = \frac{256}{315} \frac{a}{\pi}.$$

9) Suprafața laterală a unei prisme drepte

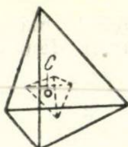
Centrul de greutate al suprafeței coincide cu centrul de greutate al perimetrului secțiunii mijlocii, perpendiculare pe muchii.

10) Suprafața laterală a piramidei.



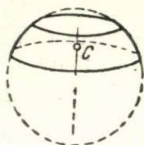
Centrul de greutate al suprafeței coincide cu centrul de greutate al perimetrului secțiunii, duse perpendicular pe înălțime, la distanța de o treime din înălțime, de la bază.

11) Suprafaţa totală a tetraedrului



Centrul de greutate al suprafeţei este situat în centrul sferei înscrise într-un tetraedru, ale cărui vîrfuri se găsesc în centrele de greutate ale feţelor tetraedrului dat.

12) Centrul de greutate al unei zone sferice



În mijlocul săgeţii zonei, adică pe perpendiculara coborîtă pe bazele zonei din centrul sferei, la mijlocul segmentului cuprins între bazele zonei.

Centrul de greutate al unor volume

1) Paralelipipedul

Punctul de intersecţie al diagonalelor.

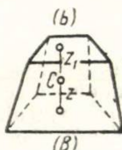
2) Prisma şi cilindrul

Mijlocul segmentului, care leagă centrele de greutate ale suprafeţelor bazelor.

3) Piramida şi conul

Centrul de greutate al volumului coincide cu centrul de greutate al suprafeţei secţiunii, duse paralel cu baza la distanţa de o pătrime, din înălţime, de la bază. Centrul de greutate al tetraedrului este situat la intersecţia dreptelor, care unesc vîrfurile cu centrele de greutate ale feţelor opuse.

4) Un trunchi de piramidă cu aria bazei mari B şi a bazei mici b

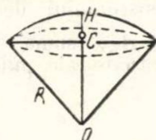


Centrul de greutate este situat pe segmentul de dreaptă, care uneşte centrele de greutate ale suprafeţelor bazelor şi îl împarte în raportul

$$\frac{z}{z_1} = \frac{B + 3b + 2\sqrt{AB}}{b + 3B + 2\sqrt{AB}},$$

unde z este distanţa de la C la baza mare iar z_1 distanţa de la C la baza mică,

5) Un sector sferic de rază R şi înălţime H



Centrul de greutate este situat pe axa de simetrie (înălţime) la distanţa

$$OC = \frac{3}{4}\left(R - \frac{H}{2}\right)$$

de centrul O al sferei. În cazul unei emisfere $OC = \frac{3}{8} R$.

6) Un segment de sferă de rază R, înălţime H şi raza bazei a

Centrul de greutate este situat pe axa de simetrie (înălţime) la distanţa

$$OC = \frac{\pi a^4}{V},$$

de centrul sferei, unde V este volumul segmentului

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H -$$

$$- \frac{1}{3}\pi a^2 \sqrt{R^2 - a^2}.$$

§ 3.44. Echilibrul unui corp greu, rezemat pe un plan orizontal neted

Dacă un corp se reazemă cu punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pe o suprafaţă, atunci poligonul convex, care are ca vîrfuri unele puncte de reazem şi care conţine în interior pe celelalte, se numeşte *poligon de susţinere*. Cînd corpul este în echilibru, proiecţia centrului său de greutate trebuie să cadă în interiorul poligonului de reazem, sau — la limită — pe perimetrul lui. Dacă unui corp, care se reazemă pe o suprafaţă orizontală (fig. 3.63) i se aplică, în afară de greutatea P, şi forţa Q, situată în acelaşi plan cu P şi care tinde să răstoarne corpul în jurul muchiei AA, atunci pentru echilibru trebuie să fie satisfăcută condiţia $|M_{AA}(\vec{P})| > |M_{AA}(\vec{Q})|$ sau, notînd braţele forţelor $\vec{P}$ şi $\vec{Q}$ cu p şi q, trebuie să avem $Pp > Qq$. Produsul Pp se numeşte *moment de stabilitate*, iar produsul Qq — *moment de răsturnare*.

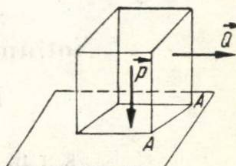


Fig. 3.63.

§ 3.45. Virialul

Se numeşte *virial* faţă de punctul O al sistemului de forţe $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$, aplicate corpului în punctele A_k, suma produselor scalare dintre vectorii forţelor şi razele vectoare ale punctelor lor de aplicaţie

$$V_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k \cdot \overrightarrow{OA}_k. \qquad (3.140)$$

O dată cu deplasarea polului O în punctul O', virialul se schimbă după formula

$$V_O = V_{O'} + \overrightarrow{OO'} \cdot \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k. \qquad (3.141)$$

Dacă $\vec{P}_k$ formează un sistem paralel, avînd centrul C, atunci $V_C = O$.

Pentru un sistem cu axă centrală pe această axă se poate găsi un astfel de punct C, faţă de care virialul se anulează. Acest punct se numeşte *centrul sistemului*.

C. Dinamica

Dinamica este partea mecanicii generale, în care se studiază mişcarea mecanică ţinînd seama de forţele aplicate corpurilor în mişcare.

3.6

Noţiunile de bază ale dinamicii punctului material

§ 3.46. Sisteme inerţiale de referinţă

Sistemul de referinţă, faţă de care orice punct material, căruia nu i se aplică forţe sau care se află sub acţiunea unor forţe în echilibru, execută o mişcare rectilinie uniformă, se numeşte *inerţial*. Cu o precizie suficientă pentru tehnică se poate lua drept sistem de referinţă inerţial, un sistem de referinţă legat de stelele fixe, adică

avînd originea în centrul de greutate al sistemului solar (care se găseşte aproape de centrul de greutate al soarelui) şi axele îndreptate spre trei stele fixe.

§ 3.47. Masa punctului material

La mişcarea sub acţiunea unei forţe a unui punct material faţă de un sistem de referinţă inerţial[1], vectorul acestei forţe este proporţional cu vectorul acceleraţie al punctului în mişcare

$$\vec{P} = m\vec{a}. \qquad (3.142)$$

Factorul pozitiv m, care, pentru punctul dat, păstrează o valoare constantă, se ia ca măsură a masei inerte a punctului şi în mecanică se numeşte simplu *masa punctului*. Unitatea de măsură a masei în sistemul MKS este:

$$[m] = \frac{[\text{forţa}]}{[\text{acceleraţie}]} = \frac{\text{kgf}\cdot\text{s}^2}{\text{m}}. \qquad (3.143)$$

Deoarece raportul dintre greutatea P a punctului şi acceleraţia g în căderea liberă rămîne constant atunci cînd ele variază cu schimbarea locului, valoarea numerică a masei inerte se exprimă prin greutatea P cu formula

$$m = \frac{P}{g}. \qquad (3.144)$$

Mărimea $g[\text{m/s}^2]$ are valorile

Leningrad	(latitudinea 59°57′)	—9,8193
Moscova	(„ 55°45′)	—9,8156
Sverdlovsk	(„ 56°48′)	—9,8162
Harkov	(„ 50°0′)	—9,8102
Odesa	(„ 46°29′)	—9,8077
Tbilisi	(„ 40°43′)	—9,8018
Greenwich	(„ 51°28′)	—9,8120
Paris	(„ 48°50′)	—9,8096
Berlin	(„ 52°23′)	—9,8130
Bucureşti	(„ 44°25′)	—9,8067.

§ 3.48. Principiul independenţei acţiunii forţelor

Dacă forţele $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ fiecare în parte imprimă unui punct material acceleraţiile $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ faţă de sistemul inerţial de referinţă, atunci sub acţiunea simultană a acestor forţe asupra aceluiaşi

În cazul mişcării plane, utilizarea coordonatelor polare ρ şi φ conduce la ecuaţia

$$m\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = P_\rho,\quad m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = P_\varphi. \tag{3.152}$$

În sfîrşit, se poate proiecta egalitatea de bază $m\vec{a} = \vec{P}$ pe axele triedrului intrinsec, construit în punctul traiectoriei, corespunzător unui moment dat t adică pe tangentă, normală şi binormală în acest caz ecuaţiile diferenţiale intrinseci iau forma

$$m\frac{dv}{dt} = P_\tau,\quad m\frac{v^2}{\rho} = P_\nu,\quad 0 = P_\beta \tag{3.153}$$

unde ρ este raza de curbură, iar P_τ, P_ν, P_β sînt proiecţiile forţei $\vec{P}$ pe tangentă, pe normala principală şi respectiv pe binormala la traiectorie.

§ 3.51. Mişcarea unui punct material greu

Dacă se consideră Pămîntul ca sistem inerţial şi axa Oz dirijată vertical în sus, ecuaţiile de mişcare ale unui punct material acţionat numai de greutatea $\vec{P}$ vor fi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Dacă datele iniţiale au forma

$$t_0=0,\quad x_0=y_0=z_0=0,\quad v_{0x}=0,\quad v_{0y}=v_0\cos\alpha,\quad v_{0z}=v_0\sin\alpha, \tag{3.154}$$

mişcarea are loc într-un plan vertical după ecuaţiile $y = v_0 t\cos\alpha$.

$$z = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{3.155}$$

Traiectoria este situată pe parabola

$$z = y\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{3.156}$$

Bătaia L, adică distanţa de la poziţia iniţială pînă la locul căderii pe pămînt se exprimă cu formula

$$L = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}. \tag{3.157}$$

Atunci cînd se ia în considerare rezistenţa aerului, luîndu-se orientată în sens opus vitezei şi proporţională cu ea, ecuaţiile diferenţiale iau forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt},\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g - k\frac{dz}{dt}, \tag{3.158}$$

unde rezistența $\vec{N}$ se exprimă cu formula $\vec{N} = -\lambda\vec{v}$ și $k = \frac{\lambda g}{P}$, unde P este greutatea punctului.

Cu datele inițiale anterioare (3.154) mișcarea are loc în planul vertical yOz după ecuațiile

$$y = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}), \quad z = -\frac{gt}{k} + \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{k} + \frac{g}{k^2}\right)(1 - e^{-kt}) \qquad (3.159)$$

Traiectoria este situată pe o curbă, care are asimptota $y = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}$. Dacă se consideră că rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei, adică $N = cv^2$, atunci cu aceleași date inițiale (3.154) și pentru $\alpha \leqslant 15°$, ecuația aproximativă a traiectoriei are forma

$$z = y \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{4c^2u_0^2}(e^{2\lambda cx} - 2cx - 1),$$

unde $\lambda = 1{,}017$ și $u_0 = \lambda v_0 \cos\alpha$.

§ 3.52. Forțe centrale

Forța $\vec{P}$ se numește *centrală*, dacă linia ei de acțiune trece printr-un punct fix al sistemului inerțial de referință. Mișcarea unui punct sub acțiunea unei forțe centrale are loc pe o curbă plană, al cărei plan trece prin centrul forței. Luînd acest plan ca plan de coordonate și utilizînd coordonatele polare (ρ, φ), ecuațiile de mișcare ale punctului se obțin conform formulei (3.152), în forma

$$m\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = P, \quad \frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0.$$

unde P este proiecția forței centrale $\vec{P}$ pe raza vectoare polară. De aici

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C. \qquad (3.160)$$

Deoarece după formula (3.28) $\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2\frac{dA}{dt}$ este dublul vitezei areolare (sectoriale) a punctului, rezultă că în cazul unei mișcări sub acțiunea unei forțe centrale *viteza areolară (sectorială)* față de centrul forței rămîne constantă. Dacă *ecuația traiectoriei* în coordonate polare are forma $u = \frac{1}{\rho} = f(\varphi)$, atunci viteza v și forța P se determină în funcție de constanta C cu *formulele lui Binet*

$$v^2 = C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right], \quad P = -C^2mu^2\left[u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right]. \qquad (3.161)$$

§ 3.53. Căderea liberă a unui punct ţinîndu-se seama de rotaţia Pămîntului

Dacă drept axe de coordonate se iau verticala Oz (orientată pozitiv către centrul Pămîntului), tangenta Ox la meridian (orientată pozitiv spre nord), şi tangenta Oy la paralelă (orientată pozitiv spre est), atunci ecuaţiile diferenţiale de mişcare ale căderii libere a punctului faţă de aceste axe vor avea forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left(\sin\varphi \frac{dx}{dt} + \cos\varphi \frac{dz}{dt}\right), \\ &\frac{d^2z}{dt^2} = g - 2\omega \cos\varphi \frac{dy}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{3.162}$$

unde ω este viteza unghiulară de rotaţie a Pămîntului în jurul axei polilor, iar φ este latitudinea considerată constantă; acceleraţia g este legată de greutatea statică P şi de masa m a punctului prin egalitatea $P = mg$. Pentru datele iniţiale $t_0 = 0$, $x_0 = y_0 = z_0 = v_{0x} = v_{0y} = v_{0z} = 0$, soluţiile aproximative ale ecuaţiilor (3.162) (cu o precizie pînă la termeni de ordinul ω^2) au forma

$$x = 0, \quad y = \frac{g\cos\varphi}{3} t^3, \quad z = \frac{gt^2}{2}. \tag{3.163}$$

Prin urmare, un punct în cădere se depărtează de verticală spre est. La căderea de la înălţimea h, devierea pe suprafaţa Pămîntului are mărimea

$$\Delta = \frac{g\,\omega\cos\varphi}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}. \tag{3.164}$$

§ 3.54. Mişcarea rectilinie a punctului material

Mişcarea rectilinie a punctului are loc sub acţiunea unei forţe de direcţie constantă şi în cazul unei viteze iniţiale egală cu zero sau paralelă, cu linia de acţiune a forţei.

Dacă dreapta pe care are loc mişcarea rectilinie, se ia ca axă Ox, ecuaţia diferenţială de mişcare sub acţiunea forţei P are forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{3.165}$$

unde

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = P_x.$$

Ecuația (3.165) se poate înlocui cu două ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f\,(t,\,x,\,v),\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \tag{3.166}$$

cu datele inițiale t_0, x_0, v_0.

§ 3.55. Căderea pe verticală a unui punct material greu sub acțiunea rezistenței aerului proporțională cu pătratul vitezei

Dacă rezistența $N = \lambda v^2$, atunci în funcție de datele inițiale $t_0 = x_0 = v_0 = 0$ și de greutatea P a punctului avem

$$v = \alpha\ \mathrm{th}\,(\alpha\,kt),\quad x = \frac{1}{k}\ln\,\mathrm{ch}\,(\alpha\,kt), \tag{3.167}$$

unde

$$\alpha^2 = \frac{mg}{\lambda} = \frac{P}{\lambda},\quad k = \frac{\lambda g}{P}.$$

§ 3.56. Oscilațiile rectilinii ale unui punct sub acțiunea unei forțe poziționale

Forța, care depinde numai de poziția punctului, se numește *forță pozițională*. La mișcarea rectilinie pe axa Ox, proiecția unei forțe poziționale se exprimă cu formula $P_x = f(x)$. Pentru datele inițiale t_0, x_0, v_0, viteza v se determină cu formula

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} f\,(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.168}$$

Mișcarea are loc pe un segment situat pe axa Ox, pe care funcția

$$\psi\,(x) = v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} f\,(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.169}$$

este nenegativă: $\psi(x) \geqslant 0$. Dacă ecuația $\psi(x) = 0$ are două rădăcini simple, x_1 și x_2, între care este situată abscisa inițială x_0, astfel că $\psi\,(x_1) = \psi\,(x_2) = 0$, $\psi_1'\,(x_1) > 0$, $\psi_2'\,(x_2) < 0$, atunci mișcarea este o *oscilație pe segmentul* $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ cu perioada

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\psi\,(x)}}. \tag{3.170}$$

Pentru $v_0 < 0$, primul moment t_1, în care punctul atinge capătul intervalului de oscilaţii şi are o viteză egală cu zero, este determinat de formula $t_1 = t_0 + \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$; următoarele momente, în care $v = 0$, sînt legate unul de altul prin relaţia $t_n = t_{n-1} + \frac{1}{2} T$.

§ 3.57. Oscilaţiile armonice ale punctului

Dacă forţa P se exprimă cu formula

$$P_x = -cx, \tag{3.171}$$

adică dacă vectorul $\vec{P}$ este îndreptat spre centrul O şi ca modul este proporţional cu abaterea punctului în mişcare de la acest centru, atunci formula (3.169) dă

$$\psi(x) = k^2(a^2 - x^2), \tag{3.172}$$

unde

$$k^2 = \frac{c}{m} \tag{3.173}$$

şi

$$x_0^2 + k^2 v_0^2 = k^2 a^2. \tag{3.174}$$

Mişcarea are loc în intervalul $-a \leqslant x \leqslant a$ şi are perioada de oscilaţie

$$T = \frac{2\pi}{k}. \tag{3.175}$$

Deoarece perioada nu depinde de datele iniţiale, aceste oscilaţii se numesc *izocrone*, adică cu aceeaşi perioadă; ecuaţia diferenţială a oscilaţiilor, pe baza formulelor (3.171) şi (3.173), ia forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0. \tag{3.176}$$

Soluţia ei, pentru datele iniţiale $t_0 = 0$, x_0, v_0, are forma

$$x = a \sin(kt + \alpha), \tag{3.177}$$

unde a se determină cu formula (3.174), iar unghiul α cu una din formulele

$$\sin\alpha = \frac{x_0}{a}, \quad \cos\alpha = \frac{v_0}{ka}, \quad \text{tg} = \frac{kx_0}{v_0}. \tag{3.178}$$

Lungimea a se numeşte *amplitudinea oscilaţiei*, iar unghiul $kt + \alpha$ *faza oscilaţiei*. Oscilaţiile, care au loc după legea (3.177), se numesc *armonice*. Dacă, în afară de forţa $\vec{P}$ cu proiecţia $P_x = -cx$, se aplică

punctului o forţă constantă cu proiecţia Q pe aceeaşi axă Ox, ecuaţia diferenţială a oscilaţiilor are forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \frac{Q}{m}. \tag{3.179}$$

Substituţia $x = x' + \frac{Q}{k^2m}$ reduce această ecuaţie la $\frac{d^2x'}{dt^2} + k^2x' = 0$.

Prin urmare, $x' = a' \sin(kt + \alpha')$, unde $a'^2 = \frac{x_0'^2}{k^2} + v_0^2$, $\sin\alpha' = \frac{x_0'}{a}$, $\cos\alpha' = \frac{v_0}{ka'}$. Prin urmare, oscilaţiile rămîn armonice cu aceeaşi perioadă $T = \frac{2\pi}{k}$, deşi a fost adăugată o forţă constantă, însă *centrul oscilaţiei* se deplasează în punctul, în care $P + Q = 0$, adică în punctul de echilibru posibil sub acţiunea celor două forţe.

§ 3.58. Oscilaţii amortizate

Dacă asupra unui punct, în afară de forţa $\vec{P}$ cu proiecţia $P_x = - cx$, acţionează şi o rezistenţă orientată în sens opus vitezei şi în modul proporţională cu aceasta, adică o forţă $\vec{N}$ cu proiecţia $N_x = - \lambda \frac{dx}{dt}$, iar punctul execută o mişcare rectilinie, atunci ecuaţia diferenţială a mişcării are forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = 0 \tag{3.180}$$

unde k se determină cu formula (3.173) şi

$$2n = \frac{\lambda}{m}. \tag{3.181}$$

Pentru

$$k^2 - n^2 = \omega^2 > 0 \tag{3.182}$$

şi pentru datele iniţiale $t_0 = 0$, x_0, v_0, soluţia acestei ecuaţii are forma

$$x = be^{-nt} \sin(\omega t + \beta), \tag{3.183}$$

unde

$$b = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{cotg}\beta = \frac{v_0 + nx_0}{\omega x_0}. \tag{3.184}$$

Mişcarea are caracter oscilatoriu.

Viteza se anulează în momentele t, care se obţin din ecuaţia

$$\mathrm{tg}(\omega t + \beta) = \frac{\omega}{n}. \qquad (3.185)$$

Prin urmare, aceste momente formează o progresie aritmetică cu raţia

$$\frac{1}{2} T = \frac{\pi}{\omega}, \qquad (3.186)$$

iar abaterile respective ale punctului de la origine, în care forţa $P = 0$, formează o progresie geometrică cu raţia

$$\eta = e^{-\frac{n\pi}{\omega}}. \qquad (3.187)$$

Mărimea $\frac{n\pi}{\omega}$ se numeşte *decrementul logaritmic* al oscilaţiei.

§ 3.59. Oscilaţiile amortizate cu frecare constantă (Coulomb)

Dacă asupra unui punct de greutate Q acţionează, în afară de forţa $\vec{P}$ cu proiecţia $P_x = -cx$, încă o forţă de frecare, orientată în sens opus vitezei şi avînd mărimea constantă fQ, mişcarea rămîne oscilatorie cu aceeaşi perioadă $T = \frac{2\pi}{k}$, ca şi în cazul absenţei frecării, însă devierile maxime de la originea coordonatelor, în care forţa $P = 0$, se micşorează în valoare absolută după o progresie aritmetică cu cantitatea $2\frac{fg}{k^2}$ pentru o semiperioadă. Dacă poziţia iniţială are abscisa x_0, atunci abscisele ulterioare ale devierilor maxime se determină cu formula

$$x_n = (-1)^n \left(x_0 - \frac{2nfg}{k^2}\right). \qquad (3.188)$$

Pentru un anumit n, mărimea $|x_n| < \frac{f_1 g}{k^2}$, unde f_1 este coeficientul de frecare în repaus ($f_1 > f$). Pentru acest n, mărimea $|\vec{P}_n| = c|x_n| < \frac{cf_1 g}{k^2}$. Prin urmare, $|\vec{P}_n| < f_2 Q$ şi din acest motiv la momentul t_n mişcarea punctului încetează. Pentru acest motiv, segmentul de lungime $\frac{2f_1 g}{k^2}$ cu centrul în origine se numeşte *zonă moartă*. Oscilaţiile punctului sînt *amortizate*.

§ 3.60. Mişcarea unui punct pe o curbă netedă dată

Dacă un punct material, ca urmare a interacţiunii cu alte corpuri, este reţinut pe o curbă, definită matematic în raport cu un sistem de referinţă inerţial, însă se poate deplasa pe această curbă, atunci forţa, care măsoară acţiunea asupra punctului exercitată de corpurile care-l reţin pe curba dată, se numeşte *reacţiunea dinamică* a acestei curbe. Dacă se aplică punctului o forţă dată $\vec{F}$, legea fundamentală a dinamicii pentru mişcarea pe curba dată, ia forma

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}, \tag{3.189}$$

unde $\vec{N}$ este reacţiunea dinamică a curbei, care nu se cunoaşte dinainte. Dacă din datele fizice suplimentare ale problemei se ştie că $\vec{N}$ este îndreptată normal pe curba dată, această curbă se numeşte *dinamic netedă*. Determinînd poziţia punctului pe curba dată prin lungimea s a arcului şi proiectînd ecuaţia vectorială (3.189) pe tangenta la curba dată, obţinem ecuaţia diferenţială a mişcării pe curba dată în forma

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau = f\left(t, s, \frac{ds}{dt}\right), \tag{3.190}$$

unde F_τ este proiecţia forţei date $\vec{F}$ pe tangentă, orientată în sensul crescător al arcelor. Dacă ecuaţia (3.190) este integrată, vectorul $\vec{N}$ al reacţiunii dinamice, situat în planul normal la curba dată, se determină pentru momentul t prin proiecţiile sale N_ν şi N_β pe normala principală şi respectiv pe binormala la curbă, cu formulele

$$N_\nu = \frac{mv^2}{\rho} - F_\nu \qquad N_\beta + F_\beta = 0 \tag{3.191}$$

unde ρ este raza de curbură în punctul corespunzător al curbei, iar F_ν şi F_β sînt proiecţiile forţei date pe normala principală şi respectiv pe binormală în acelaşi punct al curbei. Dacă curba dată este plană şi forţa dată $\vec{F}$ este situată în acelaşi plan, reacţiunea $\vec{N}$ este îndreptată după normala principală şi se determină cu prima din formulele (3.191).

Dacă curba este dată prin ecuaţiile carteziene $f_1(x, y, z) = 0$ şi $f_2(x, y, z) = 0$, ecuaţiile cinematice ale mişcării se pot determina din ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} =0 \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{3.192}$$

care împreună cu ecuaţiile curbei determină cele cinci funcţii necunoscute x, y, z, λ_1, λ_2 de variabila independentă t.

§ 3.61. Pendulul matematic circular

Un punct material, obligat să se mişte într-un plan vertical pe un cerc dat, neted, (fig. 3.64) sub acţiunea greutăţii, se numeşte *pendul matematic circular*. Raza l a cercului se numeşte *lungimea pendulului circular* (fig. 3.64). Poziţia pendulului se determină cu ajutorul unghiului φ, format de raza lui cu verticala descendentă astfel că unghiul socotit în sensul invers mersului acelor ceasornicului se consideră pozitiv, iar în sensul acelor ceasornicului — negativ. Unghiul φ se determină din ecuaţia diferenţială

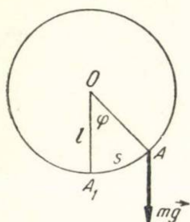


Fig. 3.64.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{3.193}$$

pentru datele iniţiale $t_0 = \varphi_0 = 0,\ l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = v_0$.

Viteza v este în acest caz dată de formula

$$v^2 = v_0^2 - 4gl\sin^2\frac{\varphi}{2}. \tag{3.194}$$

În cazul cînd $v_0^2 > 4gl$, pendulul efectuează rotaţii complete. Pentru $v_0^2 < 4gl$ se poate găsi un unghi γ astfel că

$$v_0^2 = 4gl\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}. \tag{3.195}$$

În acest caz

$$v^2 = 4gl\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \tag{3.196}$$

şi mişcarea pendulului este o oscilaţie pe arcul $-\gamma \leqslant \varphi \leqslant \gamma$. Perioada mişcării se determină cu formulele

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\gamma}^{+\gamma}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \\ &= 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{+\gamma}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}. \end{aligned} \tag{3.197}$$

Înlocuirea $\sin\frac{\gamma}{2}\sin\psi = \sin\frac{\varphi}{2}$ dă

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\sin^2\psi}}. \tag{3.198}$$

Integrala obţinută se numeşte *integrală eliptică completă de speţa întîia* şi se notează

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \psi}}, \tag{3.199}$$

astfel că

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, K. \tag{3.200}$$

Valorile lui K depind de γ, astfel că oscilaţiile pendulului nu sînt izocrone. Valorile lui K se pot lua din tabelă:

γ	K	γ	K
0°	1,5708	60°	1,6258
5°	1,5715	90°	1,8541
10°	1,5738	120°	2,1565
20°	1,5828	150°	2,7681
40°	1,6200	180°	∞

Formula aproximativă pentru K, pentru valori mici ale lui γ, are forma

$$K \approx \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \tag{3.201}$$

Pentru valori foarte mici ale lui γ se admite că $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$ şi atunci

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\gamma^2}{16}\right). \tag{3.202}$$

Dacă γ este atît de mic, încît termenul $\frac{\gamma^2}{16}$ se poate neglija, atunci

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{3.203}$$

Deoarece formula aceasta nu conţine pe γ, oscilaţiile mici ale pendulului se pot considera izocrone. Valorile termenului $1 + \frac{\gamma^2}{16}$ se pot lua din tabela următoare

γ	$1 + \gamma^2/16$	γ	$1 + \gamma^2/16$
5°	1,0005	40°	1,0304
10°	1,0019	60°	1,0684
20°	1,0076	90°	1,1539

Însăşi ecuaţia diferenţială (3.143) pentru oscilaţii mici poate fi înlocuită cu una aproximativă

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \tag{3.204}$$

care are forma ecuaţiei oscilaţiilor armonice (3.176) pentru $k^2 = \frac{g}{l}$.

Reacţiunea cercului este îndreptată după rază şi are valoarea algebrică N, considerînd pozitiv sensul spre centru

$$N = \frac{mv^2}{l} + mg\cos\varphi = \frac{mv_0^2}{l} - 4\,mg\sin^2\frac{\varphi}{2} + mg\cos\varphi. \tag{3.205}$$

Pentru $\varphi < \frac{\pi}{2}$, adică pe semicercul de jos, N este evident pozitivă, reacţiunea este îndreptată spre centru şi pendulul se poate realiza cu ajutorul unui fir, care fixează punctul mobil de centrul cercului. Pentru ca reacţiunea cercului să fie în toate punctele îndreptată spre centru, trebuie ca $v_0^2 > 5gl$.

§ 3.62. Mişcarea relativă a unui punct material pe o curbă netedă mobilă dată

Dacă sistemul de referinţă S execută o mişcare de transport dată faţă de sistemul de referinţă S', iar punctul material se mişcă pe o curbă C', legată de sistemul de referinţă S' şi totodată apare o reacţiune dinamică $\vec{N}$, normală pe curba C', atunci mişcarea relativă a punctului sub acţiunea unei forţe date $\vec{F}$ este determinată de ecuaţia

$$m\frac{d^2s'}{dt^2} = F_\tau + \Phi_{tr,\tau}, \tag{3.206}$$

unde s' este arcul pe curba C', iar F_τ şi $\Phi_{tr,\tau}$ sînt proiecţiile pe tangenta la curba C' a forţei date şi a forţei fictive complementare de transport.

Poziţia de echilibru relativ se obţine din ecuaţia

$$F_\tau + \Phi_{tr,\tau} = 0, \tag{3.207}$$

dacă ea nu conţine explicit timpul t. Dacă mişcarea de transport este o rotaţie uniformă cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe verticale Oy, curba dată fiind situată în planul xOy, şi dacă curba are ecuaţia $y = f(x)$, iar forţa dată este greutatea punctului, atunci ecuaţia de echilibru relativ are forma $\omega^2 x = gf'(x)$. Pentru $f(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$ punctul se găseşte în echilibrul relativ în toate punctele curbei date.

§ 3.63. Mişcarea unui punct pe o suprafaţă netedă dată

Dacă, cu ajutorul unor corpuri punctul material este menţinut pe o suprafaţă (Π) definită matematic în raport cu un sistem de referinţă inerţial, însă se poate mişca pe această suprafaţă, forţa $\vec{N}$, care măsoară acţiunea exercitată asupra punctului de corpurile care-l reţin pe suprafaţa dată, se numeşte *reacţiune dinamică a suprafeţei*. Dacă se aplică punctului o forţă dată $\vec{F}$, ecuaţia fundamentală a dinamicii, are forma $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}$. Dacă reacţiunea $\vec{N}$ este normală la suprafaţa dată (Π), această suprafaţă se numeşte *dinamic netedă*. Dacă ecuaţia suprafeţei este $f(x, y, z) = 0$ şi cosinusurile directoare ale normalei sînt date de formulele

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.208}$$

ecuaţiile diferenţiale de mişcare ale punctului pe suprafaţă au forma

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x + N\cos\alpha, \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y + N\cos\beta,$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z + N\cos\gamma, \tag{3.209}$$

unde N este mărimea algebrică a proiecţiei reacţiunii pe direcţia normalei, determinată de formulele (3.208). Aceste ecuaţii, împreună cu ecuaţia suprafeţei, determină cele patru funcţii de timpul t necunoscute: x, y, z, N. Dacă traiectoria şi viteza punctului au fost găsite, mărimea N se determină cu formula

$$N = \frac{mv^2}{\rho}\cos\varphi - F_n, \tag{3.210}$$

unde ρ este raza de curbură a traiectoriei, φ unghiul format de normala principală la traiectorie cu normala la suprafaţă şi F_n proiecţia forţei date pe normala la suprafaţă, determinată de formula (3.208). Forţa $\vec{Q} = -\vec{N}$ se numeşte *presiunea punctului* pe suprafaţa dată. Această forţă este îndreptată după normala la suprafaţă şi are proiecţia pe normală

$$Q = F_n - \frac{mv^2}{\rho}\cos\varphi. \tag{3.211}$$

Dacă suprafaţa dată este suprafaţa unui corp rigid oarecare, atunci în momentul în care $Q = 0$, punctul poate părăsi suprafaţa.

Dacă nu există o forţă dată, adică punctul se mişcă pe suprafaţă numai sub acţiunea forţei $\vec{N}$, se spune că punctul se mişcă pe suprafaţă în virtutea inerţiei. În acest caz, proiectînd ecuaţia de bază $m\vec{a} = \vec{N}$ pe tangenta la traiectorie, se obţine $\frac{dv}{dt} = 0$, adică $v =$ $=$ const, iar punctul se mişcă uniform. În acest caz $\vec{a} = \vec{a}_\nu$ şi din acest motiv normala principală la traiectorie coincide cu normala la suprafaţă deci traiectoria este o *geodezică* a suprafeţei date. În cazul sferei, o astfel de linie este arcul unui cerc mare.

§ 3.64. Pendulul sferic

Un punct, care se mişcă pe suprafaţa unei sfere netede sub acţiunea greutăţii, se numeşte *pendul sferic*. Mişcarea pendulului sferic de lungime l, egală cu raza sferei date, se determină (fig. 3.65) în coordonate cilindrice z, θ, φ cu sensul pozitiv al axei z vertical în jos. În acest caz ecuaţiile de mişcare ale pendulului sferic au forma

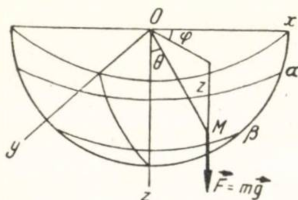


Fig. 3.65.

$$\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta = a,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^2\theta - \frac{2g}{l}\cos\theta = 2h,$$

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = F(z), \tag{3.212}$$

unde a şi h sînt constante care se determină din condiţiile iniţiale θ_0, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$, iar

$$F(z) = 2(l^2 - z^2)(hl^2 + gz) - a^2l^4. \tag{3.213}$$

Ecuaţia $F(z) = 0$ are trei rădăcini reale α, β, γ, situate în intervalele: $-\infty < \gamma < -l$, $0 < \beta < z_0$, $z_0 < \alpha < l$, unde z_0 este valoa-

rea inițială a lui z. În acest caz, în intervalul $\beta \leqslant z \leqslant \alpha$ mărimea $F(z) \geqslant 0$, de aceea mișcarea punctului are loc în zona sferică dintre cercurile paralele $\theta_1 = \arccos \frac{\beta}{l}$ și $\theta_2 = \arccos \frac{\alpha}{l}$, numite *cercuri limită*. Dacă $\alpha = \beta$, cercurile limită se confundă și mișcarea punctului are loc uniform pe un cerc într-un plan orizontal și însăși punctul se numește *pendul conic*. Un pendul conic se poate realiza cu ajutorul unei sfere grele, atîrnate de un fir, dacă firul se deviază de la verticală cu unghiul θ_0 și se imprimă sferei o viteză v_0, perpendiculară pe planul dus prin verticală și fir și egală ca mărime cu $v_0 = \sin\theta_0 \sqrt{\frac{gl}{\cos\theta_0}}$.

3.7
Dinamica generală a sistemelor

§ 3.65. Sisteme mecanice. Forțe interioare

Un ansamblu de puncte materiale, care interacționează unul cu celălalt după legea egalității acțiunii și reacțiunii, se numește *sistem mecanic*. Legea egalității acțiunii și reacțiunii constă în faptul că forțele, care măsoară interacțiunea a două particule ale unui sistem mecanic, sînt situate pe aceeași dreaptă în sensuri opuse și sînt egale ca modul. Dacă forța de acțiune din partea particulei A_j asupra particulei A_i a aceluiași sistem se notează cu $\vec{F}_{ij}$ iar forța de acțiune asupra particulei A_j din partea particulei A_i — cu $\vec{F}_{ji}$ atunci $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$. De aici rezultă că suma vectorilor tuturor forțelor interioare ale sistemului, adică a forțelor, cu care punctele sale interacționează, este totdeauna egală cu zero

$$\sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = 0. \tag{3.214}$$

La fel, construind vectorii momentelor $\vec{M}_O(\vec{F}_{ij})$ ale forțelor interioare în raport cu orice punct O, se obține că suma geometrică a vectorilor momente este egală cu zero

$$\sum_{i,j} \vec{M}_O(\vec{F}_{ij}) = 0. \tag{3.215}$$

§ 3.66. Centrul de inerţie

Suma maselor particulelor materiale ale unui sistem mecanic se numeşte *masa sistemului*

$$\sum_i m_i = m. \tag{3.216}$$

Prin greutatea P a unui sistem, se înţelege suma greutăţii particulelor, care compun acest sistem

$$P = \sum_i P_i. \tag{3.217}$$

Masa sistemului se exprimă cu formula

$$m = \frac{P}{g}. \tag{3.218}$$

Sensul fizic al masei corpului constă în aceea că, în cazul mişcării de translaţie a corpului, masa reprezintă o măsură a inerţiei sale. Suma produselor dintre razele vectoare ale particulelor sistemului faţă de originea O şi masele acestor particule se numeşte *vectorul moment static al sistemului* faţă de centrul dat O

$$\vec{S}_O = \sum_i m_i \vec{r}_i. \tag{3.219}$$

Punctul C, definit de vectorul de poziţie

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{S}_O}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}, \tag{3.220}$$

se numeşte *centru de inerţie al sistemului* sau *centru de masă al punctelor*. Poziţia centrului de inerţie este determinată complet de configuraţia particulelor care compun sistemul şi nu depinde de alegerea centrului O. Faţă de axele Ox, Oy, Oz centrul de inerţie se determină, în funcţie de coordonatele x_i, y_i, z_i ale unui punct oarecare al sistemului, cu formulele

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}. \tag{3.221}$$

În cazul unui corp rigid centrul de inerţie coincide cu centrul de greutate şi de aceea şi pentru orice alt sistem centrul de inerţie se numeşte în mod convenţional *centru de greutate*.

În mişcarea unui sistem faţă de un sistem de referinţă (S), cu centrul O, raza vectoare r_G este variabilă şi extremitatea ei descrie o curbă numită *hodograful razei vectoare*. Derivata $\frac{d\vec{r}_C}{d}$ are expresia

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{d}}{} . \tag{3.222}$$

Această derivată se numeşte *vectorul viteză* $\vec{v}_C$ al *centrului de inerţie* şi poate fi considerată ca viteza unui punct imaginar, care se mişcă pe hodograful vectorului. Viteza aceasta poate fi exprimată în funcţie de vitezele $\vec{v}_i$ ale punctelor sistemului cu formula

$$\vec{v}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{v}}{m} \tag{3.223}$$

Derivata $\frac{d\vec{v}_C}{dt}$ se numeşte *vectoru acceleraţiei* al centrului de inerţie C; ea poate fi considerată ca vectorul acceleraţie $\vec{a}_G$ al unui punct imaginar, care se mişcă pe hodograful vectorului $\vec{r}_G$ cu viteza $\vec{v}_G$ şi poate fi exprimată cu formula

$$\vec{a}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m}, \tag{3.224}$$

unde $\vec{a}$ sînt acceleraţiile punctelor sistemului.

§ 3.67. Teorema mişcării centrului de inerţie

Legea fundamentală a dinamicii pentru punctele A_i ale sistemului ia forma $m_i \vec{a}_i = \vec{P}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij}$, unde $\vec{P}_i^{(e)}$ este forţa xte ioară aplicată acestui punct. Însumînd aceste egalităţi pentru toate punctele sistemului şi ţinînd seama de formulele (3.224) şi (3.214), se obţine egalitatea

$$m\vec{a}_G = \sum_i \vec{P}_i^{(e)}, \tag{3.225}$$

numită *ecuaţia de mişcare a centrului de inerţie a sistemului*. Ea indică faptul că centrul de inerţie al sistemului se mişcă aşa cum s-ar mişca un punct material liber fictiv a cărui masă este egală cu masa sistemului şi căruia i se aplică o forţă care are vectorul egal cu suma vectorilor tuturor forţelor exterioare aplicate punctelor sistemului. Prin urmare, forţele interioare nu exercită nici o influenţă asupra mişcării centrului de inerţie al sistemului. În particular, în absenţa forţelor exterioare, sau dacă $\sum_i \vec{P}_i^{(e)} = 0$, atunci $\vec{a}_C = 0$, adică centrul de inerţie al sistemului se mişcă rectiliniu şi uniform faţă de un sistem de referinţă inerţial S, şi de aceea, luîndu-l ca origine a unui sistem de referinţă relativ S' în mişcare de translaţie, se obţine un sistem de referinţă inerţial nou. Un astfel de caz are loc cu mare precizie pentru sistemul solar, dacă axele sistemului mobil S' se îndreaptă spre trei stele fixe.

§ 3.68. Impulsul

Se numeşte *impuls* al unei particule materiale de masă m, care se mişcă cu viteza $\vec{v}$, vectorul $\vec{H}$, egal cu produsul dintre masa particulei şi vectorul viteză

$$\vec{H} = m\vec{v}. \tag{3.226}$$

Modulul vectorului impuls se măsoară în unităţile

$$[\vec{H}] = \text{kgf} \cdot \text{s}. \tag{3.227}$$

Proiecţiile acestui vector pe axele sistemului de referinţă se exprima cu formulele

$$H_x = m\frac{dx}{dt}, \quad H_y = m\frac{dy}{dt}, \quad H_z = m\frac{dz}{dt}. \tag{3.228}$$

Vectorul $\vec{H}$ al impulsului este legat de vectorul $\vec{P}$ al rezultantei forţelor aplicate punctului mobil, prin ecuaţia

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{P}. \tag{3.229}$$

Dacă vectorul $\vec{P}$ se consideră variabil, depinzînd de timp, $\vec{P} = \vec{P}(t)$, pentru calculul variaţiei impulsului în intervalul de timp (t_A, t_B) acest interval se împarte în părţi infinit mici Δt_k, introducînd între momentele t_A şi t_B momentele intermediare $t_A = t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < t_{n+1} = t_B$ şi se calculează limita sumei $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{P}(t_k)\, \Delta t_k$.

Această limită se numeşte *integrala geometrică* a vectorului $\vec{P}(t)$ şi se notează cu simbolul

$$\int_{t_A}^{t_B} \vec{P}(t)\, dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{P}(t_k)\, \Delta t_k. \qquad (3.320)$$

Formula *variaţiei impulsului* unui punct are forma

$$m\vec{v}(t_B) - m\vec{v}(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} \vec{P}(t)\, dt; \qquad (3.231)$$

proiectînd pe axele sistemului de referinţă, se obţine

$$\left.\begin{aligned} mv_x(t_B) - mv_x(t_A) &= \int_{t_A}^{t_B} P_x(t)\, dt, \\ mv_y(t_B) - mv_y(t_A) &= \int_{t_A}^{t_B} P_y(t)\, dt, \\ mv_z(t_B) - mv_z(t_A) &= \int_{t_A}^{t_B} P_z(t)\, dt. \end{aligned}\right\} \qquad (3.232)$$

Impulsul unui sistem este vectorul liber $\vec{H}$, egal cu suma vectorilor $\vec{H}_i$ ai impulsurilor tuturor punctelor sistemului în momentul dat

$$\vec{H} = \sum_i \vec{H}_i = \sum m_i \vec{v}_i. \qquad (3.233)$$

Acest vector $\vec{H}$ poate fi privit ca impulsul unui punct fictiv cu masa m egală cu suma maselor punctelor sistemului şi care se mişcă cu viteza v_G a centrului de inerţie al sistemului. Fizic, vectorul $\vec{H}$ este măsura mişcării mecanice, care caracterizează posibilitatea ei de a se transmite de asemenea sub formă de mişcare mecanică de la unele particule materiale la altele. Impulsul unui sistem este legat de forţele aplicate punctelor acestui sistem prin ecuaţia

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum_i \vec{P}_i^{(e)}, \qquad (3.234)$$

iar variaţia impulsului pentru intervalul dat (t_A, t_B) de timp se exprimă cu formula

$$\vec{H}(t_B) - \vec{H}(t_A) = \sum_i \int_{t_A}^{t_B} \vec{P}_i^{(e)}\, dt = \int_{t_A}^{t_B} \sum_i \vec{P}_i^{(e)}\, dt. \qquad (3.235)$$

Prin urmare, forțele interioare nu exercită influență asupra variației impulsului sistemului. În cazul

$$\sum_i \vec{P}_i^{(e)} = 0. \tag{3.236}$$

pentru toate momentele de timp se obține $\vec{H}$ = const, adică impulsul unui astfel de sistem se conservă.

§ 3.69. Ecuația lui Meșcerski pentru mișcarea de translație a unei rachete

Masa rachetei, egală cu suma maselor corpului ei și a combustibilului inclus în ea în momentul dat, este o funcție de timp $m(t)$. Dacă viteza de scurgere a gazelor, care se formează ca rezultat al arderii combustibilului, este $\vec{c}$ în raport cu corpul rachetei, atunci viteza $\vec{v}$ a mișcării de translație a rachetei se determină din ecuația

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P}^{(e)} + \frac{dm}{dt}c, \tag{3.237}$$

unde $\vec{P}^{(e)}$ este suma vectorilor forțelor exterioare aplicate rachetei. Vectorul

$$\vec{R} = \frac{dm}{dt}\vec{c} \tag{3.238}$$

este îndreptat în sens opus vectorului $\vec{c}$, deoarece $\frac{dm}{dt} < 0$ și se numește *forța de reacție* a proiectilului rachetei. În absența forțelor exterioare în cazul mișcării rectilinii a rachetei și al unei viteze constante c de scurgere a combustibilului, viteza rachetei, pentru datele inițiale $t_0 = 0$, $v_0 = 0$, se determină la momentul t cu formula

$$v(t) = c \ln \frac{m_0}{m(t)},$$

unde m_0 este masa inițială, adică $m_0 = m(0)$.

§ 3.70. Momentul cinetic al unui punct material

Produsul vectorial dintre raza vectoare $\vec{r}$ a punctului mobil și vectorul impuls se numește *vectorul moment cinetic al punctului material în raport cu originea razei vectoare* a punctului

$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}. \tag{3.239}$$

Vectorul moment cinetic se măsoară în unitățile: $[\vec{K}]$ = kgf.m.s. Analitic, în raport cu axele Ox O z vectorul momen cinetic se exprimă cu formula

$$\vec{K}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix}. \tag{3.240}$$

Proiecțiile K_x, K_y, K_z ale vectorului momen e numesc *momente cinetice axiale* și se exprimă cu formulele

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \begin{vmatrix} y & z \\ m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = m\left(y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\ K_y &= \begin{vmatrix} z & x \\ m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} & m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = m\left(z\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right), \\ K_z &= \begin{vmatrix} x & y \\ m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}} & m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = m\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.241}$$

Aceste proiecții se pot scrie sub forma

$$K_x = 2m\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}}.\quad K_y = 2m\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}}.\quad K_z = 2m\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t} \tag{3.242}$$

unde $\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}}$ $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}}$ sînt *viteze areolare (sectoriale)*, față de originea O, ale proiecțiilor punctului în mișcările lor respectiv pe planele de coordonate yOz, zOx, xO.

Momentul cinetic al unui punct în raport cu originea unui sistem de referință inerțial este legat de vectorul $\vec{P}$ al rezultantei forțelor care îi sînt aplicate, prin formula

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}_0}{\mathrm{d}} = \vec{M}_O(\vec{P}. \tag{3.243}$$

Proiectată pe axele Ox, Oy Oz această formulă dă

$$\frac{\mathrm{d}K_x}{\mathrm{d}t} = M_{Ox}(\vec{P}),\quad \frac{\mathrm{d}K_y}{\mathrm{d}} = M_{Oy}(\vec{P});\quad \frac{\mathrm{d}K_z}{\mathrm{d}} = M_{Oz}(\vec{P}). \tag{3.244}$$

În cazul unei forțe centrale avem $\vec{M}_O(\vec{P}) = 0$ și ca urmare $\vec{K}_O = \text{const.}$ Traiectoria punctului este situată în acest caz într-un plan perpendicular pe vectorul constant $\vec{K}_0$, iar mișcarea are loc în acest plan, după formula lui Binet (§ 3.52).

§ 3 71. Momentul cinetic al unui sistem

Se numește *moment cinetic* al unui sistem mecanic $\vec{K}_O$ în raport cu un punct O, suma vectorilor momentelor cinetice în jurul aceleiași origini, ale tuturor punctelor sistemului

$$\vec{K}_O = \sum_i \vec{K}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \tag{3.245}$$

Proiecțiile vectorului $\vec{K}_O$ pe axele Ox, Oy, Oz, proiecții numite *momente inetice axiale*, se determină cu formulele

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \sum_i m_i \left(y_i \frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t} - z_i \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} \right), \\ K_y &= \sum_i m_i \left(z_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} - x_i \frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t} \right), \\ K_z &= \sum_i m_i \left(x_i \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} - y_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \right). \end{aligned}\right\} \tag{3.246}$$

Dacă, în afară de sistemul de referință inerțial S, se introduce încă un sistem de referință mobil S', a cărui origine O' coincide cu centrul C de inerție al sistemului mecanic și care are față de sistemul de referință inerțial S o translație, atunci momentul cinetic $\vec{K}_O$ în mișcarea absolută va fi legat de momentul cinetic K'_C în mișcarea relativă prin formula

$$\vec{K}_O = \vec{K}'_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C, \tag{3.247}$$

unde

$$\vec{K}'_C = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i. \tag{3.248}$$

Momentul cinetic $\vec{K}_O$, în jurul originii sistemului de referință inerțial, este legat de forțele aplicate în punctul sistemului prin formula

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{M}_O(\vec{P}_i^{(e)}), \tag{3.249}$$

adică forţele interioare nu au nici o influenţă asupra variaţiei momentului cinetic absolut.

Dacă derivata $\frac{d\vec{K}_O}{dt}$ este considerată ca viteza unui punct L, situat la extremitatea vectorului $\vec{K}_O$, atunci, făcînd abstracţie de dimensiunile acestei viteze, formula (3.249) se poate scrie sub forma

$$\vec{v}_L = \sum_i \vec{M}_O(\vec{P}_i^{(e)}) \tag{3.250}$$

şi în această formă ea exprimă *regula lui Resal*: viteza extremităţii vectorului momentului cinetic în jurul originii unui sistem de referinţă inerţial este egală cu suma vectorilor momentelor forţelor exterioare aplicate punctelor sistemului, în jurul aceluiaşi centru. Pentru momentul cinetic $\vec{K}'_C$ în mişcarea relativă a sistemului în jurul centrului său de inerţie, adică în mişcarea faţă de sistemul S' de referinţă, a cărui origine coincide cu centrul C de inerţie şi care posedă o mişcare de translaţie faţă de sistemul inerţial, există relaţia

$$\frac{d\vec{K}'_C}{dt} = \sum_i \vec{M}_C(\vec{P}_i^{(e)}), \tag{3.251}$$

adică teorema despre momentul cinetic în această mişcare relativă are aceeaşi formă ca şi în cea din mişcarea absolută. Proiectate pe axele Ox, Oy, Oz sau Ox', Oy', Oz' formulele (3.249) şi (3.251) iau forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dK_x}{dt} = \sum_i M_{Ox}(\vec{P}_i^{(e)}), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_i M_{Oy}(\vec{P}_i^{(e)}),\\ &\frac{dK_z}{dt} = \sum_i M_{Oz}(\vec{P}_i^{(e)}),\end{aligned}\right\} \tag{3.252}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dK'_{x'}}{dt} = \sum_i M_{Cx'}(\vec{P}_i^{(e)}), \quad \frac{dK'_{y'}}{dt} = \sum_i M_{Cy'}(\vec{P}_i^{(e)}),\\ &\frac{dK'_{z'}}{dt} = \sum_i M_{Cz'}(\vec{P}_i^{(e)}).\end{aligned}\right\} \tag{3.253}$$

Dacă suma momentelor forţelor exterioare în jurul unei axe oarecare a sistemului S sau a sistemului S' rămîne tot timpul egală cu zero, de exemplu $\sum_i M_{Ox}(\vec{P}_i^{(e)}) = 0$ sau $\sum_i M_{Cx'}(P_i^{(e)}) = 0$, atunci respectiv $K_x = \text{const}$, $K'_{x'} = \text{const}$ sau $\sum_i m_i \frac{dS_{ix}}{dt} = \text{const}$ şi

$\sum_i m_i \frac{dS'_{ix'}}{dt}$ = const, adică rămîne constantă suma produselor maselor cu vitezele sectoriale ale proiecţiilor pe planul perpendicular pe acea axă în jurul căreia este egală cu zero suma momentelor forţelor exterioare.

Dacă $\sum_i M_O(\vec{P}_i^{(e)}) = 0$ sau $\sum_i M_C(\vec{P}_i^{(e)}) = 0$, proprietatea indicată are loc pentru orice plan, care trece prin O respectiv prin C. În acest caz $\vec{K}_O$ = const sau $\vec{K}'_C$ = const. Prin urmare, planele (Π) sau (Π′), perpendiculare pe vectorii $\vec{K}_O$ sau $\vec{K}'_C$, păstrează în spaţiu o direcţie constantă. Suma produselor dintre masele punctelor sistemului şi vitezele areolare (în jurul originii O respectiv C) ale proiecţiilor acestor puncte pe planele (Π_O) sau (Π_C) care trec prin punctele O sau C, are cea mai mare valoare constantă, dacă planele sînt perpendiculare respectiv pe $\vec{K}_O$ sau $\vec{K}'_C$.

§ 3.72. Lucrul mecanic elementar al unei forţe

Produsul scalar dintre vectorul forţă $\vec{F}$, aplicat unui punct în mişcare şi vectorul viteză $\vec{v}$ al acestui punct, înmulţit cu elementul dt de timp, se numeşte *lucrul mecanic elementar* al forţei $\vec{F}$ în intervalul de timp dt considerat

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt. \tag{3.254}$$

Lucrul mecanic elementar este un număr algebric, măsurat în unităţile $[dL]$ = N.m. Lucrul mecanic elementar, în funcţie de proiecţiile forţei $\vec{F}$ pe axele sistemului de referinţă faţă de care se consideră viteza $\vec{v}$, se exprimă cu formula

$$dL = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz, \tag{3.255}$$

unde diferenţialele coordonatelor sînt calculate pentru aceeaşi valoare a diferenţialei dt a timpului, ca şi lucrul mecanic elementar. Lucrul mecanic elementar, în funcţie de diferenţiala ds a arcului traiectoriei şi de unghiul α, format de vectorul $\vec{F}$ cu tangenta, orientată în sensul crescător al arcelor, se poate exprima cu formula

$$dL = |\vec{F}| \cdot ds \cdot \cos\alpha = F_\tau\, ds, \tag{3.256}$$

unde F_τ este proiecția forței pe tangenta la traiectorie. Dacă forța este rezultanta forțelor $\vec{F}_k(k = 1, 2, \ldots, n)$, aplicate în același punct, atunci

$$dL(\vec{F}) = \sum_{k=1}^{n} dL(\vec{F}_k), \tag{3.257}$$

adică lucrul mecanic elementar al rezultantei este egal cu suma lucrurilor mecanice elementare ale componentelor.

§ 3.73. Cîmp de forțe

Dacă forța $\vec{F}$ este o forță de poziție, adică este determinată exclusiv de poziția punctului, atunci în formula (3.256) lucrul mecanic elementar se poate calcula independent de procesul mișcării, în funcție de deplasarea arbitrară ds a punctului din acea poziție, pentru care a fost luată valoarea forței $\vec{F}$. Dacă în urma acțiunii unor corpuri o parte din spațiu se găsește într-o astfel de stare că în fiecare punct al lui apare o forță, aplicată unei particule materiale care se găsește în acel punct și care depinde doar de poziția acestui punct și eventual de momentul t considerat, însă nu și de viteza punctului, atunci acea parte a spațiului se numește *cîmp de forțe*. Cîmpul de forțe, ale cărui forțe nu depind de timp, se numește *staționar*.

Pentru un cîmp staționar, proiecțiile F_x, F_y, F_z ale forțelor cîmpului sînt funcții doar de coordonatele x, y, z ale punctului de aplicație și formula (3.256) a lucrului mecanic elementar capătă forma

$$dL = X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz, \tag{3.258}$$

unde

$$X = F_x, \quad Y = F_y, \quad Z = F_z.$$

Dacă membrul drept al formulei (3.258) este, din punct de vedere matematic, diferențiala totală exactă a unei funcții de coordonate, $U(x, y, z)$, adică dacă

$$X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz = dU(x, y, z), \tag{3.259}$$

cîmpul de forțe se numește *potențial*, iar funcția $U(x, y, z)$ este *funcția de forță*. În cazul cîmpului potențial, proiecțiile F_x, F_y, F_z ale forței se exprimă prin funcția de forță cu formulele

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{3.260}$$

Criteriul matematic de a recunoaște dacă un cîmp de forțe este un cîmp potențial constă în satisfacerea identică a egalităților

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}. \tag{3.261}$$

Exemple de cîmpuri potențiale de forțe:

1. *Cîmpul forței gravitaționale.* Dacă axa Oz este orientată vertical în sus, atunci $X = Y = 0$, $Z = -P$; $dL = -P\,dz = d(-Pz)$, adică pentru forța gravitațională, funcția de forță se exprimă, în raport cu axele menționate, cu formula

$$U = -Pz. \tag{3.262}$$

2. *Cîmpul unei forțe centrale*, a cărei mărime depinde doar de distanța de la punctul de aplicație pînă la centrul forței. Dacă proiecția P_r a forței pe raza vectoare $\vec{r}$ se exprimă cu formula

$$P_r = f(r), \tag{3.263}$$

atunci

$$X = f(r)\cdot\frac{x}{r}, \quad Y = f(r)\cdot\frac{y}{r}, \quad Z = f(r)\cdot\frac{z}{r}, \tag{3.264}$$

$$dL = \frac{f(r)}{r}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = f(r)\,dr, \tag{3.265}$$

$$U = \int f(r)\,dr. \tag{3.266}$$

Pentru forța elastică $f(r) = -cr$ și de aceea

$$U = -\frac{cr^2}{2}. \tag{3.267}$$

Pentru *forța de atracție newtoniană* $F(r) = -\frac{\mu}{r^2}$, unde μ este un coeficient constant,

$$U = \frac{\mu}{r}. \tag{3.268}$$

§ 3.74. Energia cinetică a unui punct material

Se numește *energie cinetică a unui punct* de masă m, care se mișcă cu viteza v, jumătatea produsului dintre masă și pătratul vitezei

$$E_c = \frac{mv^2}{2}. \tag{3.269}$$

Energia cinetică este întotdeauna pozitivă și are dimensiunea $[E_c] = \text{N}\cdot\text{m}$, adică în aceleași unități ca și momentul unei forțe și lucrul mecanic elementar.

Dacă în procesul mişcării unui punct faţă de un sistem de referinţă inerţial energia cinetică se consideră ca o funcţie de timp, atunci ea este legată de rezultanta $\vec{P}$ a forţelor aplicate punctului cu formula

$$\mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathrm{d}L(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t, \tag{3.270}$$

adică diferenţiala energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic elementar al rezultantei forţelor aplicate punctului. Deci, variaţia energiei cinetice pentru intervalul de timp dat (t_1, t_2) se exprimă cu formula

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t. \tag{3.271}$$

Produsul scalar dintre vectorul forţă şi vectorul viteză a punctului de aplicaţie se numeşte *puterea* acelei forţe

$$\vec{P}\cdot\vec{v} = W(\vec{P}). \tag{3.272}$$

Puterea este o mărime scalară cu dimensiunea $[W] = \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = W$ (vezi tabela 2.4).

Integrala în raport cu timpul a puterii forţei $\vec{P}$ se numeşte *lucrul mecanic total* al acelei forţe pentru intervalul de timp (t_1, t_2) considerat

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{P}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = L(\vec{P})\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{3.273}$$

Egalitatea (3.271) se poate scrie sub forma

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L(\vec{P})\Big|_{t_1}^{t_2}, \tag{3.274}$$

adică variaţia energiei cinetice a punctului în intervalul de timp dat este egală cu lucrul mecanic total, pentru acelaşi interval, al rezultantei forţelor aplicate acelui punct. În cazul unui cîmp de forţe staţionar, lucrul mecanic total în intervalul de timp (t_1, t_2), în decursul căruia punctul a trecut din poziţia M_1 în poziţia M_2 pe o traiectorie oarecare, se poate reprezenta prin integrala curbilinie

$$L(\vec{P})\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{\widehat{M_1M_2}} X(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Y(x,y,z)\,\mathrm{d}y + Z(x,y,z)\,\mathrm{d}z, \tag{3.275}$$

sau prin integrala pe arcul M_1M_2

$$L(\vec{P})\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{s_1}^{s_2} P(s)\cdot\cos\alpha(s)\cdot\mathrm{d}s. \tag{3.276}$$

dacă mărimea forței P și unghiul ei α cu tangenta la traiectorie se exprimă prin valoarea arcului. Integrala din formula (3.276) se numește *lucrul mecanic total al forței cîmpului* pe arcul M_1M_2 dat

$$L(\vec{P})\Big|_{M_1}^{M_2} = \int_{s_1}^{s_2} P(s) \cdot \cos \alpha(s) \, ds. \qquad (3.277)$$

Formula variației energiei cinetice a punctului în mișcarea într-un cîmp de forțe are forma

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L(\vec{P})\Big|_{M_1}^{M_2}. \qquad (3.278)$$

Dacă cîmpul de forțe este un cîmp potențial $U(x,y,z)$, atunci

$$\int_{M_1M_2} X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = \int_{M_1M_2} \mathrm{d}U = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) \qquad (3.279)$$

și lucrul mecanic al forței $\vec{P}$ a cîmpului potențial, la deplasarea punctului din poziția $M_1(x_1,y_1,z_1)$ în poziția $M_2(x_2,y_2,z_2)$, se exprimă cu formula

$$L(\vec{P})\Big|_{M_1}^{M_2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1), \qquad (3.280)$$

adică acest lucru mecanic este egal cu diferența valorilor funcției de forțe între pozițiile finală și inițială ale punctului. Formula variației energiei cinetice a unui punct în mișcarea sa sub acțiunea unei forțe într-un cîmp potențial, are forma

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1). \qquad (3.281)$$

Funcția de coordonate, care diferă de funcția de forțe prin semn, adică funcția

$$\Pi(x, y, z) = - U(x, y, z) \qquad (3.282)$$

se numește *funcție potențială*, iar valoarea ei reprezintă *energia potențială* a punctului în locul dat al cîmpului. Formula (3.281) conduce la egalitatea

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi(x, y, z) = h, \qquad (3.283)$$

unde mărimea h rămîne constantă în tot decursul mișcării. Suma energiilor cinetică și potențială ale unui punct se numește *energia lui mecanică*

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi(x, y, z) = E. \qquad (3.284)$$

Egalitatea

$$E = h \tag{3.285}$$

exprimă *legea conservării energiei mecanice* a unui punct în mişcarea lui sub acţiunea unei forţe într-un cîmp potenţial. Suprafeţele determinate în cîmpul potenţial de ecuaţia

$$\Pi(x, y, z) = C, \tag{3.286}$$

pentru diferite valori ale constantei C se numesc *suprafeţe echipotenţiale* sau *suprafeţe de nivel*. Prin fiecare punct al cîmpului trece numai o suprafaţă de nivel, determinată de ecuaţia

$$\Pi(x, y, z) = \Pi(x_1, y_1, z_1) = C_1. \tag{3.287}$$

Vectorul forţă într-un cîmp potenţial este îndreptat după normala la suprafaţa de nivel, care trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi anume în acea parte, în care energia potenţială descreşte. Pentru cîmpul gravitaţional, suprafeţele de nivel sînt, local, plane orizontale. În cazul unei axe Oz verticale, orientată în sus, energia potenţială în cîmpul forţei gravitaţionale P se exprimă cu formula

$$\Pi(x, y, z) = Pz. \tag{3.288}$$

Pentru o forţă elastică, $\vec{P} = -c\vec{r}$,

$$\Pi(x, y, z) = \frac{c(x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{cr^2}{2} \tag{3.289}$$

şi suprafeţele de nivel sînt sfere concentrice cu centrul forţei elastice.

§ 3.75. Energia cinetică a unui sistem

Suma energiilor cinetice ale punctelor unui sistem material se numeşte *energia cinetică a sistemului*

$$\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = E_c. \tag{3.290}$$

Sensul fizic al energiei cinetice constă în aceea, că ea caracterizează capacitatea mişcării mecanice de a se transforma în alt gen de mişcare, de exemplu în căldură. Pentru calculul energiei cinetice a unui sistem se descompune mişcarea acelui sistem într-o mişcare de transport (de translaţie) a unui sistem de axe cu originea în centrul de inerţie şi într-o mişcare relativă faţă de acest sistem de axe. În acest caz energia cinetică E_c faţă de axele absolute se exprimă în funcţie

de energia cinetică E'_c a mişcării relative cu ajutorul formulei lui König

$$E_c = \frac{mv_C^2}{2} + E'_c, \tag{3.291}$$

unde m este masa sistemului, iar $\vec{v}_C$ este viteza absolută a centrului de inerţie.

În procesul mişcării energia cinetică este legată de forţele P_i, aplicate punctelor sistemului, prin formula

$$\mathrm{d}E_c = \sum_i \mathrm{d}L(\vec{P}_i), \tag{3.292}$$

adică diferenţiala energiei cinetice a sistemului este egală cu suma lucrurilor mecanice elementare ale tuturor forţelor aplicate în punctele sistemului. Forţele $\vec{P}_i$ aplicate în punctele sistemului, se împart sau în *exterioare* $\vec{P}_i^{(e)}$ şi *interioare* $\vec{F}_{ij}$, sau în forţe date $\vec{F}_i$ (determinate de starea cinematică a mişcării punctelor sistemului) şi reacţiuni $\vec{R}_i$, care apar datorită acţiunii unor corpuri asupra punctelor sistemului şi care produc limitări geometrice sau cinematice asupra mişcării sistemului, denumite *legături*. Faţă de o asemenea împărţire a forţelor, formula (3.292) se foloseşte sau în forma

$$\mathrm{d}E_c = \sum_i \mathrm{d}L(\vec{P}_i^{(e)}) + \sum_{i,j} \mathrm{d}L(\vec{F}_{ij}), \tag{3.293}$$

sau în forma

$$\mathrm{d}E_c = \sum_i \mathrm{d}L(\vec{F}_i) + \sum_i \mathrm{d}L(\vec{R}_i). \tag{3.294}$$

Dacă din proprietăţile fizice ale legăturilor rezultă că suma lucrurilor mecanice ale reacţiunilor lor rămîne egală cu zero în tot timpul mişcării sistemului, legăturile se numesc *ideale*. În cazul legăturilor ideale, formula (3.294) devine

$$\mathrm{d}E_c = \sum_i \mathrm{d}L(\vec{F}_i). \tag{3.295}$$

Cele mai importante exemple de legături ideale, impuse unor corpuri rigide, care compun sistemul dat, sînt: fixarea unuia sau a două puncte ale corpului, legarea unor corpuri prin articulaţii, legarea unor corpuri prin fire flexibile inextensibile, obligarea corpurilor de a aluneca pe suprafeţe absolut netede, rigide, fixe, rostogolirea unor corpuri fără alunecare pe suprafeţe fixe, alunecarea corpurilor unul pe altul pe suprafeţe absolut netede, rostogolirea unui corp pe altul fără alunecare.

Energia cinetică E'_c a mişcării relative a unui sistem faţă de axe în mişcarea de translaţie, cu originea în centrul de inerţie, este legată

de forțele aplicate punctelor sistemului cu o formulă analogă formulei (3.292)

$$dE'_c = \sum_i dL'(\vec{P}_i), \qquad (3.296)$$

unde $dL'(\vec{P}_i)$ sînt lucrurile mecanice elementare ale forțelor $\vec{P}_i$ cu viteza relativă $\vec{v}_i$, adică:

$$dL'(\vec{P}_i) = \vec{P}_i \cdot \vec{v}'_i \, dt. \qquad (3.297)$$

Dacă forțele $\vec{P}_i$ sînt de poziție, adică depind numai de pozițiile punctelor sistemului, suma lucrurilor mecanice elementare se exprimă cu formula

$$\sum_i dL(\vec{P}_i) = \sum_i (X_i \, dx_i + Y_i \, dy_i + Z_i \, dz_i), \qquad (3.298)$$

unde funcțiile X_i, Y_i, Z_i depind, în general, de coordonatele tuturor punctelor sistemului. În cazul cînd membrul din dreapta al formulei (3.298) este o diferențială totală exactă a unei funcții U de coordonatele punctelor sistemului, atunci

$$\sum_i dL(\vec{P}_i) = dU. \qquad (3.299)$$

Această funcție U se numește *funcție de forțe*, iar funcția $\Pi = -U$ este *funcția potențială a sistemului*. Din punct de vedere fizic funcția Π este energia potențială a sistemului și se exprimă prin lucrul mecanic al forțelor cîmpului la deplasarea acestui sistem din poziția finală în cea inițială.

Proiecțiile forței $\vec{P}_i$ pe axele sistemului fundamental de referință se exprimă în funcție de U sau de Π cu formulele

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}.$$

În cazul existenței unei funcții de forță, formula (3.292) ia forma

$$dE_c = dU = -d\Pi. \qquad (3.300)$$

De aici rezultă că în cazul mișcării unui sistem sub acțiunea unor forțe, care admit o funcție de forță, în decursul mișcării se conservă mărimea $E_c - U$ sau $E_c + \Pi$ adică

$$E_c - U = E_c + \Pi = h, \qquad (3.301)$$

unde h este o constantă. Suma $E_c + \Pi = E$ a energiilor cinetică și potențială se numește *energia mecanică a sistemului* iar ecuația (3.301) exprimă *legea conservării energiei mecanice a sistemului* în mișcarea lui sub acțiunea unor forțe care admit o funcție de forță.

Dacă densitatea γ este constantă, ea se scoate de sub semnul integrală. Integralele care rămîn se numesc *momente geometrice de inerție*; înmulțindu-le cu densitatea, adică cu $\frac{m}{V}$, se obțin momentele de inerție ale masei corpului.

Momentul de inerție J_O în raport cu un punct arbitrar O este legat de momentul de inerție J_C în raport cu centrul de inerție al sistemului prin formula

$$J_O = J_C + md^2, \tag{3.311}$$

unde $d = OC$. Momentul de inerție J_Δ în raport cu axa Δ este legat de momentul de inerție $J_{\Delta'}$ în raport cu axa Δ', dusă prin centrul de inerție C al sistemului, paralel cu axa Δ, prin formula

$$J_\Delta = J_{\Delta'} + md^2, \tag{3.312}$$

unde d este distanța dintre axele Δ și Δ'. Momentul de inerție $J_{(\Pi)}$ în raport cu planul (Π) este legat de momentul de inerție $J_{(\Pi_C)}$ în raport cu planul (Π_C), dus prin centrul de inerție C al sistemului paralel cu planul (Π), cu formula

$$J_{(\Pi)} = J_{(\Pi_C)} + md^2, \tag{3.313}$$

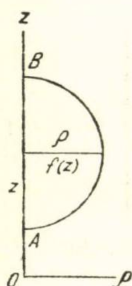


Fig. 3.66.

unde d este distanța dintre planele (Π) și (Π_C). Cel mai important rol îl joacă momentele de inerție axiale. În cazul unui corp omogen de rotație, format prin rotirea unui arc AB în jurul unei axe (fig. 3.66), ecuația arcului avînd forma $\rho = f(z)$, momentul de inerție J_z în raport cu axa de rotație Oz se exprimă prin formula

$$J_z = \frac{m}{2} \frac{\int_{z_A}^{z_B} f^4(z)\,dz}{\int_{z_A}^{z_B} f^2(z)\,dz}, \tag{3.314}$$

iar momentele de inerție în raport cu axele Ox și Oy, perpendiculare pe axa de rotație, prin formulele

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z + m \frac{\int_{z_A}^{z_B} f^2(z) z^2\,dz}{\int_{z_A}^{z_B} f^2(z)\,dz}; \tag{3.315}$$

Aceste momente de inerție în raport cu axe perpendiculare pe axa de rotație se numesc uneori *momente de inerție ecuatoriale*.

§ 3.78. Elipsoidul şi tensorul momentelor de inerţie

Momentul de inerţie în raport cu axa Δ (fig. 3.67) care trece prin originea coordonatelor şi formează cu axele de coordonate unghiurile α, β, γ, se determină cu formula

$$J_\Delta = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma - 2\,J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2\,J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2\,J_{xy}\cos\alpha\cos\beta, \qquad (3.316)$$

unde coeficienţii J_{yz}, J_{zx}, J_{xy} se determină cu formulele

$$J_{yz}=\sum_i m_i y_i z_i,\quad J_{zx}=\sum_i m_i z_i x_i,\quad J_{xy}=\sum_i m_i x_i y_i. \qquad (3.317)$$

Aceşti coeficienţi au aceleaşi dimensiuni, ca şi momentele de inerţie, însă pot fi pozitivi sau negativi şi se numesc *produse de inerţie* sau *momente centrifugale de inerţie*, în raport cu axele date Ox, Oy, Oz.

Dacă pe axa Δ se ia, la o anumită scară, segmentul $OP = \frac{1}{\sqrt{J_\Delta}}$, coordonatele x, y, z ale punctului P satisfac ecuaţia

$$J_x\cdot x^2+J_y\cdot y^2+J_z\cdot z^2-2J_{xy}xy-2J_{yz}yz-2J_{zx}zx=1. \qquad (3.318)$$

Această ecuaţie determină un elipsoid cu centrul în punctul O, numit *elipsoidul de inerţie* al corpului în punctul dat O. Deoarece momentul de inerţie J_Δ în jurul axei Δ se poate calcula direct cu formula:

$$J_\Delta=\sum_i m_i\,\rho_i^2$$

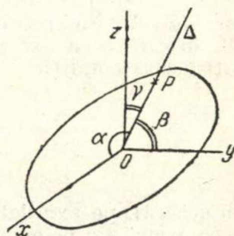


Fig. 3.67.

fără ajutorul axelor Ox, Oy, Oz elipsoidul de inerţie este imaginea geometrică a unei anumite mărimi fizice, care caracterizează distribuţia maselor punctelor corpului în raport cu punctul dat O. Această mărime se numeşte *tensorul momentelor de inerţie* (*tensorul de inerţie*) al corpului în punctul dat. Analitic, în coordonatele rectangulare x, y, z, tensorul se caracterizează prin *coeficienţii ecuaţiei elipsoidului de inerţie*, care se aşază într-o tabelă şi se numesc *componentele tensorului momentelor de inerţie* pe axele date Ox, Oy, Oz

$$\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}. \qquad (3.319)$$

Dacă drept axe Ox, Oy, Oz, se iau axele de simetrie ale elipsoidului de inerţie, ecuaţia lui ia forma

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1 \qquad (3.320)$$

unde coeficienţii A, B, C vor indica momentele de inerţie faţă de axele de simetrie ale elipsoidului de inerţie; aceste axe de simetrie se numesc *axe principale de inerţie ale corpului* în punctul dat O, iar momentele respective de inerţie *momente principale de inerţie* în acelaşi punct. În raport cu axele principale tabela componentelor tensorului momentelor de inerţie ia forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \tag{3.321}$$

astfel că faţă de aceste axe produsele de inerţie sînt egale cu zero. Invers, dacă două produse de inerţie sînt egale cu zero, atunci acea axă, ale cărei coordonate intră în aceste produse, este axă principală pentru originea coordonatelor. De exemplu, pentru $J_{xz} = J_{yz} = 0$, principală va fi axa Oz. Dacă se schimbă originea, din O în O' pe axa Oz, păstrînd direcţia axelor, produsele de inerţie se schimbă după formulele

$$J_{xz} = J_{x'z'} + mhx_C, \quad J_{yz} = J_{y'z'} + mhy_C, \tag{3.322}$$

unde $h = OO'$, iar x_C şi y_C sînt coordonatele *centrului de greutate al corpului*. De aici rezultă că pentru ca pe o axă să se găsească un punct O', în care acea axă să fie axă principală de inerţie, trebuie să fie satisfăcută condiţia

$$\frac{J_{xz}}{\sum\limits_i m_i x_i} = \frac{J_{yz}}{\sum\limits_i m_i y_i}. \tag{3.323}$$

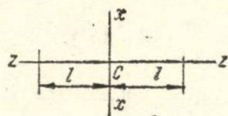
În general, pe axa dată nu se găseşte un astfel de punct, pentru care acea axă să fie principală.

Dacă axa este principală pentru două puncte ale ei, atunci ea trece prin centrul de greutate al corpului şi va fi axă principală în toate punctele ei. Invers, o axă principală în centrul de greutate, va fi principală în toate punctele ei. Axele principale, care trec prin centrul de greutate al corpului, se numesc *axe principale centrale de inerţie.*

Deoarece, în general, elipsoidul de inerţie are trei axe de simetrie perpendiculare una pe alta, atunci în punctul dat există, de asemenea, trei axe principale şi ele sînt perpendiculare una pe alta. Dacă elipsoidul de inerţie este un elipsoid de rotaţie, atunci una din axele principale va fi axa de rotaţie a acestui elipsoid, iar toate axele perpendiculare pe ea în centrul elipsoidului vor fi de asemenea principale; momentele de inerţie în raport cu fiecare din aceste axe vor fi egale între ele. Dacă corpul posedă o axă de simetrie, ea va fi axă principală în toate punctele ei. Dacă corpul este o placă infinit subţire, atunci în fiecare punct al lui, una din axele principale de inerţie va fi perpendiculară pe planul lui.

Tabela momentelor principale centrale de inerţie.

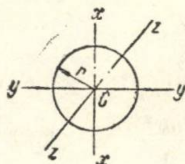
1) Bară dreaptă



$$J_x = \frac{1}{12} ml^2$$

$$i_x = 0{,}2866\ l,\ J_z = 0.$$

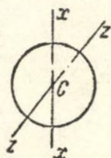
2) Inel circular



$$J_z = mr^2,\ i_z = r,$$

$$J_x = \frac{mr^2}{2},\quad i_x = 0{,}7071\ r.$$

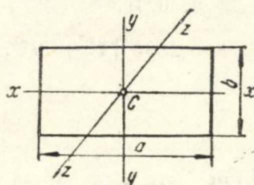
3) Disc circular



$$J_z = \frac{mr^2}{2},\quad i_z = 0{,}7071\ r.$$

$$J_x = \frac{mr^2}{4},\quad i_x = 0{,}5\ r.$$

4) Dreptunghi

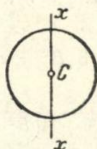


$$J_x = \frac{mb^2}{12},\ i_x = \frac{b\sqrt{3}}{6},\ J_y = \frac{ma^2}{12},$$

$$i_y = \frac{a\sqrt{3}}{6},\ J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2),$$

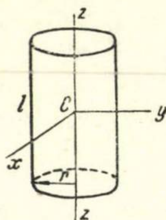
$$i_z = \sqrt{a^2 + b^2}\ \frac{\sqrt{3}}{6}\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}2886\right),$$

5) Suprafaţa sferei



$$J_x = \frac{2mr^2}{3},\quad i_x = 0{,}8165r.$$

6) Suprafața cilindrului circular



$$J_z = mr^2, i_z = r,$$

$$J_x = \frac{m}{12}(l^2 + 6r^2),$$

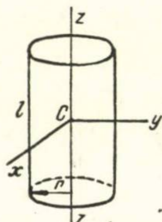
$$i_x = 0{,}2886\sqrt{l^2 + 6r^2}$$

7) Volumul sferei



$$J_x = \frac{2mr^2}{5},\ i_x = 0{,}6325\, r.$$

8) Volumul cilindrului circular



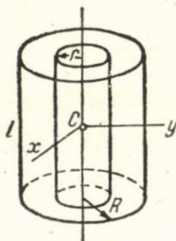
$$J_z = \frac{mr^2}{2},$$

$$J_x = \frac{m}{12}(l^2 + 3r^2),$$

$$i_z = 0{,}7071 r,$$

$$i_x = 0{,}2886\sqrt{l^2 + 3r^2}.$$

9) Strat cilindric



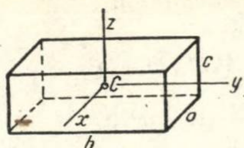
$$J_z = \frac{m}{2}(R^2 + r^2),$$

$$i_z = 0{,}7071\sqrt{R^2 + r^2},$$

$$J_x = \frac{m}{12}[l^2 + 3(R^2 + r^2)],$$

$$i_x = 0{,}2886\sqrt{l^2 + 3(R^2 + r^2)}.$$

10) Paralelipiped dreptunghic



$$J_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2),$$

$$i_x = 0{,}2886\sqrt{b^2 + c^2},$$

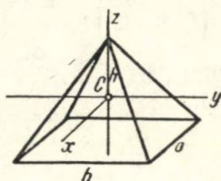
$$J_y = \frac{m}{12}(c^2 + a^2),$$

$$i_y = 0{,}2886\sqrt{c^2 + a^2},$$

$$J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2),$$

$$i_z = 0{,}2886\sqrt{a^2 + b^2}.$$

11) Piramidă cu baza un dreptunghi



$$J_z = \frac{m}{20}(a^2 + b^2),$$

$$i_z = 0{,}2236\sqrt{a^2 + b^2},$$

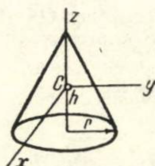
$$J_x = \frac{m}{20}\left(\frac{3}{4}h^2 + b^2\right),$$

$$i_x = 0{,}2236\sqrt{\frac{3}{4}h^2 + b^2},$$

$$J_y = \frac{m}{20}\left(\frac{3}{4}h^2 + a^2\right),$$

$$i_y = 0{,}2236\sqrt{\frac{3}{4}h^2 + a^2}.$$

12) Con circular drept

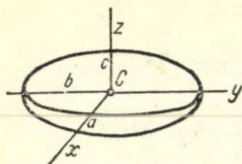


$$J_z = \frac{3}{10}mr^2, \quad i_z = 0{,}5477\, r,$$

$$J_x = \frac{3m}{20}\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right),$$

$$i_x = 0{,}3873\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}.$$

13) Elipsoid cu trei axe



$$J_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2),$$

$$i_z = 0,4472\sqrt{a^2 + b^2},$$

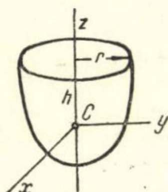
$$J_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2),$$

$$i_x = 0,4472\sqrt{b^2 + c^2},$$

$$J_y = \frac{m}{5}(c^2 + a^2),$$

$$i_y = 0,4472\sqrt{c^2 + a^2}.$$

14) Paraboloid de rotaţie

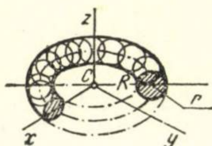


$$J_z = \frac{mr^2}{5}, \quad i_z = 0,5773r,$$

$$J_x = \frac{m}{6}\left(r^2 + \frac{h^2}{3}\right),$$

$$i_x = 0,7071\sqrt{3r^2 + h^2}.$$

15) Tor



$$J_z = m\left(R^2 + \frac{3r^2}{4}\right),$$

$$i_z = 0,5\sqrt{4R^2 + 3r^2},$$

$$J_x = m\left(\frac{R^2}{2} + \frac{5r^2}{8}\right),$$

$$i_x = 0,7071\sqrt{R^2 + 1,25\,r^2}.$$

§ 3.79. Momentul cinetic al unui rigid

Dacă un rigid se roteşte în jurul unei axe instantanee OK (fig. 3.68) cu viteza unghiulară ω, momentul cinetic are expresia

$$\vec{K}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ = \vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,2} - \sum_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)\, m_i \vec{r}_i. \tag{3.324}$$

De aici proiecţiile K_x, K_y, K_z pe axele arbitrare Ox, Oy, Oz se exprimă cu formulele

$$\left.\begin{aligned} K_x &= J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z, \\ K_y &= -J_{yx}\omega_y + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z, \\ K_z &= -J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z. \end{aligned}\right\} \tag{3.325}$$

Aceste proiecţii se obţin prin înmulţirea coloanelor din tabela componentelor tensorului de inerţie (3.319) respectiv cu proiecţiile ω_x, ω_y, ω_z ale vectorului viteză unghiulară şi prin însumarea produselor astfel obţinute. Dacă, în particular, drept axă de rotaţie se alege axa Oz, atunci proiecţiile momentului cinetic se exprimă prin mărimea algebrică ω a vitezei unghiulare cu formulele

$$K_x = -J_{xz}\omega, \quad K_y = -J_{yz}\omega, \quad K_z = J_z\omega. \tag{3.326}$$

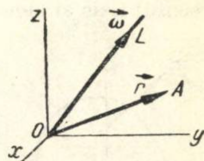


Fig. 3.68.

Dacă se aleg drept axe Ox, Oy, Oz, axele principale de inerţie din punctul O, formulele (3.325) iau forma

$$K_x = A\omega_x, \; K_y = B\omega_y, \; K_z = C\omega_z, \tag{3.327}$$

unde A, B, C sînt momentele principale de inerţie.

În cazul general, descompunînd mişcarea corpului într-o mişcare de transport de translaţie cu viteza v_C a centrului C de inerţie şi într-o mişcare relativă de rotaţie în jurul axei instantanee CL, atunci conform formulei (3.247), se obţine

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v} + \vec{\omega}\sum_i m_i \vec{r}_i'^2 - \sum_i m_i(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i')\,\vec{r}_i'. \tag{3.328}$$

§ 3.80. Ecuaţia diferenţială a mişcării de rotaţie a unui rigid în jurul unei axe fixe

La rotaţia unui rigid în jurul unei axe fixe OO' (fig. 3.69) forţele exterioare sînt forţele date $\bar{F}_i$ şi reacţiunile $\vec{R}$ şi $\vec{R}'$ ale punctelor fixate. De aceea, formula (3.249) pentru derivata $\frac{d\vec{K}_O}{dt}$ a momentului cinetic, ia forma

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) + \vec{M}_O(\vec{R}'),$$

de unde, pentru proiecţia pe axa de rotaţie OO', se obţine ecuaţia

$$\frac{dK_{OO'}}{dt} = \sum_i M_{OO'}(\vec{F}_i). \tag{3.329}$$

Luînd OO' drept axă Oz, se obţine $K_{OO'} = J_z\omega$ şi deoarece $J_z =$ $=$ const, rezultă ecuaţia

$$J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_z(\vec{F}_i), \tag{3.330}$$

sau

$$J_z\varepsilon = \sum_i M_z(\vec{F}_i), \tag{3.331}$$

unde ε este acceleraţia unghiulară a corpului. Această ecuaţie arată sensul fizic al momentului de inerţie J, ca fiind măsura inerţiei corpului la mişcarea de rotaţie în jurul unei axe date. Dacă poziţia corpului este determinată de unghiul φ de rotaţie în jurul axei Oz, faţă de un plan fix xOz, atunci $\sum_i M_z(\vec{F}_i)$ se exprimă sub forma unei funcţii date de mărimile t, φ, $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, care caracterizează starea cinematică a punctelor de aplicaţie ale forţelor date, iar ecuaţia (3.328) ia forma

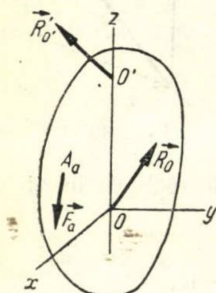


Fig. 3.69.

$$J \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = f\left(t, \varphi, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right), \tag{3.332}$$

care ca formă este, identică cu ecuaţia (3.190) de mişcare a unui punct pe o curbă netedă dată.

§ 3.81. Reacţiunile în punctele fixe ale axei unui corp în rotaţie

În mişcarea de rotaţie a unui corp în jurul unei axe, în punctele fixate ale ei O şi O', apar reacţiunile dinamice $\vec{R}$ şi $\vec{R}'$ (fig. 3.69). Proiecţiile acestor reacţiuni pe un sistem oarecare de axe, Ox, Oy, Oz, imobile sau solidare cu rigidul, cu condiţia ca axa Oz să coincidă cu axa de rotaţie, se determină din ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_i F_{ix} + R_x + R'_x = -my_C\cdot\varepsilon - mx_C\cdot\omega^2,\\
&\sum_i F_{iy} + R_y + R'_y = mx_C\varepsilon - my_C\cdot\omega^2,\\
&\sum_i F_{iz} + R_z + R'_z = 0,\\
&\sum_i M_{Ox}(\vec{F}_i) - hR'_y = -J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2,\\
&\sum_i M_{Oy}(\vec{F}_i) + hR'_x = -J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2,
\end{aligned}\right\} \tag{3.333}$$

unde h este distanţa OO', iar x_C şi y_C sînt coordonatele centrului de greutate al corpului. Din aceste ecuaţii se determină complet proiecţiile, R'_x, R'_y, R_x, R_y şi suma proiecţiilor $R_z + R'_z$. Proiecţiile R_x, R_y, R'_x, R'_y, se descompun mai uşor în două părţi, punînd $R_x = S_x + N_x$, $R_y = S_y + N_y$, $R'_x = S'_x + N'_x$, $R'_y = S'_y + N'_y$ şi alegînd, pentru a satisface ecuaţia (3.333), astfel termenii, ca S_x, S'_x, S_y, S'_y să depindă numai de forţele date F_i iar componentele N_x, N'_x, N_y, N'_y, să depindă numai de viteza unghiulară ω şi de acceleraţia unghiulară ε. Se obţin atunci ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i F_{ix} + S_x + S'_x = 0, \quad \sum_i F_{iy} + S_y + S'_y = 0, \\ &\sum_i M_{Ox}(\vec{F}_i) - hS'_y = 0, \quad \sum_i M_{Oy}(\vec{F}_i) + hS'_x = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.334}$$

$$\left.\begin{aligned} &N_x + N'_x = -my_C\cdot\varepsilon - mx_C\omega^2, \quad N_y + N'_y = mx_C\cdot\varepsilon - my_C\cdot\omega^2 \\ &-hN'_y = -J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2, \quad hN'_x = -J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{3.335}$$

Dacă se consideră că $N_z = N'_z = 0$, atunci reacţiunile $\vec{R}$ şi $\vec{R}'$ se pot reprezenta sub forma $\vec{R} = \vec{S} + \vec{N}$, $\vec{R}' = \vec{S}' + \vec{N}'$. Componentele $\vec{S}$ şi $\vec{S}'$, care depind direct numai de forţele date $\vec{F}_i$ sînt egale cu reacţiunile care ar apare dacă rigidul nu s-ar roti, iar componentele $\vec{N}$ şi $\vec{N}'$, care depind numai de viteza unghiulară ω şi de acceleraţia unghiulară ε reprezintă forţele cu care au variat reacţiunile statice din cauza mişcării. Dacă se introduce acceleraţia a_C a centrului de greutate al corpului, componentele $\vec{N}$ şi $\vec{N}'$ se determină cu formulele

$$\left.\begin{aligned} N_x &= ma_{Cx} + \frac{1}{h}(J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2), \\ N_y &= ma_{Cy} - \frac{1}{h}(J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2), \\ N'_x &= -\frac{1}{h}(J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2), \\ N'_y &= \frac{1}{h}(J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2). \end{aligned}\right\} \tag{3.336}$$

Componentele $\vec{N}$ şi $\vec{N}'$ se anulează amîndouă atunci şi numai atunci, cînd axa de rotaţie este una din axele principale centrale de inerţie, adică atunci cînd $x_C = y_C = 0$, $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Dacă centrul de greutate al corpului este situat pe axa de rotaţie, însă această axă

nu este o axă principală de inerție, atunci $\vec{N} + \vec{N}' = 0$, adică aceste componente formează un cuplu. Momentul acestui cuplu este

$$M(\vec{N}, \vec{N}') = \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2} \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (3.337)$$

Dacă lipsesc forțele date $\vec{F}_i$, iar axa de rotație este centrală și principală, reacțiunile $\vec{R}$ și $\vec{R}'$ sînt egale cu zero și de aceea axa poate să nu fie fixată, iar corpul adus în momentul inițial în rotație în jurul unei axe centrale principale și apoi lăsat liber, va păstra starea de rotație uniformă în jurul acestei axe ca și cum ar fi axă fixă. Din acest motiv, axele centrale principale se numesc *axele de rotație libere ale corpului*. În problemele tehnice se cere de obicei determinarea nu a reacțiunilor $\vec{R}$ și $\vec{R}'$ ale punctelor fixate, ci a presiunilor $\vec{Q}$ și $\vec{Q}'$ exercitate în aceste puncte asupra axei punctelor care se rotesc. Aceste presiuni $\vec{Q}$ și $\vec{Q}'$ se determină prin intermediul reacțiunilor $\vec{R}$ și $\vec{R}'$, în virtutea legii egalității acțiunii și reacțiunii cu formula $\vec{Q} = -\vec{R}$, $\vec{Q}' = -\vec{R}'$.

§ 3.82. Pendulul fizic

Se numește *pendul fizic* un corp solid greu care se rotește în jurul unei axe fixe orizontale sub acțiunea greutății proprii.

Alegînd drept plan xOy (fig. 3.70) un plan vertical, în care se mișcă centrul de greutate C al corpului și definind poziția pendulului prin unghiul φ, format de raza OC corespunzătoare centrului de greutate cu verticala Ox în jos, se obține ecuația de rotație a pendulului în forma

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\xi \cdot \sin\varphi, \quad (3.338)$$

unde $\xi = OC$ este raza cercului pe care se mișcă centrul de greutate, iar m este masa pendulului. Dacă ecuației (3.338) i se dă forma

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \text{ unde } l = \frac{J_z}{m\xi}, \quad (3.339)$$

ea devine identică cu ecuația (3.193) a mișcării pendulului matematic circular. Din acest motiv, lungimea l, determinată de formula (3.339), se numește *lungime redusă a pendulului fizic* sau lungimea pendulului matematic sincron, adică a pendulului matematic avînd aceeași perioadă de oscilație.

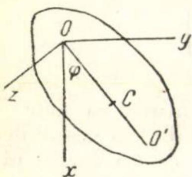


Fig. 3.70.

Deoarece $J_{Oz} = J_{OC} + m\xi^2$, unde J_{OC} este momentul de inerție în raport cu axa centrală, paralelă cu axa de rotație, atunci $l = \frac{J_{OC}}{m\xi} + \xi$,

adică $l > \xi$. Punctul O', situat pe raza de rotaţie a centrului de greutate la distanţa l de axa de rotaţie, se numeşte *centru de oscilaţie*, iar dreapta Oz', care trece prin centrul de oscilaţie paralel cu axa de rotaţie se numeşte *axa de oscilaţie*. Distanţa $\xi' = O'C$ de la axa de oscilaţie pînă la centrul de greutate se determină cu formula $\xi\xi' = \frac{J_{OC}}{m}$, din care rezultă că dacă axa de oscilaţie se transformă în axă de rotaţie, noua axă de oscilaţie va fi vechea axă de rotaţie. Dacă pendulul este simetric faţă de planul xOy, în care se mişcă centrul de greutate C, reacţiunile punctelor fixate ale axei se reduc la o rezultantă $\vec{R}$, aplicată în punctul O şi avînd proiecţiile

$$R_x = -\omega^2 m x_C - \varepsilon m y_C - mg, \quad R_y = -\omega^2 m y_C + \varepsilon m x_C,$$

unde x_C şi y_C sînt coordonatele centrului de greutate, iar ω şi ε sînt respectiv viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară a pendulului.

§ 3.83. Oscilaţii de torsiune

Un corp, atîrnat de un punct fix cu un fir prins de corp în centrul de greutate, execută după răsucirea firului, o rotaţie în jurul unei axe verticale fixe, sub acţiunea forţelor elastice din fir. Momentul acestor forţe, atunci cînd firul a fost răsucit cu unghiul φ, este egal cu $-c\varphi$, unde c este un coeficient care depinde de materialul firului. Ecuaţia de rotaţie capătă forma

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0, \qquad (3.340)$$

unde J este momentul de inerţie în raport cu axa centrală, care coincide cu firul.

Deoarece ecuaţia (3.340) are forma ecuaţiei (3.176) a oscilaţiilor armonice pentru $k^2 = \frac{c}{J}$, mişcarea de rotaţie obţinută a corpului se numeşte *oscilaţie de torsiune*. Perioada ei este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}. \qquad (3.341)$$

Oscilaţiile de torsiune pot fi utilizate pentru determinarea experimentală a momentului de inerţie în raport cu axa în jurul căreia au loc aceste oscilaţii. Pentru aceasta, se determină experimental perioada T_0 a oscilaţiilor de torsiune pentru un corp etalon, cu momentul de inerţie cunoscut J_0, astfel că $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{c}}$. Eliminînd din această formulă şi din formula (3.341) coeficientul c, se obţine

$$J = J_0\frac{T^2}{T_0^2}. \qquad (3.342)$$

§ 3.84. Mişcarea plană a unui rigid

Dacă un corp se mişcă paralel cu un plan fix xOy, poziţia lui este determinată de coordonatele x_C, y_C ale proiecţiilor centrului de greutate pe acest plan şi de unghiul φ de rotaţie în jurul axei Cz', care trece prin centrul de greutate şi este perpendiculară pe planul xOy. Proiectînd ecuaţia (3.225) de mişcare a centrului de greutate pe axele Ox şi Oy rezultă ecuaţiile

$$m\frac{d^2x_C}{dt^2}=\sum_i P_{ix}^{(e)},\quad m\frac{d^2y_C}{dt^2}=\sum_i P_{iy}^{(e)},\tag{3.343}$$

unde m este masa corpului, iar $P_i^{(e)}$ sînt forţele exterioare aplicate.

Ecuaţia (3.252) care exprimă teorema momentului cinetic în mişcarea relativă faţă de Cz' capătă forma

$$J_{Cz'}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\sum_i M_{Cz'}(\vec{P}_i^e).\tag{3.344}$$

Dacă primii membri conţin numai forţele date $\vec{F}_i$ ecuaţiile (3.343) şi (3.344) capătă forma

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x_C}{dt^2}&=f_1\left(t, x_C, y_C, \varphi, \frac{dx_C}{dt}, \frac{dy_C}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}\right),\\ m\frac{d^2y_C}{dt^2}&=f_2\left(t, x_C, y_C, \varphi, \frac{dx_C}{dt}, \frac{dy_C}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}\right),\\ J_{Cz'}\frac{d^2\varphi}{dt^2}&=f_3\left(t, x_C, y_C, \varphi, \frac{dx_C}{dt}, \frac{dx_C}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}\right),\end{aligned}\right\}\tag{3.345}$$

unde f_1, f_2 şi f_3 sînt funcţii cunoscute de argumentele lor, iar ecuaţiile (3. 345), atunci cînd sînt date condiţiile iniţiale t_0, $x_C^{(0)}$, $y_C^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$, $\left(\frac{dx_C}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy_C}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$, determină complet cinematica mişcării corpului. Însă, în general, în ecuaţiile (3.343) şi (3.344) intră reacţiuni exterioare necunoscute şi atunci pentru rezolvarea problemei sînt necesare condiţii suplimentare, care caracterizează legăturile.

§ 3.85. Lucrul mecanic elementar al forţelor aplicate în punctele unui rigid

Dacă mişcarea rigidului este caracterizată de viteza $\vec{v}_0$ a polului O, arbitrar ales în corp, şi de viteza unghiulară $\vec{\omega}$, suma lucrurilor mecanice elementare ale forţelor $\vec{P}_i$, aplicate în punctele corpului, se exprimă cu formula

$$\sum_i dL(\vec{P}_i)=\vec{v}_0\cdot\left(\sum_i\vec{P}_i\right)dt+\vec{\omega}\cdot\sum_i\vec{M}_O(\vec{P}_i)\,dt.\tag{3.346}$$

Dacă prin $\vec{P}_i$ se notează forțele interioare, adică $\vec{P}_i = \sum_j F_{ij}$, atunci conform formulelor (3.214) și (3.215)

$$\sum_i \vec{P}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = 0, \ \sum_i \vec{M}_O(\vec{P}_i) = \sum_{i,j} \vec{M}_O(\vec{F}_{ij}) = 0$$

și în consecință

$$\sum_{i,j} \mathrm{d}L(\vec{F}_{ij}) = 0. \tag{3.347}$$

adică suma lucrurilor mecanice elementare ale tuturor forțelor interioare dintr-un corp solid este totdeauna egală cu zero. Dacă $\vec{P}_i^{(e)}$ sînt forțe exterioare care au rezultanta $\vec{P}_O$ aplicată în punctul O, formula (3.346) devine

$$\sum_i \mathrm{d}L(\vec{P}_i^{(e)}) = \vec{v}_O \cdot \vec{P}_O \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}L(\vec{P}_O), \tag{3.348}$$

adică în cazul existenței unei rezultante pentru sistemul forțelor exterioare, suma lucrurilor mecanice elementare este egală cu lucrul mecanic elementar al rezultantei. Dacă sistemul forțelor exterioare $\vec{P}_i^{(e)}$ este echivalent cu un cuplu, $(\vec{P}_1^{(e)}, \ldots, \vec{P}_n^{(e)}) \backsim (\vec{P}, -\vec{P})$, formula (3.346) dă

$$\sum_i \mathrm{d}L(\vec{P}_i^{(e)}) = \mathrm{d}L(\vec{P}, -\vec{P}) = \vec{\omega} \cdot \vec{M}(\vec{P}, -\vec{P}) \, \mathrm{d}t. \tag{3.349}$$

Deoarece $\vec{\omega} \cdot \vec{M}(\vec{P}, -\vec{P}) \, \mathrm{d}t = M_\omega(\vec{P}, -\vec{P}) \, \mathrm{d}\varphi$, unde $\mathrm{d}\varphi = \omega \mathrm{d}t$ indică un unghi infinit mic de rotație a corpului în jurul axei vectorului $\vec{\omega}$ în intervalul infinit mic de timp $\mathrm{d}t$, atunci formula pentru lucrul mecanic al cuplului capătă forma

$$\mathrm{d}L(\vec{P}, -\vec{P}) = M_\omega(\vec{P}, -\vec{P}) \mathrm{d}\varphi. \tag{3.350}$$

Dacă sistemul forțelor exterioare $P_i^{(e)}$ este în echilibru, din formula (3.346) rezultă că $\sum_i \mathrm{d}L(\vec{P}_i^{(e)}) = 0$, adică suma lucrurilor mecanice ale unui sistem de forțe exterioare în echilibru, acționînd asupra corpului dat, este egală cu zero. La rotația corpului în jurul axei fixe OO', formula (3.346) devine

$$\sum_i \mathrm{d}L(\vec{P}_i^{(e)}) = \vec{\omega} \cdot \sum_i \vec{M}_O (P_i^{(e)}) \, \mathrm{d}t. \tag{3.351}$$

Deoarece $\vec{\omega}\cdot\sum_i \vec{M}_O(\vec{P}_i^{(e)}) = \vec{\omega}\cdot\sum_i M_{OO'}(\vec{P}_i^{(e)})$, adică în cazul rotației unui rigid în jurul unei axe avem

$$\sum_i \mathrm{d}L(\vec{P}_i^{(e)}) = \sum_i M_{OO'}(\vec{P}_i^{(e)})\,\omega\mathrm{d}t,$$

de unde puterea N a unui sistem de forțe aplicate unui rigid care se rotește în jurul unei axe, se exprimă cu formula

$$N = \sum_i M_{OO'}(P_i^{(e)})\,\omega. \tag{3.352}$$

§ 3.86. Energia cinetică a unui rigid

Dacă corpul are o mișcare de translație cu viteza $\vec{v}$, energia cinetică se exprimă în funcție de masa m a corpului cu formula

$$E_c = \frac{mv^2}{2}. \tag{3.353}$$

La rotație în jurul axei fixe sau instantanee Δ, cu viteza unghiulară ω, energia cinetică se exprimă în funcție de momentul de inerție cu formula

$$E_c = J_\Delta \frac{\omega^2}{2}. \tag{3.354}$$

Dacă punctul O se ia ca origine a sistemului de axe $Oxyz$, energia cinetică se exprimă prin proiecțiile vitezei unghiulare și componentele tensorului de inerție pe aceste axe cu formulele

$$E_c = \frac{1}{2}[J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma -$$

$$- 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta] \tag{3.355}$$

În particular, dacă drept axe Ox, Oy, Oz se iau axele principale de inerție, formula ia forma

$$E_c = \frac{1}{2}[A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2]. \tag{3.356}$$

Dacă poziţia corpului se determină cu unghiurile lui Euler ψ, φ, θ, atunci energia cinetică se exprimă, pe baza relaţiilor (3.55), prin intermediul derivatelor $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ cu formula

$$E_c = \frac{1}{2}\left[A(\sin\varphi\sin\theta\cdot\dot{\psi} + \cos\varphi\cdot\dot{\theta})^2 + B(\cos\varphi\sin\theta\cdot\dot{\psi} - \sin\varphi\cdot\dot{\theta})^2 + C(\cos\theta\cdot\dot{\psi} + \dot{\varphi})^2\right], \quad (3.357)$$

unde drept axe Ox, Oy, Oz, sînt luate axele principale de inerţie, legate de corp. Dacă axa Oz este axă de simetrie dinamică, adică $B = A$ formula (3.357) ia forma

$$E_c = \frac{1}{2}\left[C\dot{\varphi}^2 + A(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + (C - A)\cos^2\theta\cdot\dot{\psi}^2 + 2C\cos\theta\cdot\dot{\psi}\dot{\varphi}\right]. \quad (3.358)$$

În cazul unui rigid liber, energia lui cinetică în funcţie de masa m, de viteza $\bar{v}_C$ a centrului de greutate, de viteza unghiulară instantanee ω şi de momentul de inerţie J_ω în raport cu axa care trece prin centrul de greutate şi care este paralelă cu vectorul $\vec{\omega}$, se exprimă folosind *formula lui König*

$$E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_\omega \omega^2. \quad (3.359)$$

Deoarece pentru un corp rigid suma lucrurilor mecanice elementare ale forţelor interioare este egală cu zero, atunci formula (3.292), pentru diferenţiala dE_c a energiei cinetice, în cazul unui rigid ia forma

$$dE_c = \sum_i dL(\vec{P}_i^{(e)}), \quad (3.360)$$

adică variaţia energiei cinetice a unui rigid depinde numai de forţele exterioare, care-i sînt aplicate.

§ 3.87. Ecuaţiile dinamice ale lui Euler pentru rotaţia unui rigid în jurul unui punct fix

Dacă un rigid se roteşte în jurul unui punct fix O şi dacă se alege acest punct drept origine a sistemului de axe $Oxyz$, solidare cu rigidul, atunci din formula (3.249), care exprimă *regula lui Resal*, se obţin următoarele relaţii între proiecţiile K_x, K_y, K_z ale momentului cinetic al corpului, proiecţiile ω_x, ω_y, ω_z ale vitezei sale un-

ghiulare și momentele $M_{Ox}(\vec{F}_i)$, $M_{Oy}(\vec{F}_i)$, $M_{Oz}(\vec{F}_i)$ ale forțelor date în raport cu aceste axe

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y &= \sum_i M_{Ox}(\vec{F}_i), \\ \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z &= \sum_i M_{Oy}(\vec{F}_i), \\ \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x &= \sum_i M_{Oz}(\vec{F}_i). \end{aligned}\right\} \quad (3.361)$$

Dacă, în particular, se iau drept axe Ox, Oy, Oz axele principale de inerție ale corpului, pe baza formulelor (3.324), aceste ecuații iau forma

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_x}{dt} + (C - B)\,\omega_y\omega_z &= \sum_i M_{Ox}(\vec{F}_i), \\ B\frac{d\omega_y}{dt} + (A - C)\omega_z\omega_x &= \sum_i M_{Oy}(\vec{F}_i), \\ C\frac{d\omega_z}{dt} + (B - A)\omega_x\omega_y &= \sum_i M_{Oz}(\vec{F}_i). \end{aligned}\right\} \quad (3.362)$$

și se numesc *ecuațiile dinamice ale lui Euler.*

Membrii din dreapta ai acestor ecuații, în general, depind explicit de timpul t, de poziția corpului, determinată de unghiurile lui Euler ψ, θ, φ și de proiecțiile ω_x, ω_y, ω_z ale vitezei unghiulare. De aceea, dacă la aceste ecuații dinamice se adaugă cele trei formule (3.55), adică ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} \omega_x = \dot\psi\sin\varphi\cos\theta + \dot\theta\cos\varphi,\ \omega_y = \dot\psi\cos\varphi\sin\theta - \dot\theta\sin\varphi, \\ \omega_z = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (3.363)$$

atunci ecuațiile (3.362) și (3.363) formează un sistem de șase ecuații diferențiale de ordinul întîi cu șase funcții necunoscute ψ, φ, θ, ω_x, ω_y, ω_z. Prin urmare, atunci cînd sînt date poziția inițială a corpului și viteza unghiulară inițială, ele determină complet mișcarea corpului în jurul punctului fix sub acțiunea forțelor date.

§ 3.88. Ecuațiile de mișcare ale unui rigid liber

În cazul general, mișcarea unui rigid liber se poate determina, dacă se cunosc, mișcarea centrului său de greutate și rotația corpului în jurul acestui centru, în raport cu un sistem de axe, avînd o mișcare de translație și originea în centrul de greutate. Ultima mișcare se determină cu ecuațiile (3.362) și (3.363), dacă se consideră că originea axelor coincide cu centrul de greutate al corpului. În locul determinării directe a mișcării centrului de greutate în raport cu axele fixe, se utilizează ecuațiile care determină proiecțiile v_x, v_y, v_z, ale

vitezei centrului de greutate pe axele Ox, Oy, Oz legate de corp. Aceste ecuaţii au forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y &= \frac{\sum_i F_{ix}}{m}, \\ \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z &= \frac{\sum_i F_{iy}}{m}, \\ \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x &= \frac{\sum_i F_{iy}}{m}, \end{aligned}\right\} \quad (3.364)$$

unde m este masa corpului.

§ 3.89. Giroscopul

Un corp care se roteşte în jurul unui punct fix O, se numeşte *giroscop*, dacă elipsoidul de inerţie în acest punct este un elipsoid de rotaţie. Axa de rotaţie a acestui elipsoid se numeşte *axa giroscopului*. Dacă drept axă Oz a sistemului $Oxyz$, invariabil legat de corp, se ia axa giroscopului; momentele principale de inerţie J_x şi J_y vor fi egale între ele $J_x = J_y = A$. Din acest motiv pentru giroscop a treia *ecuaţie dinamică a lui Euler* (3.362) ia forma

$$C \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_i M_{Oz}(\vec{F}_i). \quad (3.365)$$

Un exemplu de giroscop este un corp material simetric, care se roteşte în jurul unuia din punctele axei de simetrie. La rotaţia giroscopului, axa Oz, a lui, vectorul $\vec{\omega}$ al vitezei unghiulare şi vectorul $\vec{K}_O$ al momentului cinetic sînt totdeauna situaţi în acelaşi plan.

Dacă suma momentelor forţelor date, în raport cu centrul de rotaţie, este egală cu zero, giroscopul se numeşte *echilibrat*. În acest caz, conform *regulii lui Resal* [formula (3.249)], vectorul $\vec{K}_O$ al momentului cinetic rămîne constant. Axa Oz a giroscopului formează un unghi constant cu direcţia fixă a momentului cinetic. Dacă direcţia momentului cinetic $\vec{K}_O$ se ia drept axă fixă Oz_1, atunci unghiul θ de nutaţie păstrează mărimea constantă θ_0, Vectorul $\vec{\omega}$ rămîne în permanenţă în planul zOz_1 şi se roteşte împreună cu el în jurul axei Oz_1 cu viteza unghiulară de precesie $\dot{\psi}$ dată de formula

$$\dot{\psi} = \frac{K}{A}. \quad (3.366)$$

Vectorul $\vec{\omega}$ al vitezei unghiulare se descompune în componentele ω_1 și ω_2, îndreptate după axele Oz_1 și Oz și avînd mărimile algebrice

$$\omega_1 = \dot{\psi} = \frac{K}{A}, \qquad \omega_2 = \frac{K(A-C)}{AC} \cos \theta_0. \tag{3.367}$$

Prin urmare, rotația unui giroscop echilibrat poate fi privită ca rezultatul compunerii rotației sale relative în jurul axei proprii cu viteza unghiulară constantă ω_2 și a rotației de transport a acestei axe în jurul direcției fixe a momentului cinetic, cu viteza unghiulară constantă ω_1.

§ 3.90. Precesia regulată a giroscopului

Rotația giroscopului se numește *precesie regulată*, dacă ea se compune dintr-o rotație uniformă relativă în jurul axei proprii Oz cu viteza unghiulară constantă ω_2 și din rotația uniformă de transport a acestei axe în jurul unei axe fixe arbitrare Oz_1 cu viteza unghiulară constantă ω_1. În acest caz momentul cinetic $\vec{K}_O$ rămîne fix în planul zOz_1 și se rotește împreună cu el în jurul axei fixe Oz_1 cu viteza unghiulară constantă ω_1. La precesia regulată suma momentelor forțelor exterioare în jurul punctului fix este, în general, diferită de zero și se exprimă cu formula

$$\sum_i M_O(\vec{F}_i) = C(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \left(1 + \frac{C-A}{C} \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \theta_0\right). \tag{3.368}$$

Acest moment rotitor este îndreptat după o dreaptă, perpendiculară pe planul zOz_1, în care sînt situate axele Oz și Oz_1 de rotație proprie (relativă) și de precesie (de transport) ale giroscopului. Pentru $\theta = 90°$ formula (3.368) ia forma

$$\sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) = C\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2. \tag{3.369}$$

Dacă viteza unghiulară ω_2 a rotației proprii este sensibil mai mare decît viteza unghiulară ω_1 a mișcării de precesie, formula (3.368) ia forma aproximativă $\sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) \approx C\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$. Această ultimă formulă stă la baza teoriei aproximative a giroscopului, în care se admite că în timpul rotației giroscopului momentul cinetic $\vec{K}_O$ rămîne îndreptat după axa Oz. Dacă precesia regulată a giroscopului se realizează tehnic prin rotația unor lagăre în care este fixată axa lui proprie Oz, iar centrul de rotație coincide cu centrul de rotație al giroscopului, forțele exterioare care dau momentul în jurul punctului fix, sînt reacțiunile din lagăre. Din acest motiv, suma momentelor forțelor de presiune ale giroscopului în rotație, asupra lagărelor în

care este fixată axa lui, se exprimă, în virtutea legii egalităţii acţiunii şi reacţiunii, prin formula

$$C(\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1)\left(1 + \frac{C - A}{C}\frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\theta_0\right). \tag{3.370}$$

Acest vector se numeşte *momentul giroscopic*.

3.9
Statica analitică

Statica analitică este o parte a staticii, în care se studiază condiţiile de echilibru ale sistemelor mecanice prin *metoda deplasărilor virtuale*.

§ 3.91. Legături şi deplasări virtuale

Un sistem de puncte materiale, ale căror poziţii şi mişcări sînt supuse unor limitări geometrice sau cinematice date dinainte şi independente de condiţiile iniţiale şi de forţele exterioare date, este un *sistem supus la legături*. Aceste limitări impuse sistemului şi care-l fac neliber, se numesc *legături*. Poziţiile punctelor sistemului, permise de legăturile impuse, se numesc *posibile*. Orice deplasare a unui punct dintr-o poziţie posibilă dată într-o altă poziţie posibilă, admisă în acelaşi moment de legături se numeşte *virtuală*, dacă ea se examinează numai geometric, independent de forţele aplicate punctului şi de starea sa cinetică. O variaţie infinit mică a razei vectoare $\vec{r}_i$ a unui punct într-o deplasare virtuală se notează cu $\delta\vec{r}_i$. Dacă se consideră că această variaţie are loc în decursul unui interval infinit mic de timp δt şi se admite că pentru $\delta\vec{r}_i \to 0$ şi $\delta t \to 0$, atunci vectorul

$$\vec{u}_i = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\vec{r}_i}{\delta t} \tag{3.371}$$

se numeşte *viteza virtuală a punctului* în poziţia considerată. Proiecţiile δx_i, δy_i, δz_i ale vectorului $\delta\vec{r}_i$ sînt deplasările virtuale pe axele de coordonate ale sistemului de referinţă fundamental şi se numesc *variaţii virtuale* ale coordonatelor punctului. Proiecţiile u_{ix}, u_{iy}, u_{iz} ale vitezei virtuale pe aceleaşi axe se exprimă cu formulele

$$u_{ix} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x_i}{\delta t}, \quad u_{iy} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y_i}{\delta t}, \quad u_{iz} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta z_i}{\delta t}.$$

Pentru simplificare, de obicei, în aceste formule nu se mai folosește semnul limită ci se scrie direct $\vec{u}_i = \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta t}$.

În cazul cel mai simplu, cînd legăturile impun limitări numai pozițiilor punctelor nu și vitezelor lor la momentul t dat, legăturile se exprimă prin ecuații de forma

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \ (j = 1,2, \dots, s) \qquad (3.372)$$

dacă sistemul conține n puncte; în acest caz, $s \leqslant 3n$. Un astfel de sistem se numește *olonom*.

O variație virtuală infinit mică a coordonatelor unui sistem olonom este legată prin s ecuații de forma

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \ (j = 1,2, \dots, s), \qquad (3.373)$$

care sînt o consecință a ecuației (3.372). Dacă sistemului i se impun legături cinematice independente, atunci între variațiile virtuale ale coordonatelor punctelor sistemului pot exista condiții de forma

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ji} \delta x_i + b_{ji} \delta y_i + c_{ji} \delta z_i) = 0 \qquad (j = 1,2, \dots, n), \qquad (3.374)$$

unde coeficienții a_{ji}, b_{ji}, c_{ji} sînt funcții de timpul t și de coordonatele $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$. În acest caz ecuațiile (3.374) nu sînt consecințe ale ecuațiile (3.372) și nu pot fi înlocuite prin ecuații finite de același fel. În acest caz legăturile cinematice, impuse sistemului, se zic *neintegrabile*, iar sistemul — *neolonom*.

Dacă în decursul timpului legăturile nu-și schimbă caracterul geometric și cinematic, ele se numesc *staționare* sau *scleronome*, iar în caz contrar — *nestaționare* sau *reonome*. În cazul legăturilor scleronome, ecuațiile (3.372) și (3.374) nu conțin explicit argumentul t.

§ 3.92. Coordonatele generalizate ale unui sistem

În multe cazuri pe baza legăturilor geometrice, care îi sînt impuse, razele vectoare ale punctelor sistemului pot fi exprimate la fiecare moment t printr-un număr finit n de variabile independente $q_1, q_2, \dots q_n$ cu formulele

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i \, (t, q_1, q_2, \dots, q_n), \qquad (3.375)$$

astfel încît pentru orice valori ale acestor variabile se obțin poziții ale punctelor sistemului, care în momentul respectiv t sînt admise de legături. Aceste mărimi independente între ele $q_1, q_2, \dots, q_n$, care determină complet și univoc pozițiile posibile ale sistemului într-un moment de timp arbitrar ales, se numesc *coordonate generalizate ale*

sistemului sau *parametrii independenţi ai lui Lagrange*. Formula (3.375) şi formulele corespunzătoare pentru coordonatele punctelor sistemului

$$\left.\begin{array}{c} x_i = x_i\,(t, q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad y_i = y_i\,(t, q_1, q_2, \ldots, q_n), \\ z_i = z_i\,(t, q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{array}\right\} \quad (3.376)$$

se numesc *ecuaţiile sistemului*.

Dacă se aleg anumite valori pentru coordonatele generalizate, iar apoi li se dau creşteri infinit mici $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$, se obţin variaţii virtuale ale razelor vectoare şi ale coordonatelor punctelor sistemului, determinate de formulele

$$\left.\begin{array}{ll} \delta\vec{r}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k, & \delta x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\,\delta q_k, \\ \delta y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}\,\delta q_k, & \delta z_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k}\,\delta q_k. \end{array}\right\} \quad (3.377)$$

Dacă sistemul este olonom, atunci creşterilor δq_k ale coordonatelor generalizate nu li se impun nici un fel de limitări şi ele se pot alege complet arbitrar. Dacă sistemul este neolonom adică dacă sînt valabile ecuaţiile (3.374), atunci între creşterile δq_k ale coordonatelor generalizate vor exista s ecuaţii de forma

$$\begin{array}{l} B_{1j}\,(t, q_1, \ldots, q_n)\,\delta q_1 + B_{2j}\,(t, q_1, \ldots q_n)\,\delta q_2 + \ldots \\ \ldots + B_{nj}\,(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\delta q_n = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \end{array} \quad (3.378)$$

şi anume astfel încît ele nu pot fi înlocuite cu ecuaţii finite de forma $\varphi_j(t, q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$. Prin urmare, în acest caz nu pot fi alese arbitrar toate cele n creşteri $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ ale coordonatelor generalizate. Arbitrare vor fi numai $n - s$, iar celelalte s se vor determina din ecuaţiile (3.378). Numărul de creşteri independente între ele ale coordonatelor generalizate ale sistemului se numeşte *numărul gradelor sale de libertate*. Pentru un sistem olonom, numărul gradelor de libertate, pentru deplasările infinit mici este egal cu numărul coordonatelor sale generalizate, iar pentru un sistem neolonom el este mai mic cu numărul de ecuaţii neintegrabile (3.378) dintre creşterile coordonatelor generalizate.

Drept exemple de coordonate generalizate servesc: unghiul φ de rotaţie al unui corp cu o axă fixă; unghiurile lui Euler ψ, θ, φ, pentru un corp cu un punct fix; coordonatele x_0, y_0, z_0 ale unui pol arbitrar ales într-un corp liber şi unghiurile lui Euler ψ, θ, φ formate de axele duse în corp prin acest pol şi axele care trec prin acelaşi pol şi sînt orientate paralel cu axele Ox, Oy, Oz ale sistemului fundamental de referinţă. În toate aceste exemple corpul reprezintă un sistem olonom, respectiv cu 1, 3 şi 6 grade de libertate. Un exemplu de sistem neolonom este o sferă obligată să se rostogolească fără alunecare pe un plan fix dat. Poziţia sferei faţă de plan se determină prin cinci parametri independenţi: coordonatele x_C, y_C ale centrului ei

şi unghiurile lui Euler ψ, θ, φ formate de axele duse în sferă prin centrul ei şi axele duse prin acelaşi centru paralel cu axele Ox, Oy, Oz ale sistemului fundamental de referinţă.

Condiţia de rostogolire fără alunecare se exprimă prin două ecuaţii neintegrabile

$$\delta x_C + R(\cos\psi \sin\theta\delta\varphi - \sin\psi\delta\theta) = 0,$$

$$\delta y_C + R(\sin\psi \sin\theta\delta\varphi + \cos\psi\delta\theta) = 0,$$

unde R este raza sferei. Prin urmare, numărul de grade de libertate pentru deplasările infinit mici este în cazul dat $5-2 = 3$.

§ 3.93. Lucrul mecanic virtual şi forţele generalizate

Să presupunem că în punctele A_i ale unui sistem sînt aplicate forţele $\vec{P}_i$. Dacă se aleg deplasări virtuale infinit mici determinate de variaţiile virtuale $\delta\vec{r}_i$ ale razelor vectoare ale punctelor sistemului, sau de vitezele virtuale corespunzătoare legate de variaţiile virtuale ale razelor vectoare prin formula $\vec{u}_i = \frac{\delta\vec{r}_i}{\delta t}$, atunci produsul scalar dintre vectorul forţă $\vec{P}_i$ şi vectorul $\delta\vec{r}_i$ al deplasării virtuale a punctului de aplicaţie a forţei se numeşte lucrul mecanic virtual al acestei forţe şi se notează cu

$$\delta L(\vec{P}_i) = \vec{P}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{P}_i \cdot \vec{u}_i\, \delta t. \qquad (3.379)$$

Formal, lucrul mecanic virtual posedă toate proprietăţile unui lucru mecanic elementar dL. În particular, lucrul mecanic elementar se exprimă analitic cu formula

$$\delta L(\vec{P}_i) = P_{ix}\delta x_i + P_{iy}\delta y_i + P_{iz}\,\delta z_i. \qquad (3.380)$$

Dacă sînt date ecuaţiile (3.375) ale sistemului în coordonate generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_n$, atunci lucrul mecanic elementar se exprimă cu formula

$$\begin{aligned} \delta L\,(\vec{P}_i) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{P}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(P_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + P_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + P_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k. \end{aligned} \qquad (3.381)$$

Suma lucrurilor mecanice elementare ale forţelor $\vec{P}_i$, aplicate punctelor sistemului se exprimă prin formula

$$\sum_i \delta L(\vec{P}_i) = \delta q_1 \sum_i \vec{P}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_1} + \delta q_2 \sum_i \vec{P}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_2} + \ldots + \delta q_n \sum_i \vec{P}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_n}. \tag{3.382}$$

Suma produselor scalare dintre forţele aplicate punctelor sistemului şi derivatele parţiale ale razei vectoare a punctului de aplicaţie în raport cu o anumită coordonată generalizată se numeşte *forţa generalizată respectivă.*

Forţele generalizate $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ se exprimă cu formulele

$$Q_k = \sum_i \vec{P}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_i \left(P_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + P_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + P_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \tag{3.383}$$

Suma lucrurilor mecanice virtuale ale forţelor aplicate se exprimă în funcţie de forţele generalizate cu ajutorul formulei

$$\sum_i \delta L(\vec{P}_i) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n. \tag{3.384}$$

Dacă în particular se consideră o creştere a unei singure coordonate generalizate, de exemplu se pune $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_n = 0$, atunci pentru Q_1 se obţine formula

$$Q_1 = \frac{\sum_i \delta L_1(\vec{P}_i)}{\delta q_1},$$

adică forţa generalizată se determină ca raportul dintre suma lucrurilor mecanice virtuale ale forţei aplicate punctului sistemului atunci cînd variază numai o singură coordonată generalizată, şi mărimea creşterii acestei coordonate. Prin urmare, dimensiunile forţei generalizate depind de dimensiunile coordonatei generalizate corespunzătoare şi se exprimă cu formula $[Q] = \dfrac{[\delta L]}{[q]}$.

Pentru un corp care se roteşte în jurul unei axe fixe OO', atunci cînd drept coordonată generalizată se alege unghiul de rotaţie al corpului, forţa generalizată este suma momentelor în raport cu axa de rotaţie OO', ale forţelor aplicate corpului.

§ 3.94. Funcţia de forţă generalizată

Dacă forţele $\bar{P}$, aplicate punctelor sistemului, depind numai de timpul t şi de poziţia punctelor, forţele generalizate apar ca funcţii oarecari de timpul t şi de coordonatele generalizate ale sistemului

$$Q_k = Q_k(t, q_1, q_2, \ldots, q_n). \tag{3.385}$$

Dacă în acest caz formula (3.384) pentru suma lucrurilor mecanice virtuale este o diferenţială totală exactă faţă de coordonatele generalizate ale unei funcţii $U(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)$, care depinde în general şi de timp, adică

$$\begin{aligned} Q_1(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)\, \delta q_1 + Q_2(t, q_1, \ldots, q_n)\, \delta q_2 + \ldots + \\ + Q_n(t, q_1, \ldots, q_n)\, \delta q_n, = \mathrm{d}U \end{aligned} \tag{3.386}$$

atunci această funcţie se numeşte *funcţie de forţă generalizată* pentru sistemul de forţe $\vec{P}$. Din formula (3.386) rezultă că în cazul cînd există funcţia de forţă generalizată, forţele generalizate se exprimă prin derivatele parţiale ale acestei funcţii faţă de coordonatele generalizate corespunzătoare, adică

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}. \tag{3.387}$$

Dacă forţele $\vec{P}_i$ au la fiecare moment o funcţie de forţă obişnuită U, care depinde de t şi de coordonatele punctelor de aplicaţie $U = U(t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots)$, funcţia generalizată se obţine prin înlocuirea în funcţia U a coordonatelor x_i, y_i, z_i cu expresiile lor după formulele (3.376) din ecuaţiile sistemului. Dacă forţele $\vec{P}_i$ nu depind de timp şi legăturile sînt staţionare, funcţia de forţă generalizată conţine numai coordonatele generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Prin analogie cu energia potenţială, funcţia

$$\Pi = -U \tag{3.388}$$

se numeşte *energia potenţială a sistemului* în cîmpul de forţe dat.

§ 3.95. Legături ideale şi principiul deplasărilor virtuale

Dacă suma lucrurilor mecanice virtuale ale reacţiunilor $\vec{R}_i$ ale legăturilor este egală cu zero pentru orice forţe date F_i, aplicate punctelor sistemului, şi pentru orice stare cinematică a sistemului legăturile se numesc *virtual ideale*, sau mai scurt, *ideale* sau *perfecte*. Dacă sub acţiunea unor forţe date, care depind doar de poziţia punctelor de aplicaţie sistemul cu legături ideale se găseşte în stare de repaus, atunci pentru orice deplasare virtuală a sistemului din poziţia de echilibru, suma lucrurilor mecanice virtuale ale acestor

forţe, este egală cu zero. Ivers, dacă într-o anumită poziţie a sistemului se constată că suma lucrurilor mecanice virtuale ale forţelor aplicate este egală cu zero pentru orice deplasare virtuală a sistemului din această poziţie, atunci sistemul, fiind aşezat în această poziţie, cu viteze iniţiale egale cu zero, va rămîne în stare de repaus. În aceasta constă *principiul vitezelor virtuale* sau *principiul deplasărilor virtuale*. El se exprimă prin formulele

$$\sum_i \delta L(\vec{F}_i) = 0, \tag{3.389}$$

sau

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{u}_i = 0 \tag{3.390}$$

unde $\vec{u}_i$ sînt vectorii viteză virtuală.

În formă analitică, raportate la axele de coordonate, ecuaţiile (3.389) şi (3.390) iau forma

$$\sum_i (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0. \tag{3.391}$$

Această ecuaţie trebuie să fie satisfăcută pentru toate valorile creşterilor virtuale ale coordonatelor, care satisfac ecuaţiile (3.373) şi (3.374).

§ 3.96. Multiplicatorii lui Lagrange

Dacă numărul de puncte ale sistemului este egal cu n şi toate ecuaţiile legăturilor sînt finite, adică au forma

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.392}$$

atunci ecuaţia (3.391) se înlocuieşte cu sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} & P_{kx} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0, \quad P_{ky} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k} = 0, \\ & P_{kz} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3.393}$$

care împreună cu ecuaţiile (3.392) formează un sistem de $3n + s$ ecuaţii din care se determină cele $3n$ coordonate ale punctelor sistemului în poziţia de echilibru şi cei s multiplicatori λ_j.

§ 3.97 Ecuațiile de echilibru ale unui sistem olonom în coordonate generalizate

În cazul cînd forțele date $\vec{F}_i$ depind doar de poziția punctelor de aplicație, ecuația de echilibru (3.389) a sistemului în coordonate generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ia forma

$$Q_1(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\delta q_1 + Q_2(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\delta q_2 + \ldots$$
$$\ldots + Q_n(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\delta q_n = 0. \qquad (3.394)$$

Dacă sistemul este olonom, creșterile $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ sînt complet arbitrare și ecuația (3.394) se descompune în n ecuații

$$Q_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3.395)$$

adică în poziția de echilibru a unui sistem olonom aflat sub acțiunea unor forțe date, toate forțele generalizate trebuie să fie egale cu zero. Dacă există o funcție de forță generalizată $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, adică $Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$, ecuațiile de echilibru (3.395) iau forma

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0, \qquad (3.396)$$

adică coincid cu condițiile necesare de extrem ale funcției de forță generalizate. Dacă, în particular, forțele date $\vec{P}$ sînt greutățile punctelor sistemului, adică $\vec{P}_i = m_i\,\vec{g}$, funcția de forță obișnuită, pentru cazul cînd axa Oz este îndreptată vertical în sus, are forma $U = -\sum_i P_i z_i = -Pz_C$, unde z_C este coordonata centrului de greutate al sistemului. Prin urmare, ecuația de echilibru $dU = 0$ ia forma $dz_C = 0$, iar aceasta înseamnă că la un sistem de legături ideale aflat numai sub acțiunea forțelor de greutate, în poziția de echilibru, centrul de greutate ocupă poziția cea mai de jos sau cea mai de sus. În aceasta constă *principiul lui Torricelli*.

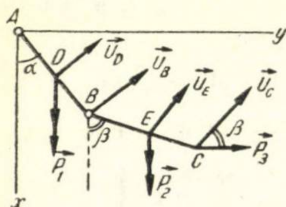


Fig. 3.71.

Exemplu. Barele omogene AB și BC de greutate P și lungime $2a$ fiecare sînt articulate în punctul B. Capătul A este fixat în planul vertical cu o articulație imobilă, iar capătului C îi este aplicată o forță orizontală $\frac{P}{2}$. Să se determine unghiurile α și β pentru poziția de echilibru (fig. 3.71).

Sistemul are două grade de libertate. Coordonatele generalizate sînt

$$q_1 = \alpha \text{ și } q_2 = \beta.$$

Pentru calcularea forței generalizate Q_1 se dă o variație unghiului α, păstrînd neschimbat unghiul β. Atunci bara BC are o mișcare de translație și

$$Q_1 = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{u}_D \delta t + \vec{P}_2 \cdot \vec{u}_B \delta t + \vec{P}_3 \cdot \vec{u}_B \delta t}{\delta \alpha} = -Pa \sin \alpha - P \cdot 2a \sin \alpha + Pa \sin \alpha,$$

deoarece $u_D = a \frac{\delta\alpha}{\delta t}$, $u_B = 2a \frac{\delta\alpha}{\delta t}$. Pentru calculul lui Q_2 se dă o variație unghiului β, păstrînd neschimbat unghiul α. Bara AB rămîne atunci imobilă, iar bara BC se rotește în jurul articulației B și

$$Q_2 = \frac{\vec{P}_2 \cdot \vec{u}_E \delta t + \vec{P}_3 \cdot \vec{u}_C \delta t}{\delta\beta} = -Pa \sin\beta + Pa \cos\beta.$$

Prin urmare, ecuațiile de echilibru $Q_1 = 0$ și $Q_2 = 0$ dau $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 1$.

3.10
Principiul lui d'Alembert

§ 3.98. Forța de inerție

Dacă o particulă materială de masă m, sub acțiunea unor corpuri, care acționează asupra ei, capătă accelerația $\vec{a}$ față de sistemul inerțial, atunci, pe baza principiului egalității acțiunii și reacțiunii, suma vectorilor forțelor, care măsoară acțiunea particulei în mișcare asupra corpurilor ce-i imprimă accelerația, se reprezintă prin vectorul

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}. \tag{3.397}$$

Acest vector se numește *forța de inerție* a punctului în mișcare. El este un vector liber, dar dacă se consideră aplicat particulei în mișcare, el poate fi considerat ca o forță fictivă, adică inexistentă fizic și se numește, în acest caz, *forța de inerție a lui d'Alembert*. Cu vectorul forță de inerție în mod formal se pot efectua toate operațiile matematice, care se efectuează asupra vectorilor forțelor fizice. Astfel, proiecțiile forței de inerție pe axele unui sistem fundamental de referință inerțial se exprimă cu formulele

$$\Phi_x = -m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \Phi_y = -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \Phi_z = -m\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{3.398}$$

Dacă vectorul $\vec{\Phi}$ se descompune în componente îndreptate după normala principală și după tangenta la traiectoria punctului în mișcare, aceste componente se exprimă, prin versorii $\vec{\nu}$ și $\vec{\tau}$ ai normalei principale și ai tangentei, cu formulele

$$\vec{\Phi}_\nu = -\frac{mv^2}{\rho}\vec{\nu}, \quad \Phi_\tau = -m\frac{dv}{dt}\vec{\tau}, \tag{3.399}$$

unde v este scalarul vitezei, iar ρ raza de curbură a traiectoriei.

Prima componentă $\vec{\Phi}_\nu$ este dirijată în sens opus accelerației normale $\vec{a}_\nu$ și se numește *forța de inerție normală a lui d'Alembert*; a doua componentă Φ_τ este îndreptată în sens opus accelerației tangențiale $\vec{a}_\tau$ și se numește *forța de inerție tangențială a lui d'Alembert*. Dacă punctul este supus unei legături atunci componenta forței de inerție normală la legătură este una din componentele forței de presiune a punctului asupra legăturii și se numește *forță centrifugă*. Forța centrifugă este o forță fizică reală, aplicată corpului, care realizează legătura impusă punctului în mișcare.

La mișcarea unui rigid, sistemul forțelor fictive de inerție ale lui d'Alembert aplicate particulelor sale, se supune formal tuturor legilor staticii geometrice, care se referă la sistemele de forțe exterioare, aplicate unui rigid, adică se reduce la un vector rezultant $\vec{R}$ și la un moment rezultant $\vec{M}_O$. Vectorul rezultant $\vec{R}$ al forțelor de inerție se exprimă totdeauna cu formula

$$\vec{R} = \sum_i \vec{\Phi}_i = -\sum_i m_i\vec{a}_i = -m\vec{a}_C, \tag{3.400}$$

unde a_C este accelerația centrului de greutate al corpului. Dacă corpul se rotește în jurul axei Oz cu viteza unghiulară ω și cu accelerația unghiulară ε, proiecția momentului rezultant M_O al forțelor de inerție în raport cu originea O se exprimă cu formulele

$$M_{Ox} = \varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}, \quad M_{Oy} = \varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{xz}, \quad M_{Oz} = -\varepsilon J_z, \tag{3.401}$$

unde J_z este momentul de inerție în raport cu axa de rotație, iar J_{xz} și J_{yz} sînt produsele de inerție. În cazul unei rotații uniforme $\varepsilon = 0$ și forțele de inerție se reduc la componentele lor normale, îndreptate după razele cercurilor pe care se mișcă punctele, iar momentul rezultant al forțelor centrifuge are componentele.

$$M_{Ox} = -\omega^2 J_{yz}, \quad M_{Oy} = \omega^2 J_{xz}, \quad M_{Oz} = 0. \tag{3.401'}$$

Din acest motiv, aici produsele de inerție se numesc și *momente centrifuge de inerție*. Dacă corpul este o placă plană, care se rotește în planul ei în jurul centrului O, sistemul plan de forțe de inerție se reduce la o rezultantă, al cărei vector se determină după formula (3.400) prin valoarea $m\vec{a}_C$, iar linia de acțiune intersectează raza de

rotaţie $OC = a$ a centrului de greutate în punctul O', astfel că $OO' = \frac{J_0}{ma}$, adică în centrul de oscilaţie al plăcii, privită ca un pendul fizic cu axa de rotaţie trecînd prin centrul O.

§ 3.99. Metoda cinetostatică

La mişcarea unui sistem, în orice moment vectorii forţelor active date $\vec{F}_i$, aplicate punctelor A_i ale sistemului, cei ai forţelor de reacţiune $\vec{R}_i$, care apar datorită legăturilor impuse sistemului în acel moment, precum şi cei ai forţelor de inerţie construite cu ajutorul acceleraţiilor $\vec{a}_i$ sînt legaţi prin relaţia

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0. \tag{3.402}$$

Deoarece ecuaţia aceasta coincide formal cu condiţia de echilibrare a forţelor aplicate punctului A_i, ea poate fi interpretată în modul următor. Dacă se aşază sistemul în acea poziţie, prin care el trece la momentul dat t, în mişcarea reală, şi dacă se impun sistemului în mod staţionar acele legături care sînt impuse în acel moment sistemului în mişcare şi dacă se aplică punctelor sale forţe constante, egale cu valorile vectorilor $\vec{F}_i$, $\vec{R}_i$, $\vec{\Phi}_i$ ai forţelor date, ai reacţiunilor şi ai forţelor de inerţie, care corespund momentului considerat, atunci, în această poziţie, pentru condiţiile fictive indicate, sistemul rămîne în stare de repaus. Invers, dacă se presupune că în poziţia examinată sistemul se găseşte în stare de repaus şi dacă se aplică punctelor sale forţele date $\vec{F}_i$ şi $\vec{\Phi}_i$, iar sistemul este supus acelor legături, care sînt impuse la momentul dat sistemul real în mişcare, atunci reacţiunile $\vec{R}_i$ calculate după regulile staticii, vor fi egale cu acele valori ale reacţiunilor dinamice, care corespund momentului t ales. Ca o consecinţă, din ecuaţiile (3.402) decurge afirmaţia, că în orice moment ansamblul vectorilor $\vec{F}_i$, $\vec{R}_i$, $\vec{\Phi}_i$ (ei reprezintă forţele date, reacţiunile şi forţele de inerţie, aplicate punctelor sistemului în mişcare) trebuie să satisfacă toate ecuaţiile matematice, satisfăcute de vectorii forţelor în cazul echilibrului sistemului în acea poziţie, prin care trece sistemul real în mişcare în momentul ales şi în prezenţa acelor legături, care îi sînt impuse în momentul considerat. Deoarece în configuraţia de repaus a oricărui sistem mecanic impulsul $\vec{H}$ şi momentul său cinetic $\vec{K}_0$ sînt identic egale cu zero, din ecuaţiile (3.255) şi (3.248) rezultă că în starea de repaus a sistemului, forţele exterioare satisfac ecuaţiile

$$\sum_i \vec{P}_i^{(e)} = 0 \quad \text{şi} \quad \sum_i M_O(\vec{P}_i^{(e)}), \tag{3.403}$$

iar în mişcare, la orice moment, între forţele exterioare reale $\vec{P}_i^{(e)}$ şi forţele de inerţie $\vec{\Phi}_i$ trebuie să existe relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \sum_i \vec{P}_i^{(e)} + \sum_i \vec{\Phi}_i = 0, \\ \sum_i \vec{M}_O(\vec{P}_i^{(e)}) + \sum_i \vec{M}_O(\vec{\Phi}_i) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.404}$$

Dacă printre ecuaţiile (3.404) există unele care nu conţin reacţiunile legăturilor, atunci din examinarea echilibrului fictiv sub acţiunea forţelor date $\vec{F}_i$ şi a forţelor de inerţie Φ_i se obţin ecuaţii, care leagă forţele date $\bar{F}_i$ de acceleraţiile $\vec{a}_i$ ale punctelor sistemului, adică se obţin *ecuaţiile de mişcare ale sistemului* sub acţiunea unor forţe date $\vec{F}_i$. O astfel de metodă pentru obţinerea ecuaţiilor de mişcare ale unui sistem supus la legături poartă numele de *metodă cinetostatică* şi se foloseşte mult în teoria mecanismelor (ea se expune în partea de teoria mecanismelor şi maşinilor).

§ 3.100. Ecuaţia generală de mişcare a unui sistem cu legături ideale

Dacă legăturile impuse unui sistem sînt ideale, atunci echilibrului fictiv sub acţiunea forţelor date $\vec{F}_i$ şi a forţelor de inerţie $\vec{\Phi}_i$ i se poate aplica principiul deplasărilor virtuale şi în acest caz ecuaţiile (3.389) şi (3.391) dau egalităţile

$$\sum_i \delta L(\vec{F}_i) + \sum_i \delta L(\vec{\Phi}_i) = 0 \tag{3.405}$$

şi

$$\sum_i \left[\left(F_{ix} - m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(F_{iy} - m_i \frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(F_{iz} - m_i \frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right]. \tag{3.406}$$

Ecuaţia (3.406) se numeşte *ecuaţia generală Lagrange — d'Alembert pentru mişcarea unui sistem cu legături ideale*. Ea trebuie să fie satisfăcută pentru toate valorile deplasărilor virtuale δx_i, δy_i, δz_i ale coordonatelor punctelor sistemului, satisfăcînd ecuaţiile (3.373) şi (3.374) care exprimă legăturile finite şi cele neintegrabile, impuse sistemului.

3.11
Ecuaţiile diferenţiale de mişcare ale sistemelor olonome

§ 3.101. Ecuaţiile lui Lagrange de speţa întîia

Dacă toate legăturile impuse sistemului, care constă dintr-un număr finit de puncte, se exprimă prin ecuaţiile finite

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, .., x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., s)$$

atunci ecuaţia generală a dinamicii (3.406), ca şi ecuaţia generală a staticii analitice (3.391), se înlocuieşte prin sistemul de $3n$ ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} m_k \frac{\mathrm{d}^2 x_k}{\mathrm{d}t^2} &= F_{kx} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k}, \\ m_k \frac{\mathrm{d}^2 y_k}{\mathrm{d}t^2} &= F_{ky} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k}, \\ m_k \frac{\mathrm{d}^2 z_k}{\mathrm{d}t^2} &= F_{kz} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \quad (k = 1, 2, ..., n), \end{aligned}\right\} \qquad (3.407)$$

care, împreună cu cele s ecuaţii de legături

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n) = 0$$

şi cu datele iniţiale, determină cele $3n$ coordonate x_k, y_k, z_k ale punctelor în mişcare şi cei s factori λ_j, ca funcţii de timp. Dacă acest sistem de ecuaţii este integrat, proiecţiile reacţiunii $\vec{R}_k$, aplicate punctului A_i al sistemului, se determină pentru momentul dat cu formulele

$$R_{kx} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k}, \quad R_{ky} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k}, \quad R_{kz} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_k}. \qquad (3.408)$$

§ 3.102. Viteze generalizate

Dacă un sistem olonom este dat prin ecuaţiile (3.375)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\,(t, q_1, q_2, ..., q_n),$$

sau — în proiecţii pe axele de coordonate — prin ecuaţiile (3.376) şi dacă se găseşte într-o stare de mişcare determinată, atunci coordo-

natele generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sînt funcţii determinate de timp. Prin urmare, dacă $\vec{r}_i$ este considerată ca o funcţie compusă de o singură variabilă independentă, atunci pentru derivata geometrică $\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$ a razei vectoare se obţine expresia

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}. \tag{3.409}$$

Derivatele în raport cu timpul ale coordonatelor generalizate ale punctelor unui sistem olonom în mişcare se numesc *viteze generalizate* şi se notează cu $\dot{q}_k$, adică

$$\dot{q}_k = \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.410}$$

Din formula (3.410), pentru vectorul viteză reală $\vec{v}_i$ al unui punct al unui sistem în mişcare, se obţine expresia

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k, \tag{3.411}$$

iar pentru proiecţiile acestui vector pe axe

$$\left.\begin{aligned} v_{ix} &= \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k, \\ v_{iy} &= \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k, \\ v_{iz} &= \frac{\partial z_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k. \end{aligned}\right\} \tag{3.412}$$

De aici pentru creşterile reale infinit mici $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}y_i$, $\mathrm{d}z_i$ ale coordonatelor punctelor sistemului se obţin formulele

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial t} \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \mathrm{d}q_k, \\ \mathrm{d}y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial t} \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \mathrm{d}q_k, \\ \mathrm{d}z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial t} \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \mathrm{d}q_k. \end{aligned}\right\} \tag{3.413}$$

Aceste formule arată că, în general, $dx_i \neq \delta x_i$, $dy_i \neq \delta y_i$, $dz_i \neq \delta z_i$, adică deplasările reale ale punctelor sistemului în decursul intervalului de timp infinit mic de la momentul dat t pînă la momentul infinit apropiat $t + dt$ nu fac parte din deplasările virtuale imaginate, posibile în același moment t. Însă dacă legăturile sînt staționare atunci $\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial z_i}{\partial t} = 0$ și alegînd $\delta q_k = dq_k$, se obține $dx_i = \delta x_i$, $dy_i = \delta y_i$, $dz_i = \delta z_i$, adică în cazul legăturilor staționare deplasările reale infinit mici ale punctelor sistemului se găsesc printre deplasările virtuale. De aici rezultă că legăturile virtuale ideale sînt ideale și la mișcarea reală a sistemului, deoarece suma lucrurilor mecanice elementare reale ale reacțiunilor este

$$\sum_i dL(\vec{R}_i) = \sum_i \delta L(\vec{R}_i) = 0.$$

În cazul general al legăturilor virtuale reonome ideale, ele nu vor fi efectiv ideale, deoarece

$$\sum_i \delta L(\vec{R}_i) \neq \sum_i dL(\vec{R}_i) \neq 0.$$

§ 3.103. Energia cinetică în funcție de vitezele generalizate

Pe baza formulei (3.411) energia cinetică a unui punct al sistemului se exprimă cu formula

$$\frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i}{2}(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{m_i}{2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k \right) + \frac{m_i}{2} \sum_{k,j}^{1,\ldots,n} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j. \tag{3.414}$$

Prin urmare, însumînd pentru toate punctele sistemului, pentru energia lui cinetică se obține formula

$$E_c = E_{c0} + E_{c1} + E_{c2}, \tag{3.415}$$

unde

$$E_{c0} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \tag{3.416}$$

$$E_{c1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k, \tag{3.417}$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \sum_{k,j}^{1,\ldots,n} \left(\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j. \tag{3.418}$$

Dacă se fac notaţiile

$$\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = B_k(t, q_1, q_2, \ldots, q_n), \qquad (3.419)$$

$$\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = A_{kj}(t, q_1, q_2, \ldots, q_n), \qquad (3.420)$$

atunci

$$E_{c1} = \sum_{k=1}^{n} B_k(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)\, \dot{q}_k,$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \sum_{k,j}^{1,\ldots,n} A_{kj}(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)\, \dot{q}_k \dot{q}_j. \qquad (3.421)$$

Prin urmare, formula (3.415) dă energia cinetică ca sumă a trei expresii E_{c0}, E_{c1}, E_{c2}, dintre care prima, E_{c0}, depinde numai de timpul t şi de coordonatele generalizate, a doua, E_{c1}, este o formă liniară în funcţie de vitezele generalizate $\dot{q}_k$ cu coeficienţi care depind de timp şi de coordonatele generalizate, iar a treia, E_{c2}, este o formă pătratică în funcţie de vitezele generalizate, cu coeficienţi care depind de timp şi de coordonatele generalizate. În cazul legăturilor staţionare $E_{c0} = E_{c1} = 0$, şi formula pentru E_c capătă forma

$$E_c = E_{c2} = \frac{1}{2} \sum_{k,j}^{1,\ldots,n} A_{kj}(q_1, q_2, \ldots, q_n)\, \dot{q}_k \dot{q}_j, \qquad (3.422)$$

adică în acest caz energia cinetică se prezintă sub o formă pătratică în funcţie de vitezele generalizate, cu coeficienţi care depind numai de coordonatele generalizate.

§ 3.104. Lucrul mecanic virtual al forţelor de inerţie

Dacă în formula

$$\sum_i \delta L(\vec{\Phi}_i) = \sum_i \delta L(-m_i \vec{a}_i) = \sum_i \delta L\left(-\frac{\mathrm{d}(m_i \vec{v}_i)}{\mathrm{d}t}\right)$$

în locul vitezei $\vec{v}_i$ se introduce expresia ei din formula (3.411), atunci suma lucrurilor mecanice virtuale ale forţelor de inerţie, în funcţie de expresia pentru energia cinetică din formula (3.415), are forma următoare

$$\sum_i \delta L(\vec{\Phi}_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial E_c}{q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) \delta q_k. \qquad (3.423)$$

La calcularea derivatei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right)$ expresia $\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}$ trebuie privită ca o funcţie compusă de variabila t, care depinde de argumentele $t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, astfel că în rezultat intră şi derivatele $\ddot{q}_k$ ale vitezelor generalizate în raport cu timpul, adică derivatele de ordinul al doilea al coordonatelor generalizate în raport cu timpul.

§ 3.105. Ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua

Dacă formula (3.423) pentru $\sum_i \delta L(\vec{\Phi}_i)$ se introduce în ecuaţia generală a dinamicii (3.405), atunci această ecuaţie generală capătă forma

$$\sum_{k=1}^{n}\left[Q_k + \frac{\partial E_c}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k = 0 \tag{3.424}$$

şi pe urmă, ca şi ecuaţia generală (3.394) a staticii, se descompune în n ecuaţii

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.425}$$

Aici Q_k sînt forţele generalizate, calculate după formula (3.383) în funcţie de forţele date $\vec{F}_i$. Deoarece vectorii $\vec{F}_i$ sînt exprimaţi în funcţie de timpul t, de coordonatele punctelor sistemului şi de vectorii vitezelor punctelor de aplicaţie, atunci cu ajutorul formulei (3.376) şi (3.411) forţele generalizate Q_k se vor prezenta ca funcţii de argumentele $t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, adică

$$Q_k = Q_k(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n). \tag{3.426}$$

Deoarece membrii din partea stîngă din formulele (3.425) sînt expresii care depind de $t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$, sistemul de ecuaţii (3.425) este din punct de vedere matematic un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea cu o singură variabilă independentă t şi cu funcţiile necunoscute $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Aceste ecuaţii diferenţiale (3.425) se numesc *ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua* pentru mişcarea unui sistem olonom cu n grade de libertate sub acţiunea forţelor date $\vec{F}_i$. Dacă sînt date poziţiile iniţiale şi vitezele iniţiale ale punctelor sistemului, admise de legăturile care îi sînt impuse, atunci aceasta înseamnă că pentru valoarea iniţială t_0 a timpului sînt date valorile $q_k^{(0)}$ şi $\dot{q}_k^{(0)}$ ale coordonatelor generalizate şi ale vitezelor generalizate şi în acest caz, aceste date iniţiale determină soluţiile ecuaţiilor diferenţiale (3.425) şi deci mişcarea sistemului care corespunde condiţiilor fizice iniţiale.

Dacă forţele date $\vec{F}_i$ admit o funcţie de forţă generalizată $U(t, q_1, \ldots, q_n)$, determinată de formula (3.386), adică $Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$, atunci ecuaţia lui Lagrange (3.425) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) \neq \frac{\partial (E_c + U)}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.427}$$

Suma $E_c + U = E - \Pi$, unde Π este, conform formulei (3.388), energia potenţială a sistemului şi se numeşte potenţial lagrangian sau citic al sistemului şi se notează

$$L = T - \Pi. \tag{3.428}$$

Din punct de vedere matematic, Π se prezintă ca o funcţie de argumentele

$$t, q_1, q_2, \ldots, q_n,$$

deoarece forţele $\vec{F}_i$, care admit funcţia de forţă generalizată, depind numai de timpul t şi de poziţia punctelor sistemului, însă nu de vitezele lor; de aici

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}. \tag{3.429}$$

Prin urmare, din punct de vedere formal ecuaţiile (3.427) se pot scrie astfel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.430}$$

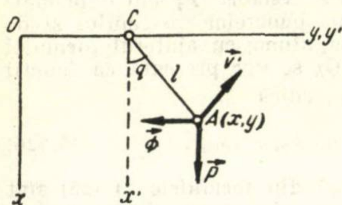


Fig. 3.72.

Exemplu. Să se scrie ecuaţia lui Lagrange pentru mişcarea pendulului matematic de lungime l, al cărui punct de suspensie C se mişcă pe o axă orizontală Oy după o lege dată. Legea de mişcare a punctului C este dată de formula $OC = f(t)$. Luînd drept coordonată generalizată q unghiul format de firul pendulului cu verticala (fig. 3.72), se obţine

$$x = l \cos q, \qquad y = f(t) + l \sin q.$$

De aici

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -l \sin q \cdot \dot{q}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f'(t) + l \cos q \cdot \dot{q},$$

$$E_c = \frac{m}{2}[l^2\dot{q}^2 + 2lf'(t) \cos q \cdot \dot{q} + f'^2(t)],$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} = ml^2\dot{q} + mlf'(t) \cos q, \quad \frac{\partial E_c}{\partial q} = -mlf'(t) \sin q \cdot \dot{q}.$$

Forţa generalizată este

$$Q = mg\frac{\partial x}{\partial q} = -mgl\sin q.$$

De aici se obţine ecuaţia lui Lagrange

$$\ddot{q} + \frac{g}{l}\sin q = -\frac{f''(t)}{l}\cos q.$$

Aceeaşi ecuaţie se obţine dacă se studiază mişcarea relativă a pendulului în raport cu axele $x'Cy'$, introducînd forţa de transport a lui Coriolis $\vec{\Phi}$. Deoarece $\vec{\Phi} \parallel Cy$ şi $\Phi_y = -mf''(t)$, ecuaţia mişcării relative, după formula (3.206), este

$$ml\ddot{q} = -mg\sin q - mf''(t)\cos q,$$

adică

$$\ddot{q} + \frac{g}{l}\sin q = -\frac{f''(t)}{l}\cos q.$$

§ 3.106. Integrala energiei

Dacă expresia potenţialului L din formula (3.429) nu conţine explicit argumentul t, adică dacă

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n), \tag{3.431}$$

atunci ecuaţiile lui Lagrange (3.430) admit *o integrală primă* sub forma egalităţii

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = h, \tag{3.432}$$

unde h este o mărime constantă, care păstrează aceeaşi valoare în tot decursul mişcării. Acest caz, în care potenţialul cinetic nu depinde de timp în mod explicit, are loc numai pentru legături staţionare. În acest caz, energia cinetică E_c dată de formula (3.421) este o funcţie omogenă în raport cu vitezele generalizate $\dot{q}_k$ şi din acest motiv

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 2E_c$$

şi formula (3.432) ia forma

$$E_c + \Pi = h, \tag{3.433}$$

adică exprimă *legea de conservare a energiei mecanice totale.*

§ 3.107 Impulsuri generalizate

Derivatele potenţialului cinetic în raport cu vitezele generalizate se numesc *impulsuri generalizate* şi se notează cu p_k, astfel că

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.434}$$

Dacă o coordonată generalizată oarecare q_j nu intervine explicit în expresia potenţialului cinetic, adică $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, atunci această coordonată generalizată se numeşte *ciclică*, iar impulsul generalizat corespunzător ei $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ este *ciclic*. Pentru coordonatele generalizate ciclice q_j, ecuaţiile lui Lagrange (3.430) conduc la egalităţile

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \alpha_j, \tag{3.435}$$

unde α_j sînt constante. Aceste egalităţi se numesc *integralele ciclice ale ecuaţiilor lui Lagrange*. Ele pot fi scrise sub forma

$$p_j = \alpha_j, \tag{3.436}$$

adică impulsurile generalizate ciclice rămîn constante în decursul întregii mişcări. De exemplu, la mişcarea într-un plan a unui punct liber sub acţiunea unei forţe centrale a cărei mărime depinde numai de distanţa de la punct la centrul forţei luînd drept coordonate generalizate coordonatele polare ρ şi φ, se obţine

$$E_c = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2), \quad \Pi = f(\rho), \quad L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - f(\rho)$$

şi deci coordonata φ este ciclică; impulsul ciclic este $p_\varphi = m\,\rho^2\dot{\varphi}$ şi integrala ciclică (3.436) ia forma $\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}$, ceea ce, conform formulei (3.160), exprimă faptul că viteza sectorială faţă de centrul forţei rămîne constantă.

§ 3.108. Ecuaţii canonice

Formulele (3.434), care determină impulsurile generalizate pe baza formulelor (3.421), reprezintă un sistem de ecuaţii liniare în raport cu vitezele generalizate $\dot{q}_k$ care se pot exprima, din aceste ecuaţii, în funcţie de $t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Dacă aceste expresii se introduc în formula

$$\sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}_k - L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n),$$

atunci funcţia obţinută

$$H(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) \tag{3.437}$$

se numeşte *funcţia caracteristică a lui Hamilton*. Dacă legăturile sînt staţionare, pe baza formulei (3.433) funcţia H exprimă *energia mecanică totală a sistemului*. Cu ajutorul funcţiei caracteristice, sistemul (3.430) de ecuaţii ale lui Lagrange se poate înlocui prin sistemul de $2n$ ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.438}$$

Aceste ecuaţii se numesc *ecuaţii canonice de mişcare ale sistemului olonom* sub acţiunea unor forţe care admit o funcţie de forţă generalizată. În cazul legăturilor staţionare, sistemul (3.348) are integrala

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = h, \tag{3.439}$$

care exprimă *legea de conservare a energiei mecanice*.

3.12
Micile oscilaţii ale sistemelor

§ 3.109. Echilibrul stabil

Poziţia de echilibru a unui sistem supus unor legături staţionare şi care se găseşte sub acţiunea unor forţe date, se numeşte *echilibru stabil*, dacă pentru o variaţie arbitrară suficient de mică a coordonatelor punctelor sale şi pentru viteze arbitrare suficient de mici, imprimate acestor puncte, sistemul se va mişca rămînînd tot timpul în vecinătatea poziţiei de echilibru.

Să presupunem că poziţia de echilibru este determinată de valori nule ale coordonatelor generalizate q_k, iar valorile iniţiale ale coordonatelor şi vitezelor generalizate sînt egale cu $q_k^{(0)}$ şi $\dot{q}_k^{(0)}$. Poziţia de echilibru este stabilă dacă, fiind date dinainte mărimile ε şi ε_1 pozitive şi suficient de mici, se pot indica numere pozitive η şi η_1, depinzînd de ε şi ε_1, astfel încît atunci cînd sînt satisfăcute condiţiile $q_k^{(0)} < \eta, |\dot{q}_k^{(0)}| < \eta_1$ ($k = 1,2,.., n$) în tot decursul timpului mişcării vor fi satisfăcute egalităţile $|q_k| < \varepsilon, |\dot{q}_k| < \varepsilon_1$ ($k = 1,2,..,n$).

Dacă sistemul se găseşte sub acţiunea forţelor date $\vec{F}_i$ care admit o funcţie de forţă generalizată şi, prin urmare, admit energia potenţială $\Pi(q_1,\ldots,q_n)$, atunci condiţia suficientă de stabilitate a echilibrului este dată de *teorema Lejeune-Dirichlet*: dacă în poziţia de echilibru a sistemului energia sa potenţială are un minim, această poziţie de echilibru este stabilă. Dacă forţele date $\vec{F}_i$ sînt greutăţile punctelor sistemului, atunci energia potenţială atinge minimul, cînd centrul de greutate al sistemului ocupă cea mai joasă poziţie din toate poziţiile posibile. Pentru utilizarea teoremei lui Dirichlet este esenţial ca energia potenţială $\Pi(q_1,..,q_n)$ să depindă de toate coordonatele generalizate q_k. Mişcările, pe care sistemul le execută după o deviere suficient de mică de la poziţia de echilibru stabil şi pentru viteze iniţiale suficient de mici, se numesc *oscilaţii mici ale sistemului în jurul poziţiei de echilibru stabil.*

§ 3.110. Expresiile aproximative ale energiilor cinetică şi potenţială în cazul micilor oscilaţii

Dacă poziţia de echilibru stabil se obţine pentru valori nule ale coordonatelor generalizate, atunci în formula pentru energia cinetică la legături staţionare, $E_c = \frac{1}{2}\sum_{k,j}^{1,\ldots,n} A_{kj}\,(q_1,..,q_n)\dot{q}_k\cdot\dot{q}_j$, şi anume în expresiile A_{kj} ale coeficienţilor, în locul argumentelor variabile q_k, care rămîn mici în valoare absolută, se pot introduce valori nule şi atunci, notînd

$$A_{kj}(0,\ldots,0) = a_{kj}, \tag{3.440}$$

pentru energia cinetică se obţine formula aproximativă

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{k,j}^{1,\ldots,n} a_{kj}\cdot\dot{q}_k\dot{q}_j, \tag{3.441}$$

adică la oscilaţii mici energia cinetică se poate exprima printr-o formă pătratică cu coeficienţi constanţi omogenă în raport cu vitezele generalizate. Formula pentru energia potenţială $\Pi(q_1,..,q_n)$ se poate descompune în serie MacLaurin, adică

$$\Pi(q_1,\ldots,q_n) = \Pi(0,\ldots,0) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial E_c}{\partial q_k}\right)_0 q_k + \frac{1}{2}\sum_{k,j}^{1,\ldots,n}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_k\partial q_j}\right)_0 q_k q_j + \ldots$$

În poziţia de echilibru $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_k}\right) = 0$. Prin urmare, notînd

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_k\partial q_j}\right)_0 = c_{kj}, \tag{3.442}$$

pentru energia potenţială se obţine formula aproximativă

$$\Pi(q_1, \ldots, q_n) = \Pi(0, \ldots, 0) + \frac{1}{2}\sum_{k,j}^{1,\ldots,n} c_{kj}q_kq_j. \qquad (3.443)$$

Coeficienţii constanţi a_{kj} din formula (3.440) se numesc *coeficienţi cuasiinerţiali*, iar coeficienţii c_{kj} din formula (3.443) — *coeficienţi cuasielastici ai sistemului* la oscilaţiile lui mici în cîmpul de forţe dat. Ei depind de alegerea coordonatelor generalizate.

Dacă, în afară de forţele cîmpului, care crează energia potenţială Π, nu sînt aplicate alte forţe punctelor sistemului care execută oscilaţii mici în jurul poziţiilor de echilibru stabil, atunci pe baza formulelor aproximative (3.441) şi (3.442) *ecuaţiile lui Lagrange* (3.430) iau forma

$$a_{k1}\ddot{q}_1 + a_{k2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{kn}\ddot{q}_n + c_{k1}q_1 + c_{k2}q_2 + \ldots + c_{kn}q_n = 0. \quad (3.444)$$

Prin urmare, *teoria* matematică a *oscilaţiilor mici libere*, adică numai în prezenţa forţelor date ale cîmpului, constă în integrarea şi studierea sistemului (3.444) de ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi.

§ 3.111. Micile oscilaţii libere ale unui sistem cu un singur grad de libertate

În cazul unui singur grad de libertate, ecuaţiile sistemului (3.376) iau forma

$$x_i = x_i(q), \quad y_i = y_i(q), \quad z_i = z_i(q). \qquad (3.445)$$

Aceste ecuaţii sînt în acelaşi timp ecuaţiile parametrice ale traiectoriilor punctelor sistemului. Dacă echilibrul are loc pentru $q = 0$, atunci coordonatele punctelor vor fi

$$x_i^{(0)} = x_i(0), \quad y_i^{(0)} = y_i(0), \quad z_i^{(0)} = z_i(0). \qquad (3.446)$$

În cazul oscilaţiilor mici, ecuaţiile aproximative ale traiectoriei sînt

$$x_i = x_i^{(0)} + x_i'(0)q, \quad y_i = y_i^{(0)} + y_i'(0)q, \quad z_i = z_i^{(0)} + z_i'(0)q. \quad (3.447)$$

Prin urmare, oscialţiile mici ale punctelor unui sistem cu un singur grad de libertate sînt aproximativ rectilinii şi au loc pe dreptele Δ_i, tangente la traiectoriile exacte în poziţiile de echilibru. Abaterea s_i a punctului A_i de la poziţia sa de echilibru $A_i^{(0)}$ se exprimă cu formula

$$s_i = \sqrt{x_i'^2(0) + y_i'^2(0) + z_i'^2(0)}\,q, \qquad (3.448)$$

prin urmare, formula aproximativă (3.441) pentru energia cinetică ia forma

$$E_c = \frac{\dot{q}^2}{2}\sum_i m_i[x_i'^2(0) + y_i'^2(0) + z_i'^2(0)]. \qquad (3.449)$$

De aici coeficientul inerţial a al sistemului se exprimă cu formula

$$a = \sum_i m_i \left[x_i'^2(0) + y_i'^2(0) + z_i'^2(0)\right]. \qquad (3.450)$$

Formula aproximativă (3.442) pentru energia potenţială capătă forma

$$\Pi = \Pi(0) + \frac{cq^2}{2}. \qquad (3.451)$$

Condiţia suficientă de minim a lui $\Pi(0)$ este inegalitatea $\Pi''(0) > 0$, adică $c > 0$. Sistemul (3.444) de ecuaţii diferenţiale se reduce la o singură ecuaţie

$$a\ddot{q} + cq = 0. \qquad (3.452)$$

Sensul ei fizic constă în aceea că ea este echivalentă cu egalitatea $\frac{a\dot{q}^2}{2} + \frac{cq^2}{2} = \text{const}$, sau $F_c + \Pi = \text{const}$, adică ecuaţia exprimă *legea de conservare a energiei mecanice*. Notînd

$$\frac{c}{a} = k^2, \qquad (3.453)$$

se obţine ecuaţia $\ddot{q} + k^2 q = 0$. Soluţia ei generală are forma

$$q = h \sin(kt + \theta), \qquad (3.454)$$

unde h şi θ sînt constante arbitrare. De aici se deduce pentru abaterea s_i formula

$$s_i = h_i \sin(kt + \theta),$$

unde

$$h_i = h\sqrt{x_i'^2(0) + y_i'^2(0) + z_i'^2(0)}. \qquad (3.455)$$

Prin urmare, în cazul micilor oscilaţii ale sistemului cu un singur grad de libertate, punctele sale execută aproximativ mici oscilaţii armonice rectilinii cu centrul în poziţia de echilibru; amplitudinile h_i ale oscilaţiilor diferitelor puncte sînt diferite, însă faza $kt + \theta$ este aceeaşi la toate punctele. Perioada oscilaţiei

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} \qquad (3.456)$$

este aceeaşi pentru toate punctele şi tot sistemul se întoarce periodic în poziţia de echilibru. Perioada $\frac{2\pi}{k}$ se numeşte *perioada proprie a sistemului*, iar k pulsaţia oscilaţiilor proprii ale sistemului. Ea are un sens fizic şi din acest motiv raportul $\frac{a}{c}$ nu depinde de alegerea coordonatei generalizate.

§ 3.112. Micile oscilaţii libere ale unui sistem cu două grade de libertate

În cazul a două coordonate generalizate q_1 şi q_2, formulele (3.441) şi (3.443) iau forma

$$E_c = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2),$$

$$\Pi = \Pi(0,0) + \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2).$$

Condiţia suficientă de minimum a lui Π (0, 0) sînt inegalităţile

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \tag{3.457}$$

Ecuaţiile (3.444) iau forma

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.458}$$

unde $a_{21} = a_{12}$, $c_{21} = c_{12}$. Pentru rezolvarea lor trebuie scrisă aşa numita *ecuaţie de frecvenţă*

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - k^2a_{11} & c_{12} - k^2a_{12} \\ c_{21} - k^2a_{21} & c_{22} - k^2a_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.459}$$

Ea are două rădăcini pozitive k_1^2 şi k_2^2, situate între limitele

$$0 \leqslant k_1^2 \leqslant \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad \frac{c_{22}}{a_{22}} < k_2^2 < \infty, \tag{3.460}$$

dacă $\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}$. Dacă $k_1^2 \neq k_2^2$, atunci fiecărei rădăcini a ecuaţiei (3.460) îi corespunde o oscilaţie proprie, numită *fundamentală*. La prima oscilaţie fundamentală, coordonatele generalizate q_1 şi q_2 se exprimă cu formulele

$$\left.\begin{aligned} q_1^{(1)} &= C_1^{(1)}(c_{22} - k_1^2a_{22}) \sin (k_1t + \theta_1), \\ q_2^{(1)} &= -\, C_1^{(1)}(c_{12} - k_1^2a_{12}) \sin (k_1t + \theta_1), \end{aligned}\right\} \tag{3.461}$$

unde $C_1^{(1)}$ şi θ_1 sînt constante arbitrare.

Pentru a doua oscilaţie fundamentală, în mod analog

$$\left.\begin{aligned} q_1^{(2)} &= C_2^{(2)}(c_{22} - k_2^2a_{22}) \sin (k_2t + \theta_2), \\ q_2^{(2)} &= -\, C_2^{(2)}(c_{12} - k_2^2a_{12}) \sin (k_2t + \theta_2). \end{aligned}\right\} \tag{3.462}$$

Soluţia generală a sistemului (3.456) are forma

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}, \quad q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)}. \qquad (3.463)$$

În cazul oscilaţiilor mici, traiectoriile punctelor unui sistem cu două grade de libertate sînt aproximativ curbe plane (aşa numitele *figuri Lissajou)*.

Ecuaţia de frecvenţe (3.459) are rădăcini egale, dacă

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{12}}{a_{12}} = \frac{c_{22}}{a_{22}}. \qquad (3.464)$$

Dacă valoarea comună a rapoartelor (3.464) se notează cu k^2, atunci acest k^2 va fi rădăcină dublă a ecuaţiei de frecvenţe (3.459). În acest caz soluţia generală a sistemului (3.458) este dată de formulele

$$q_1 = C_1 \sin (kt + \theta_1), \quad q_2 = C_2 \sin (kt + \theta_2). \qquad (3.465)$$

Traiectoriile punctelor sistemului sînt aproximativ elipse.

§ 3.113. Oscilaţiile amortizate ale unui sistem cu un singur grad de libertate

Dacă înafară de forţele $\vec{F}_i$ ale cîmpului, asupra punctelor sistemului acţionează forţe de rezistenţă $\vec{N}_i$, proporţionale cu vitezele punctelor, adică dacă

$$\vec{N}_i = - \lambda_i \vec{v}_i, \qquad (3.466)$$

atunci prezenţa acestor forţe de rezistenţă micşorează abaterile punctelor şi din acest motiv mişcarea sistemului, după devierea din poziţia de echilibru stabil, în cîmpul de forţe rămîne ca o oscilaţie mică, iar energia cinetică şi cea potenţială se exprimă cu formulele $E_c = \frac{a\dot{q}^2}{2}$, $\Pi = \Pi(0) + \frac{cq^2}{2}$. Forţa generalizată Q, produsă de forţele de rezistenţă, conform formulei (3.383) este

$$Q = \sum_i (- \lambda_i \vec{v}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} = - \sum_i \lambda_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}\right)^2 \dot{q} = - \dot{q} \sum_i \lambda_i [x_i'^2(q) + y_i'^2(q) + z_i'^2(q)]. \qquad (3.467)$$

Pentru oscilaţii mici se poate pune aproximativ

$$\sum_i [x_i'^2(q)+y_i'^2(q)+z_i'^2(q)] \approx \sum_i \lambda_i [x_i'^2(0)+y_i'^2(0)+z_i'^2(0)] = \lambda. \qquad (3.468)$$

Prin urmare

$$Q = -\lambda\dot{q} \tag{3.469}$$

şi *ecuaţia lui Lagrange* capătă forma

$$a\ddot{q} + cq = -\lambda\dot{q}. \tag{3.470}$$

Sensul ei fizic constă în aceea că

$$\frac{\mathrm{d}(E_c + \Pi)}{\mathrm{d}t} = -\lambda\dot{q}^2 < 0 \tag{3.471}$$

şi din acest motiv energia mecanică a sistemului în prezenţa forţelor de rezistenţă descreşte. Funcţia

$$\Phi = -\frac{\lambda\dot{q}^2}{2} \tag{3.472}$$

se numeşte *funcţia disipativă a lui Rayleigh*. Ea caracterizează viteza de descreştere a energiei mecanice a sistemului. Notînd

$$\frac{c}{a} = k^2, \quad \frac{\lambda}{a} = 2n, \tag{3.473}$$

ecuaţiei (3.470) i se dă forma

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0. \tag{3.474}$$

Dacă $k^2 - n^2 > 0$, soluţia generală a ecuaţiei (3.474) are forma

$$q = he^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\, t + \theta\right), \tag{3.475}$$

unde constantele h şi θ se determină în funcţie de datele iniţiale q_0 şi $\dot{q}_0$ cu formulele

$$h = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{k^2 - n^2}}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{q_0\sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{q}_0 + nq_0}.$$

Abaterile s_i ale punctelor sistemului de la poziţia de echilibru, date de expresia (3.448), se exprimă cu formula

$$s_i = h_i e^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\, t + \theta\right), \tag{3.476}$$

unde h_i se determină cu formula (3.455). Prin urmare, punctele execută oscilaţii cu perioada

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \tag{3.477}$$

Valorile absolute ale abaterilor maxime consecutive ale punctelor de la poziţia de echilibru formează o progresie geometrică descrescătoare cu raţia

$$e^{-\frac{nT}{2}} = e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}}. \tag{3.478}$$

Valoarea logaritmului natural al raportului dintre valorile absolute a două abateri maxime, consecutive, adică $\frac{n\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$ se numeşte *decrement logaritmic al oscilaţiilor*. Dacă $n^2 - k^2 > 0$, atunci soluţia generală a ecuaţiei (3.473) devine

$$q = e^{-nt}\left(C_1 \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2}\, t + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2}\, t\right). \quad (3.479)$$

Constantele C_1 şi C_2, în funcţie de datele iniţiale q_0 şi $\dot{q}_0$, se determină cu formulele

$$C_1 = q_0,\ C_2 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{n^2 - k^2}}. \quad (3.480)$$

Mişcarea nu posedă caracter oscilatoriu şi se numeşte *aperiodică*. Pentru valori mari ale lui t se poate considera că

$$q \approx \frac{1}{2}(C_1 + C_2)e^{-(n - \sqrt{n^2 - k^2})t} \quad (3.481)$$

şi din acest motiv $\lim_{t \to \infty} q = 0$ şi sistemul se apropie asimptotic de poziţia de echilibru.

§ 3.114. Oscilaţiile forţate în cazul unei rezistenţe

Dacă asupra sistemului, pe lîngă forţele $\vec{F}_i$ ale cîmpului, acţionează şi cele de rezistenţă $\vec{N}_i = -\lambda_i \vec{v}_i$ şi alte forţe, date ca funcţii de timp şi care produc forţa generalizată $Q(t)$, iar sistemul continuă să execute mici oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru în cîmpul forţelor $\vec{F}_i$, atunci ecuaţia aproximativă a lui Lagrange ia forma

$$a\ddot{q} + \lambda\dot{q} + cq = Q(t), \quad (3.482)$$

unde, ca şi înainte, energia cinetică se exprimă cu formula $E_c = \frac{a\dot{q}^2}{2}$, energia potenţială cu formula $\Pi = \frac{cq^2}{2}$, iar forţa generalizată de rezistenţă cu formula $Q = -\lambda\dot{q}$.

Dacă conform notaţiilor (3.473) ecuaţia (3.482) este scrisă în forma $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \frac{Q(t)}{a}$, atunci soluţia ei pentru datele iniţiale $t_0 = 0, q_0, \dot{q}_0$ are forma pentru $k > n$

$$q = \left[q_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2}\, t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2}\, t\right] e^{-nt} +$$

$$+ \frac{1}{a\sqrt{k^2 - n^2}} \int_0^t Q(\xi)\, e^{-n(t-\xi)} \sin\left[\sqrt{k^2 - n^2}\,(t - \xi)\right] d\xi; \quad (3.483)$$

pentru $n > k$

$$q = \left[q_0 \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2}\, t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2}\, t\right] e^{-nt} +$$

$$+ \frac{1}{a\sqrt{n^2 - k^2}} \int_0^t Q(\xi) e^{-n(t-\xi)} \operatorname{sh}\left[\sqrt{n^2 - k^2}\,(t - \xi)\right] d\xi; \qquad (3.484)$$

pentru $k = n$

$$q = [q_0 + (\dot{q}_0 + nq_0)t]\, e^{-nt} + \frac{1}{a}\int_0^t Q(\xi) e^{-n(t-\xi)}(t - \xi)\, d\xi. \qquad (3.485)$$

În aceste formule primii termeni reprezintă oscilații amortizate, care se obțin fără forța generalizată suplimentară $Q(t)$. Ultimii termeni, care conțin integrala, reprezintă așa numitele *oscilații forțate.* Deoarece practic oscilațiile amortizate scad repede, după un interval oarecare de timp toată mișcarea sistemului se reduce la oscilații forțate.

Cel mai important este cazul unei forțe generalizate armonice, care se exprimă cu formula.

$$Q = H \sin (pt + \delta).$$

În acest caz, pentru datele inițiale $t = 0$, q_0, $\dot{q}_0$ și pentru $k > n$, soluția ecuației (3.482) devine

$$q = e^{-nt}\left[q_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2}\, t + \right.$$

$$\left. + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2}\, t\right] - e^{-nt}\left[\sin (\delta - \varepsilon) \cos \sqrt{k^2 - n^2}\, t + \right.$$

$$\left. + \frac{p \cos (\delta - \varepsilon) + n \sin (\delta - \varepsilon)}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2}\, t\right] +$$

$$+ A \sin (pt + \delta - \varepsilon), \qquad (3.486)$$

unde

$$A = \frac{H}{a\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \qquad (3.487)$$

$$\cos \varepsilon = \frac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad \sin \varepsilon = \frac{2\, np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}. \qquad (3.488)$$

Primii doi termeni din formula (3.486) reprezintă oscilaţii amortizate, iar oscilaţiile determinate de ultimul termen $A \sin(pt + \delta - \varepsilon)$ sînt forţate. Acestea sînt oscilaţii armonice cu amplitudinea A şi faza $pt + \delta - \varepsilon$. Perioada lor $T = \frac{2\pi}{p}$ coincide cu perioada forţelor Q, determinate de formula (3.486), iar faza $pt + \delta - \varepsilon$ este deplasată faţă de faza $pt + \delta$ cu unghiul ε. Dacă sistemul ar fi fost deviat de la poziţia de echilibru în cîmpul de forţe $\vec{F}_i$ de către o forţă generalizată constantă de mărime H şi dacă s-ar găsi într-o stare de repaus, atunci coordonata generalizată în noua poziţie de repaus ar avea valoarea $A_0 = \frac{H}{ak^2}$. Raportul dintre amplitudinea A a oscilaţiilor forţate în prezenţa forţei generalizate $Q = H \sin(pt + \delta)$ şi abaterea statică A_0 se numeşte *coeficient de dinamicitate*

$$\frac{A}{A_0} = \lambda = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}},$$

sau

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2}}. \tag{3.489}$$

Notînd

$$\frac{p}{k} = z, \quad \frac{n}{k} = \delta, \tag{3.490}$$

formulei pentru coeficientul de dinamicitate i se dă forma

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^2}}. \tag{3.491}$$

Pentru δ constant, acest coeficient λ atinge valoarea maximă atunci cînd $z = \sqrt{1 - 2\delta^2}$, dacă $\delta < \frac{1}{2} \approx 0{,}707$, adică dacă $n \leqslant 0{,}707k$. Valoarea maximă este $\lambda_{max} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}$. Atunci cînd frecvenţa k a oscilaţiilor libere coincide cu frecvenţa p a forţei generalizate de excitaţie Q, adică pentru $z = 1$, λ are valoarea

$$\lambda_r = \frac{1}{2\delta}. \tag{3.492}$$

Acest caz se numeşte *rezonanţă*. Cînd frecvenţa p coincide cu frecvenţa $\sqrt{k^2 - n^2}$ a oscilaţiilor amortizate, adică cînd $z = \sqrt{1 - \delta^2}$, λ capătă valoarea

$$\lambda^* = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \frac{3}{4}\delta^2}}. \tag{3.493}$$

Pentru o rezistenţă mică, λ_r şi λ^* sînt foarte apropiate de λ_{max}, cum se vede din tabela următoare (extrasă din cursul de mecanică teoretică de D. G. Loiţianski şi A. I. Lurie, vol. II, p. 467).

δ	$z_m = \sqrt{1 - 2\delta^2}$	λ_{max}	λ_r	λ^*
0,05	0,9975	10,013	10,000	10,010
0,10	0,9899	5,025	5,000	5,019
0,15	0,9772	3,371	3,333	3,362
0,20	0,9695	2,552	2,500	2,538
0,25	0,9357	2,065	2,000	2,049
0,30	0,9055	1,747	1,667	1,726
0,40	0,8246	1,366	1,250	1,333
0,50	0,7071	1,155	1,000	1,102
$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$	0,000	1,000	0,707	0,894

Decalajul ε al fazei oscilaţiilor forţate se determină conform expresiei (3.488) cu formula

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2z\delta}{1 - z^2}. \tag{3.494}$$

Valorile coeficientului de dinamicitate λ şi ale decalajului $\varepsilon°$ al fazei, exprimat în grade, pentru cîteva valori ale lui δ sînt date în tabela ce urmează (extras din cursul de mecanică teoretică a lui L. G. Loiţianski şi A. I. Lurie, vol. II, p. 468). Pentru $\delta = 0$, ε este o funcţie discontinuă de z, egală cu zero pentru $z<1$ şi egală cu π pentru $z>1$. Tabela arată că pentru valori ale lui z suficient de depărtate de valoarea 1, adică în domeniul de frecvenţe ale forţei generalizate, care frecvenţe sînt suficient de depărtate de valoarea de rezonanţă k, coeficientul de dinamicitate λ variază puţin cu variaţia lui δ şi în acest caz influenţa forţelor de rezistenţă asupra valorii amplitudinii A a oscilaţiilor forţate poate să nu fie luată în seamă.

z	δ = 0,0	δ = 0,05		δ = 0,10		δ = 0,15		δ = 0,20		δ = 0,25	
	λ	λ	ε°	λ	ε°	λ	ε°	λ	ε°	λ	ε°
0,00	1,00	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0
0,10	1,01	1,01	0,6	1,01	1,3	1,01	1,9	1,01	2,5	1,01	2,9
0,20	1,04	1,04	1,2	1,04	2,4	1,04	3,6	1,04	4,7	1,04	5,9
0,30	1,10	1,10	1,9	1,10	3,7	1,10	5,6	1,09	7,5	1,09	9,4
0,40	1,19	1,19	2,8	1,18	5,4	1,18	8,1	1,17	10,8	1,16	13,4
0,50	1,33	1,33	3,8	1,32	7,6	1,30	11,3	1,29	15,0	1,26	18,5
0,60	1,56	1,55	5,3	1,54	10,6	1,50	15,7	1,46	20,6	1,41	25,2
0,70	1,96	1,94	7,8	1,89	15,4	1,82	22,4	1,72	28,8	1,62	34,5
0,75	2,28	2,25	9,7	2,16	18,9	2,03	27,2	1,88	34,4	1,72	40,6
0,80	2,78	2,71	12,5	2,53	23,9	2,31	33,7	2,08	41,7	1,86	48,0
0,85	3,60	3,44	17,0	3,07	31,4	2,65	42,5	2,28	50,8	1,98	56,8
0,90	5,26	4,76	25,3	3,82	43,5	3,03	55,0	2,46	62,2	2,05	67,2
0,925	6,95	5,85	32,7	4,27	52,2	3,20	62,5	2,52	68,7	2,07	72,7
0,95	10,26	7,33	44,1	4,67	62,7	3,30	71,0	2,55	75,5	2,06	78,3
0,975	20,50	9,16	63,4	4,98	75,9	3,36	80,5	2,55	82,9	2,04	84,2
1,000	∞	10,00	90,0	5,00	90,0	3,33	90,0	2,50	90,0	2,00	90,0
1,025	19,76	8,73	116,5	4,73	104,0	3,20	99,4	2,42	97,1	1,94	95,6
1,05	9,76	6,80	134,8	4,28	116,5	3,02	108,3	2,31	103,9	1,87	101,1
1,075	6,45	5,31	145,3	3,77	125,8	2,80	115,7	2,19	109,8	1,79	106,2
1,10	4,76	4,22	152,3	3,29	133,7	2,55	122,3	2,05	115,5	1,70	110,8
1,15	3,11	2,94	160,3	2,53	144,8	2,17	133,0	1,78	125,4	1,52	119,3
1,20	2,27	2,19	164,8	1,99	151,4	1,76	140,6	1,54	132,5	1,36	126,3
1,25	1,78	1,74	167,4	1,63	156,0	1,48	146,3	1,33	138,2	1,19	132,0
1,30	1,45	1,42	169,3	1,36	159,4	1,26	150,5	1,16	143,0	1,06	136,7
1,40	1,04	1,03	171,8	1,00	163,9	0,96	156,4	0,90	149,7	0,84	143,8
1,50	0,80	0,80	173,2	0,77	166,5	0,75	160,2	0,72	154,3	0,69	149,0
1,75	0,49	0,48	175,1	0,48	171,5	0,47	166,7	0,45	161,3	0,45	157,0
2,00	0,33	0,33	176,2	0,33	172,4	0,33	168,7	0,32	165,0	0,32	161,6
2,50	0,19	0,19	177,2	0,19	174,5	0,19	171,9	0,19	169,2	0,18	166,6
3,00	0,125	0,125	177,8	0,125	175,7	0,123	173,5	0,123	171,5	0,123	169,5
4,00	0,067	0,067	178,5	0,067	177,0	0,066	175,5	0,065	174,0	0,066	172,3
5,00	0,042	0,042	178,9	0,042	177,6	0,042	176,4	0,042	175,3	0,042	174,0

§ 3.115. Oscilaţii forţate fără rezistenţă

Dacă rezistenţa lipseşte, ecuaţia (3.482) ia forma

$$a\ddot{q} + cq = Q(t), \tag{3.495}$$

iar soluţia ei (3.483) pentru valorile iniţiale q_0 şi $\dot{q}_0$ este dată de formula

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{k}{ca}\int_0^t Q(\xi) \sin k(t - \xi)\, d\xi, \tag{3.496}$$

unde, ca şi înainte, $k^2 = \frac{c}{a}$. Pentru valorile iniţiale $q_0 = \dot{q}_0 = 0$ şi pentru $Q(0) = 0$ oscilaţiile forţate se determină cu formula

$$q = \frac{Q(t)}{ca} - \frac{1}{ca}\int_0^t Q'(\xi)\cos k(t-\xi)\,d\xi. \qquad (3.497)$$

În cazul forţei armonice generalizate $Q = H\sin(pt + \delta)$, pentru $k \neq p$ formula (3.486) devine

$$q = q_0\cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt - \frac{H}{a(k^2-p^2)}(\sin\delta\cos kt + \frac{p}{k}\cos\delta\sin kt) + \frac{H}{a(k^2-p^2)}\sin(pt+\delta). \qquad (3.498)$$

Ultimul termen reprezintă oscilaţii armonice forţate cu amplitudinea $A = \left|\frac{H}{a(k^2-p^2)}\right|$. Dacă $k>p$, atunci $pt + \delta$ a acestor oscilaţii coincide cu faza forţei Q. Dacă, însă, $k<p$, oscilaţiile forţate se exprimă cu formula

$$Q = A\sin(pt + \delta + \pi),$$

adică faza lor este înaintea fazei forţei Q cu π. În cazul rezonanţei, adică pentru $p = q$, formula (3.486) se înlocuieşte cu următoarea:

$$q = q_0\cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt + \frac{H}{2a\,k^2}[\cos\delta\sin kt - kt\cos(kt+\delta)]. \quad (3.499)$$

Termenul $-\frac{H}{2\,ak}t\cos(kt + \delta)$ determină aşa numitele *oscilaţii forţate divergente*, deoarece, pentru valori mari ale lui t el poate deveni, teoretic, oricît de mare, însă fizic aceasta nu înseamnă că la mişcarea sistemului parametrul q obţine efectiv asemenea valori, deoarece la o abatere însemnată a sistemului nu se mai poate utiliza forma aproximativă a ecuaţiei lui Lagrange.

În cazul în care forţa generalizată $Q(t)$ este o funcţie periodică de timp cu perioada $T = \frac{2\pi}{p}$, ea poate fi în general reprezentată printr-o serie trigonometrică de forma

$$Q(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} H_s\sin(spt + \delta_s). \qquad (3.500)$$

Pentru $a_0 = 0$, notînd $\frac{H_s}{a} = h_s$ soluţia ecuaţiei (3.495) se obţine în forma

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{h_s}{k^2 - s^2 p^2} \left(\sin \delta_s \cos kt + \right.$$

$$\left. + \frac{p}{k} \cos \delta_s \sin kt \right) + \sum_{s=1} \frac{h_s}{k^2 - s^2 p^2} \sin (spt + \delta_s), \qquad (3.501)$$

dacă $k \neq np$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Ultima sumă reprezintă o oscilaţie forţată, care se obţine prin suprapunerea seriei de oscilaţii armonice. Pentru $k = np$ are loc rezonanţa de ordinul n, căreia îi corespunde oscilaţia divergentă, determinată de formula

$$q = -\frac{h_n t}{2k} \cos (kt + \delta_n)$$

3.13

Ciocniri

§ 3.116. Percuţii

Se numeşte ciocnire interacţiunea de scurtă durată a unor corpuri, interacţiune care produce într-un interval de timp foarte mic o variaţie foarte mare a vitezelor punctelor corpurilor. Forţa care acţionează în decursul ciocnirii şi care are o mărime atît de mare încît variaţia impulsului pentru intervalul de timp foarte mic al ciocnirii are o mărime finită, se numeşte *forţă de ciocnire*. Teoria matematică a ciocnirilor constă în faptul că se neglijează deplasările punctelor în timpul ciocnirii, iar variaţia impulsului în timpul ciocnirii se consideră ca un vector aplicat punctului în acea poziţie, pe care o păstrează în decursul ciocnirii. O astfel de variaţie de impuls se numeşte *percuţie*. Dacă intervalul de timp, în decursul căruia are loc ciocnirea, este limitat de momentele t şi $t + \tau$, unde τ este foarte mic, percuţia se determină în funcţie de forţa de ciocnire $\vec{F}$ cu ajutorul formulei

$$\vec{S} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}\, dt. \qquad (3.502)$$

Invers, valoarea medie a forței de ciocnire se determină cu formula

$$\vec{F}_m = \frac{\vec{S}}{\tau}. \tag{3.503}$$

Dacă înafară de forța de percuție, asupra punctului mai acționează și alte forțe de mărime finită, ele pot fi neglijate în studiul ciocnirii și formula (3.232), pentru variația impulsului unui punct la ciocnire, ia forma

$$m\vec{v}(t+\tau) - m\vec{v}(t) = \vec{S}. \tag{3.504}$$

Vectorii $\vec{v}(t)$ și $\vec{v}(t+\tau)$ se aplică în același punct geometric, corespunzător poziției punctului material în timpul ciocnirii, și se numesc *viteza punctului material înainte de ciocnire și respectiv după ciocnire*. Dacă este vorba de un sistem material, în general o variație bruscă a vitezei unor puncte trebuie să fie urmată de o variație de asemenea bruscă a vitezelor altor puncte, adică în general toate punctele sistemului suferă simultan ciocniri. Forțele de ciocnire pot fi în acest caz atît exterioare cît și interioare, și atît date, cît și reacțiuni ale legăturilor. În mod corespunzător percuțiile pot fi exterioare și interioare, date și de reacțiune. Conform proprietății forțelor interioare, suma percuțiilor interioare este totdeauna egală cu zero și formula (3.326), pentru variația impulsului sistemului în timpul ciocnirii, ia forma

$$\vec{H}(t+\tau) - \vec{H}(t) = \sum_i \vec{S}_i^{(e)}, \tag{3.505}$$

unde $\vec{S}_i^{(e)}$ este percuția exterioară, aplicată punctului A_i al sistemului. Pentru variația vitezei $\vec{v}_C$ a centrului de inerție al sistemului avem formula

$$m\vec{v}_C(t+\tau) - m\vec{v}_C(t) = \sum_i S_i^{(e)}, \tag{3.506}$$

unde m este masa sistemului. În absența percuțiilor exterioare impulsul sistemului și viteza centrului său de inerție nu variază.

Deoarece raza vectoare $\vec{r}$ a unui punct se consideră neschimbată în timpul ciocnirii, formula (3.504) pentru variația momentului cinetic devine în cazul ciocnirii

$$\vec{r} \times m\vec{v}\,(t+\tau) - \vec{r} \times m\vec{v}\,(t) = \vec{r} \times \vec{S}. \tag{3.507}$$

Produsul vectorial $\vec{r} \times \vec{S}$ se numește *momentul percuției* în raport cu originea razei vectoare, și se notează cu $\vec{M}_O(\vec{S})$. Acest moment se exprimă în funcție de forța $\vec{F}$ de ciocnire cu ajutorul formulei

$$\vec{M}_O(\vec{S}) = \vec{r} \times \vec{S} = \int_t^{t+\tau} \vec{r} \times \vec{F}\,dt. \tag{3.508}$$

De aici, pentru suma momentelor impulsurilor interioare instantanee se obține formula

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{S}_i^{(i)} = \int_t^{t+\tau} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{(i)}\right) \mathrm{d}t = 0. \tag{3.509}$$

Prin urmare, pentru variația momentului cinetic al sistemului la ciocnire avem formula

$$\vec{K}_O(t+\tau) - \vec{K}_O(t) = \sum_i \vec{r} \times \vec{S}_i^{(e)} = \sum_i \vec{M}_O\left(\vec{S}_i^{(e)}\right). \tag{3.510}$$

Pentru momentele cinetice axiale în cazul ciocnirii avem formula

$$K_x(t+\tau) - K_x(t) = \sum_i M_x\left(\vec{S}_i^{(e)}\right), \tag{3.511}$$

unde $M_x\left(\vec{S}_i^{(e)}\right)$ este proiecția pe axa Ox a momentului percuției exterioare. Lucrul mecanic al forței de ciocnire în timpul ciocnirii are mărime finită și se exprimă cu *formula lui Kelvin*

$$L = \vec{S} \cdot \frac{\vec{v}(t+\tau) + \vec{v}(t)}{2}. \tag{3.512}$$

§ 3.117. Ciocnirea unui punct cu o suprafață netedă fixă

Dacă o particulă se ciocnește de o suprafață netedă, avînd înainte de ciocnire viteza $\vec{v}(t) = \vec{v}_1$, aceasta făcînd cu normala la suprafață unghiul α, și dacă punctul după ciocnire se îndepărtează de suprafață cu viteza $\vec{v}(t+\tau) = \vec{v}_2$ care formează cu normala unghiul β, atunci percuția $\vec{S}$ este îndreptată după normală la suprafață. Proiecțiile vitezelor $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ pe tangenta la suprafață sînt egale între ele, iar valorile absolute ale proiecțiilor lor pe normală se găsesc într-un raport constant care depinde doar de materialul particulei și al suprafeței

$$\frac{|v_{2n}|}{|v_{1n}|} = k. \tag{3.513}$$

Acest coeficient k are valori cuprinse între limitele $0<k<1$ și se numește *coeficient de restituire*. Pentru unele materiale k este sau foarte mic, sau foarte apropiat de unitate. În primul caz se consideră teoretic $k = 0$ și ciocnirea se numește *plastică*; în al doilea caz se

consideră $k = 1$ şi ciocnirea se numeşte *perfect elastică*. Unghiurile α şi β satisfac condiţia

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = k. \tag{3.514}$$

Percuţia, în funcţie de viteza $\vec{v}_1$ înainte de ciocnire şi unghiul de incidenţă α, poate fi determinată cu formula

$$\vec{S} = m\vec{v}_1 (1 + k) \cos\alpha, \tag{3.515}$$

unde m este masa punctului.

§ 3.118. Ciocnirea normală centrală a două corpuri

Dacă două corpuri cu masele m şi m' au o mişcare de translaţie cu vitezele paralele $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}'_1$ şi la un anumit moment ajung în contact unul cu altul într-un punct situat pe aceeaşi dreaptă cu centrele de greutate C şi C' ale corpurilor, dreapta fiind paralelă cu vitezele $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}'_1$, şi normală la suprafeţele în contact, această ciocnire a corpurilor se numeşte *ciocnire normală centrală*. În punctul de contact al corpurilor apar reacţiuni de ciocnire. Mişcarea corpurilor după ciocnire rămîne de translaţie, iar vitezele lor $\vec{v}_2$ şi $\vec{v}'_2$ sînt îndreptate după aceeaşi dreaptă ca şi înainte de ciocnire, însă îşi modifică mărimea. Vitezele relative $\vec{v}_2 - \vec{v}'_2$ şi $\vec{v}_1 - \vec{v}'_1$ sînt supuse *legii lui Newton*

$$\vec{v}_2 - \vec{v}'_2 = - k(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1), \tag{3.516}$$

unde k este coeficientul de restituire. Proiecţiile v_1, v'_1, v_2 v'_2 ale vitezelor corpurilor înainte şi după ciocnire pe dreapta C_1C_2, care uneşte centrele de greutate ale corpurilor, sînt legate prin ecuaţiile

$$v_2 = \frac{(m-km')v_1+m'(1+k)v'_1}{m+m'}, \quad v'_2 = \frac{(m'-km)v'_1+m(1+k)v_1}{m+m'}. \tag{3.517}$$

Percuţia $\vec{S}$ aplicată corpului de masă m are mărimea scalară

$$S = (1 + k)\frac{mm'}{m + m'}(v'_1 - v_1). \tag{3.518}$$

Deoarece în acest caz nu există forţe exterioare de ciocnire, viteza $\vec{v}_C$ a centrului de inerţie al întregului sistem nu se modifică în timpul ciocnirii şi se determină cu formula

$$\vec{v}_C = \frac{m\vec{v}_1 + m'\vec{v}'_1}{m + m'} = \frac{m\vec{v}_2 + m'\vec{v}'_2}{m + m'}. \tag{3.519}$$

Vitezele după ciocnire, în funcţie de proiecţia c a vitezei $\vec{v}_C$ pe dreapta C_1C_2, se exprimă cu formulele

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= c + k(c - v_1), \\ v_2' &= c + k(c - v_1'). \end{aligned}\right\} \tag{3.520}$$

Pentru cazul $k = 0$, numit *ciocnire perfect plastică*, formulele devin

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' = \vec{v}_C, \tag{3.521}$$

adică după ciocnire corpurile se mişcă ca un singur corp rigid. Pentru cazul $k = 1$, numit *ciocnire perfect elastică*, formulele capătă forma

$$v_2 = \frac{(m - m')v_1 + 2m'v_1'}{m + m'}, \quad v_2' = \frac{(m' - m)v_1' + 2mv_1}{m + m'}. \tag{3.522}$$

§ 3.119. Acţiunea unei ciocniri asupra unui corp care se roteşte în jurul unei axe fixe

Din cauza ciocnirii aplicate unui corp care se roteşte în jurul unei axe fixe O_1O_2, se schimbă brusc viteza unghiulară şi apar reacţiuni de ciocnire în punctele fixate ale axei.

Variaţia $\omega_2 - \omega_1$ a valorii algebrice a vitezei unghiulare se determină prin percuţiile exterioare date $\vec{S}_k^{(e)}$ cu formula

$$J_{O_1O_2}(\omega_2 - \omega_1) = \sum_{k=1}^{n} M_{O_1O_2}(\vec{S}_k^{(e)}). \tag{3.523}$$

Dacă axa de rotaţie se ia drept axă Oz, cotele punctelor fixate O_1 şi O_2 se notează cu z_1 şi z_2 şi dacă se aplică corpului în punctul $M(s,0,0)$ o percuţie dată S, atunci percuţiile de reacţiune S_1 şi S_2, care apar în punctele fixe, se determină din ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned} -my_C(\omega_2 - \omega_1) &= S_x + S_{1x} + S_{2x}, \\ mx_C(\omega_2 - \omega_1) &= S_y + S_{1y} + S_{2y}, \\ 0 &= S_z + S_{1z} + S_{2z}, \\ J_{xz}(\omega_2 - \omega_1) &= z_1S_{1y} + z_2S_{2y}, \\ J_{yz}(\omega_2 - \omega_1) &= sS_z - z_1S_{1x} - z_2S_{2x}, \end{aligned}\right\} \tag{3.524}$$

unde x_C, y_C sînt coordonatele centrului de greutate al corpului, J_{xz} şi J_{yz} sînt produsele de inerţie. De aici rezultă că percuţiile de reacţiune vor fi egale cu zero, adică axa nu va suporta ciocniri, numai în următoarele condiiţi: percuţia dată $\vec{S}$ trebuie să fie îndreptată normal pe axa de rotaţie şi pe planul dus prin axa de rotaţie şi prin centrul de greutate al corpului; axa de rotaţie trebuie să fie axa

principală de inerţie în punctul ei de intersecţie cu planul dus perpendicular pe axa de rotaţie prin punctul de aplicaţie al percuţiei date $\vec{S}$ şi, în sfîrşit, poziţia punctului de aplicaţie a impulsului instantaneu dat trebuie să fie determinată de distanţa

$$s = \frac{J_z}{m x_G}. \tag{3.525}$$

Punctul M corespunzător cazului cînd nu au loc percuţii de reacţiune, se numeşte *centru de ciocnire* sau centrul percuţiilor. În cazul cînd corpul în rotaţie este o placă plană subţire şi axa de rotaţie este situată în planul acestei plăci, pentru ca să nu apară percuţii de reacţiune, percuţia dată trebuie să fie normală pe planul plăcii şi aplicată în centrul de oscilaţie corespunzător axei de rotaţie.

§ 3.120. Variaţia energiei cinetice la ciocnire datorită introducerii unor legături ideale de durată

Uneori cauza ciocnirii este faptul că sistemului i se impun în momentul ciocnirii legături noi care se păstrează în mişcare după ciocnire; asemenea *legături* se numesc *de durată*. Dacă nu există alte impulsuri instantanee, în afară de cele de reacţiune, care apar din cauza impunerii legăturilor de durată, şi dacă legăturile impuse sînt ideale pentru mişcarea după ciocnire, are loc o pierdere de energie cinetică a sistemului, exprimată cu *formula lui Carnot*)

$$E_{c1} - E_{c2} = \sum_i \frac{m_i u_i^2}{2}, \tag{3.526}$$

în care E_{c1} şi E_{c2} sînt energiile cinetice înainte şi după ciocnire, iar u_i este aşa numita *viteză pierdută*, adică diferenţa dintre vitezele punctului, înainte şi după ciocnire

$$\vec{u}_i = \vec{v}_i(t) - \vec{v}_i(t + \tau).$$

§ 3.121. Variaţia energiei cinetice la ciocnirea directă centrală a corpurilor

Dacă două corpuri de mase m şi m' se ciocnesc normal şi central cu coeficientul de restituire k, atunci pierderea de energie cinetică se determină în funcţie de vitezele v_1 şi v'_1 înainte de ciocnire cu formula

$$E_{c1} - E_{c2} = \frac{1 - k^2}{2} \frac{mm'}{m + m'} (v_1 - v'_1)^2, \tag{3.527}$$

iar în funcţie de vitezele v_2 şi v'_2 după ciocnire, cu formula

$$E_{c1} - E_{c2} = \frac{1-k^2}{2k^2}\,\frac{mm'}{m+m'}\,(v_2 - v'_2)^2. \qquad (3.528)$$

Prin analogie cu formula lui Carnot, pierderea de energie se poate exprima cu formula

$$E_{c1} - E_{c2} = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{m}{2}(v_1 - v_2)^2 + \frac{m'}{2}(v'_1 - v'_2)^2\right]. \qquad (3.529)$$

În cazul ciocnirii perfect elastice $k = 1$ şi $E_{c1} = E_{c2}$, adică nu are loc pierderea de energie cinetică. La ciocnire perfect plastică, $k = 0$ şi pierderea de energie cinetică (adică trecerea ei în alte forme) este maximă

$$E_{c1} - E_{c2} = \frac{m}{2}(v_1 - v_2)^2 + \frac{m'}{2}(v'_1 - v'_2)^2. \qquad (3.530)$$

Rezistența materialelor 4

Rezistența materialelor 4

Notații

A — suprafața secțiunii transversale.
A_x, B_x, C_x, D_x — funcțiile hiperbolo-circulare pentru grinzi pe teren elastic.
B — bimoment [kgf·cm²].
b — lățimea secțiunii transversale.
C — rigiditatea sistemului [kgf·cm²].
C_c — coeficient de siguranță față de limita de curgere.
C_s — coeficient de siguranță (sau stabilitate).
c_c — coeficient de supraîncărcare pentru o sarcină constantă.
c_r — coeficient de siguranță față de rezistența la rupere.
c_t — coeficient de supraîncărcare pentru o sarcină variabilă.
c_v — rigiditatea reazimului [kgf/cm].
c_φ — rigiditatea încastrării [kgf·cm].
D_σ — tensorul (tensiunii) deviator.
d — diametrul bulonului, nitului.
E — modulul de elasticitate (al lui Young) [kgf/cm²].
E_t — modulul tangent [kgf/cm²].
EI — rigiditatea grinzii la încovoiere [kgf·cm²].
f — săgeata la încovoiere, deplasarea.
G — modul de elasticitate transversal [kgf/cm²], greutatea corpului [kgf].
g — accelerația gravitației.
H — forța de întindere în fir; împingerea unui arc.
h — înălțimea secțiunii transversale; înălțimea cordonului de sudură (cateta).
I_d — momentul fictiv de inerție al secțiunii la răsucire [cm⁴].
I_p — momentul de inerție polar al suprafeței secțiunii [cm⁴].
I_x, I_y — momentele de inerție axiale ale secțiunii față de axele Oz, Oy [cm⁴].

σ_v — amplitudinea tensiunii.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — tensiunile normale pe elemente de suprafaţă perpendiculare pe axele Ox, Oy, Oz.
σ_ν — tensiunea normală pe un element de suprafaţă cu normala ν.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — tensiunile principale.
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ — invarianţii tensorului tensiunilor.
τ — tensiunea tangenţială [kgf/cm²].
τ_a — rezistenţa tangenţială admisibilă.
$\tau_i = \tau_{oct}$ — tensiunea tangenţială octaedrică, intensitatea tensiunii tangenţiale.
τ_{xy} — tensiunea tangenţială îndreptată după axa Ox, pe un element de suprafaţă perpendicular pe axa Oy.
τ_ν — tensiunea tangenţială pe un element de suprafaţă cu normala ν.
$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ — cele mai mari tensiuni tangenţiale.

4.1
Noţiuni generale asupra tensiunilor şi deformaţiilor

§ 4.1 Starea de tensiune

Dacă în jurul unui punct oarecare (x, y, z) al corpului se consideră un paralelipiped dreptunghic infinit mic (fig. 4.1), atunci acţiunea elementelor vecine ale corpului trebuie reprezentată printr-un sistem de nouă componente ale tensiunii: trei tensiuni normale σ şi şase tangenţiale τ, formînd împreună *tensorul*

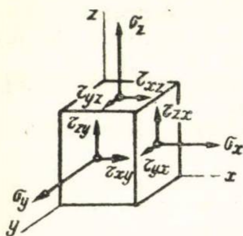


Fig. 4.1.

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (4.1)$$

Dimensiunile tensiunii sînt forţa împărţită la suprafaţă, şi se măsoară în kgf/cm².

Problema determinării componentelor tensorului este static nedeterminată (nouă necunoscute, faţă de şase ecuaţii de echilibru). Tensorul (4.1) este simetric, deoarece tensiunile tangenţiale sînt supuse legii dualităţii

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad (4.2)$$

pentru a cărei demonstrare se folosesc ecuaţiile de echilibru

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0 \quad \text{şi} \quad \sum M_z = 0.$$

Celelalte trei ecuații, $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ și $\sum Z = 0$, conduc la stabilirea legăturii dintre componentele tensiunii și forțele masice (greutatea paralelipipedului și forțele de inerție ale lui).

Între componentele tensorului (4.1) există diferite relații invariante, dintre care se citează

$$\left.\begin{aligned} \sigma_I &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_0 = \text{const},\\ \sigma_{II} &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 =\\ &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \text{const},\\ \sigma_{III} &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 -\\ &\quad - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \text{const}. \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

Aici σ_0 este *tensiunea deformației de volum*, iar $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ sînt *tensiunile principale*, care satisfac ecuația

$$\sigma^3 - \sigma^2\sigma_I + \sigma\sigma_{II} - \sigma_{III} = 0, \quad (4.4)$$

care se obține din condiția ca pe suprafețele de acționare ale tensiunilor principale σ, tensiunile tangențiale τ să fie nule. *Tensiunile tangențiale maxime sînt*

$$\tau_{12} = 0,5\,(\sigma_1 - \sigma_2),\quad \tau_{23} = 0,5\,(\sigma_2 - \sigma_3),\quad \tau_{13} = 0,5\,(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (4.5)$$

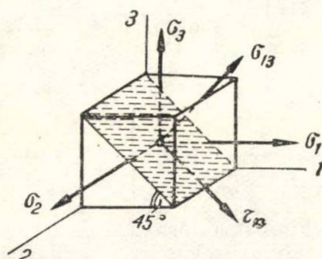


Fig. 4.2.

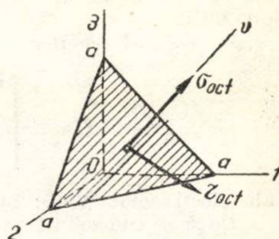


Fig. 4.3.

Ele au loc pe elementele de suprafață înclinate față de suprafețele principale (*1—2*, *2—3*, *1—3*) cu $\pm$ 45°; dintre tensiunile tangențiale, cele mai mari sînt τ_{13}. În afară de tensiunile (4.5), pe aceleași elemente de suprafață acționează tensiunile normale

$$\sigma_{12} = 0,5\,(\sigma_1 + \sigma_2),\quad \sigma_{23} = 0,5\,(\sigma_2 + \sigma_3),\quad \sigma_{13} = 0,5\,(\sigma_1 + \sigma_3). \quad (4.6)$$

În fig. 4.2. sînt indicate direcțiile tensiunilor τ_{13} și σ_{13}.

Pe așa-numitele *suprafețe octaedrice*, egal înclinate față de cele trei plane principale (2) (fig. 4.3), acționează tensiunea normală medie

$$\sigma_{oct} = \sigma_m = \sigma_0 : 3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) : 3 \quad (4.7)$$

şi *tensiunea tangenţială octaedrică*

$$\tau_{oct} = \tau_i = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{13}^2}. \qquad (4.8)$$

Se numeşte *intensitate a tensiunii*, σ_i, tensiunea redusă (sau de calcul), determinată prin teoria energiei de schimbare a formei; σ_i este legată de τ_i prin formula

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_i. \qquad (4.9)$$

Tensorul tensiunii (4.1) poate fi descompus în componente:

a) *tensorul de volum* (sau sferic)

$$T_\sigma^0 = \begin{Bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{Bmatrix}, \qquad (4.10)$$

ale cărui componente produc numai schimbarea volumului paralelipipedului;

b) *tensorul deviator*

$$T_\sigma^\varphi = D_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x-\sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z-\sigma_m \end{Bmatrix}, \qquad (4.11)$$

ale cărui componente produc numai schimbarea formei.

Dacă se cunoaşte tensorul (4.1) şi se cere să se găsească tensiunea normală σ_ν şi cea tangenţială τ_ν pe un *element de suprafaţă înclinat*, ale cărui cosinusuri directoare faţă de axele Ox, Oy, Oz sînt l, m şi n (iar $l^2+m^2+n^2=1$), se utilizează formulele

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} nl), \qquad (4.12)$$

$$\tau_\nu = \sqrt{p^2 - \sigma_\nu^2}, \qquad (4.13)$$

$$p^2 = p_{x\nu}^2 + p_{y\nu}^2 + p_{z\nu}^2, \qquad (4.14)$$

$$\left.\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{z\nu} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned}\right\} \qquad (4.15)$$

Cosinusurile directoare ale primului plan principal se găsesc, rezolvînd sistemul format din (4.14) şi două ecuaţii din grupa (4.15), înlocuind

$$p = \sigma_1, \; p_{x\nu} = \sigma_1 l, \; p_{y\nu} = \sigma_1 m, \; p_{z\nu} = \sigma_1 n.$$

Pentru problema plană, cînd tensiunile acţionează numai în planul xOy, în toate formulele precedente se admite că

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad n = 0.$$

(prin urmare, $l^2 + m^2 = 1$); una din cele trei tensiuni principale este nulă (admitem că $\sigma_2 = 0$); atunci, din (4.4) se găseşte

$$\sigma_{13} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{4.16}$$

Înclinarea lui $\sigma_1 = \sigma_{max}$ faţă de axa Ox este determinată de unghiul α, iar

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{max} - \sigma_y} = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_{min}}. \tag{4.16'}$$

§ 4.2. Deformaţii

Deformaţia unui paralelipiped dreptunghic infinit mic (fig. 4.1) se reprezintă prin cele şase componente ale *tensorului deformaţiilor*

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & 0{,}5\gamma_{xy} & 0{,}5\gamma_{xz} \\ 0{,}5\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0{,}5\gamma_{yz} \\ 0{,}5\gamma_{zx} & 0{,}5\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}, \tag{4.17}$$

în care ε sînt alungirile specifice (fig. 4.4, *a*), iar γ sînt alunecările specifice (fig. 4.4, *b*). Tensorul (4.17), ca şi (4.1), este simetric, deoarece $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, şi $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$.

Invarianţii tensorului deformaţiilor se construiesc analog cu (4.3)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_I &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_v; \\ \varepsilon_{II} &= \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - 0{,}25(\gamma_{xy}^2 + \\ &+ \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1; \\ \varepsilon_{III} &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + 0{,}25\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \\ &- 0{,}25(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

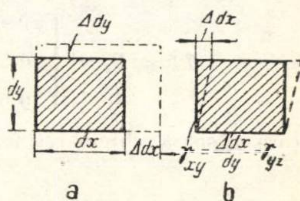


Fig. 4.4.

Aici ε_v este *deformaţia volumică specifică*, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ sînt *alungirile specifice principale*, determinate din ecuaţia

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^2\varepsilon_I + \varepsilon\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III} = 0. \tag{4.19}$$

Feţele unui cub, ale cărui muchii sînt orientate pe direcţiile ε_1, ε_2 şi ε_3, nu suferă deformaţii unghiulare. *Lunecările maxime* se determină cu formulele

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \tag{4.20}$$

şi ele au loc pe elementele de suprafaţă, care se obţin prin rotaţia cu $\pm 45°$ a două din cele trei perechi de feţe ale cubului direcţiilor principale, păstrînd fixă o a treia pereche.

În direcţia normală la suprafaţa octaedrică, *alungirea specifică* octaedrică este

$$\varepsilon_{oct} = \varepsilon_m = \varepsilon_0 : 3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) : 3, \tag{4.21}$$

iar lunecarea, numită *lunecare octaedrică*, este

$$\gamma_{oct} = \gamma_i = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 1{,}5\,(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \tag{4.22}$$

Intensitatea deformaţiei ε_i este proporţională cu γ_i

$$\varepsilon_i = \gamma_i / \sqrt{2}. \tag{4.23}$$

Tensorul deformaţiei (4.17) poate fi descompus în componente

a) *tensorul de volum* (sau sferic)

$$T^0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{Bmatrix}, \tag{4.24}$$

care măsoară *deformaţia izotropă* (schimbarea uniformă a volumului);

b) *tensorul deviator*

$$T_\varepsilon^\varphi = D_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & 0{,}5\gamma_{xy} & 0{,}5\gamma_{xz} \\ 0{,}5\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & 0{,}5\gamma_{yz} \\ 0{,}5\gamma_{zx} & 0{,}5\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{Bmatrix} \tag{4.25}$$

care măsoară schimbarea formei paralelipipedului.

§ 4.3. Legea lui Hooke

Ne vom limita la un corp elastic izotrop, care are două *module de elasticitate*, E şi G (tabela 4.1), legate între ele prin *coeficientul lui Poisson* μ

$$E = 2G\,(1 + \mu). \tag{4.26}$$

Tabela 4.1. **Modulele E și G (kg/cm²) și coeficientul lui Poisson μ**

Materiale	$E \cdot 10^6$	$G \cdot 10^5$	μ	
Oțel	1,9–2,2	7,8–8,2	0,25–0,35	Valorile mai mari
Cabluri de oțel	1,3–1,8	—	—	
Fontă (compresiune)	0,8–1,2	2,9–4	0,18–0,25	
Cupru	0,8–1,1*)	3,1–3,8	0,33	*) pentru cupru roșu
Alamă	1	3,6	0,36	
Bronz	0,9–1,2	3,2–4	0,32–0,4	
Aluminiu	0,65–0,75**)	2,5–2,7	0,33	**) pentru duraluminiu
Zinc laminat	0,85	3,2	0,31	
Celuloid	0,018	0,65	0,40	
Cauciuc	0,0001	0,005	0,46	
Sticlă	0,55–0,7	2,2–2,8	0,25	
Gheață	0,05–0,1	0,25–0,5	0,45	
Beton	0,15–0,4***)	0,7–1,7	0,1–0,15	***) cu marca mai mare de 400
Granit, marmură	0,35–0,5	1,5–1,9	0,2–0,3	
Zidărie de piatră (compresiune)	0,03–0,1	0,14–0,44	0,1–0,15	
Calcar dens	0,35	1,5	0,2	
Gresie	0,2	0,85	0,2	
Cărbune	0,05–0,08	0,22–0,36	0,12	
Lemn în lungul fibrelor	0,08–0,15****)	—	—	****) pentru roci rigide
Plută	0,00006	—	0	
Curea	0,005–0,02	—	—	

Cea mai simplă formă a *legii lui Hooke generalizate* este

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} : G, \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} : G, \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx} : G, \tag{4.27}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)}{E}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}, \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

sau, exprimînd tensiunile prin deformaţii

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \tag{4.29}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\,\varepsilon_m + \varepsilon_x\right) = \lambda\varepsilon_v + 2m\varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_v + 2m\varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda\varepsilon_v + 2m\varepsilon_z, \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

unde ε_v este deformaţia volumică iar λ şi m *constantele lui Lamé*

$$\lambda = 2G\,\frac{\mu}{1-2\mu} = E\,\frac{\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad m = G. \tag{4.31}$$

Din (4.30), prin adunare, se obţine *legea elasticităţii volumului*:

$$\sigma_0 = 3\sigma_m = E_0\varepsilon_0, \quad \sigma_m = E_0\varepsilon_m \tag{4.32}$$

unde *modulul de elasticitate cubic* este

$$E_0 = 3\lambda + 2m = \frac{E}{1-2\mu} \tag{4.33}$$

şi este cuprins între limitele E (pentru $\mu = 0$) pînă la ∞ (pentru $\mu = 0{,}5$).

Din (4.30), prin scădere, se obţine o altă formă a legii elasticităţii

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_y), \quad \sigma_y - \sigma_z = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_z), \\ \sigma_z - \sigma_x &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_x); \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

dacă se consideră şi (4.32), se găseşte

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_m), \quad \sigma_y - \sigma_m = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_m), \\ \sigma_z - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_m). \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

Legea lui Hooke se scrie, sub formă tensorială, astfel:

a) *legea de variaţie a volumului* [vezi (4.10), (4.24)]

$$T_\sigma^0 = E_0 T_\varepsilon^0; \tag{4.36}$$

aici fiecare componentă a tensorului din partea stîngă este, conform (4.32), de E_0 ori mai mare decît componenta respectivă a tensorului din partea dreaptă;

b) *legea de variaţie a formei* [vezi (4.11), (4.25)]:

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon. \tag{4.37}$$

Fiecare componentă a tensorului din partea stîngă este de $2G$ ori mai mare decît componenta respectivă a tensorului din dreapta.

Luînd în considerare formulele (4.9) şi (4.23) legea de variaţie a formei poate fi prezentată, de asemenea în forma

$$\sigma_i = E\varepsilon_i \quad \text{sau} \quad \tau_i = G\gamma_i, \tag{4.38}$$

unde în acest caz, în formula (4.26), se admite că $\mu = 0{,}5$ şi

$$G = E : 3. \tag{4.39}$$

Împărţind fiecare termen din (4.37) la a doua expresie (4.38), se obţine o egalitate între *tensorii directori ai tensiunilor* $\bar{D}_\sigma$ şi tensorii directori ai deformaţiilor D_ε

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_\varepsilon,$$

care constituie o altă formă de scriere a legii de variaţie a formei.

§ 4.4. Teoriile de rezistenţă

Pentru evaluarea rezistenţei unui element al corpului care se găseşte într-o stare de tensiune compusă, se folosesc diferite formule de calcul, stabilite în funcţie de criteriul de rezistenţă admis. *Efortul unitar echivalent* σ_{ech} se poate admite ca o fracţiune din *limita de curgere* (σ_c) sau din rezistenţa de rupere (σ_τ)

$$\sigma_{ech} \leqslant \frac{\sigma_c}{c_c} = \sigma_a, \quad \sigma_{ech} \leqslant \frac{\sigma_\tau}{c_\tau} = \sigma_a, \tag{4.40}$$

unde c este *coeficientul de siguranţă*, iar σ_a este *rezistenţa admisibilă* la întindere simplă; în teoriile simple, σ_{ech} se exprimă în funcţie de tensiunile principale $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ astfel:

a) După *teoria tensiunilor normale maxime*

$$\sigma_{ech_I} = \sigma_1 \leqslant \sigma_a. \tag{4.41}$$

Teoria aceasta aproape că nu se utilizează, din cauza nesiguranţei ei.

b) După *teoria deformaţiei maxime*

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ech_{II}} = \sigma_1 - \mu\,(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant \sigma_a, \\ \text{sau} \quad &\sigma_{ech_{II}} = [\sigma_3 - \mu\,(\sigma_2 + \sigma_1)] \leqslant \sigma_a. \end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

Teoria aceasta se foloseşte uneori la calculul pieselor din materiale casante sau la ruperea casantă a materialelor plastice.

c) După *teoria tensiunii tangenţiale maxime*

$$\sigma_{ech_{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant \sigma_a. \qquad (4.43)$$

Teoria aceasta se utilizează la calculul pieselor din materiale plastice; ea dă, de obicei, cele mai mari dimensiuni pentru piesele calculate.

d) După *teoria energiei potenţiale de deformaţie*

$$\sigma_{ech_{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leqslant \sigma_a. \qquad (4.44)$$

e) După *teoria energiei de schimbare a formei* [sau a tensiunilor tangenţiale octaedrice (4.8)]:

$$\sigma_{ech_V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leqslant \sigma_a. \qquad (4.45)$$

Ultimele două teorii sînt de preferat, faţă de celelalte, în cazul materialelor plastice; $\sigma_{ech_{IV}}$ se utilizează uneori, cînd $\sigma_m > 0$; mai des, şi fără această restricţie, se utilizează σ_{ech_V}, care este în acord cu datele experimentale.

Există teorii de rezistenţă, la baza cărora stă nu un singur criteriu, ci două (sau mai multe) de naturi diferite; ele se numesc, uneori, *teorii generalizate (combinate)*. În aceste teorii stările de tensiune, caracterizate prin tensiunile σ_{C_1} şi τ_{C_1} (sau σ_{C_2} şi τ_{C_2}), se consideră admisibile, din punct de vedere al rezistenţei, dacă punctele respective ale graficului din fig. 4.5 (C_1 şi C_2) sînt situate sub curba limită $C'AC''B$.

f) După *teoria de rezistenţă a lui Mohr*, curba limită se înlocuieşte uneori cu o dreaptă şi drept coordonate ale punctelor C' şi C'' se iau respectiv (pentru suprafeţe cu alunecări maxime)

$$\sigma_1 = \tau_1 = 0{,}5\,\sigma_{ac}, \quad \sigma_2 = \tau_2 = 0{,}5\,\sigma_{at}, \qquad (4.46)$$

unde σ_{ac} şi σ_{at} sînt rezistenţele admisibile la compresiune şi la întindere; în acest caz condiţia de rezistenţă ia forma

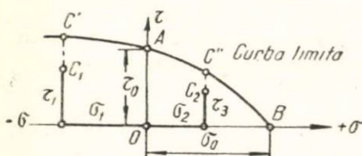


Fig. 4.5.

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{\tau}{\tau_0} = 1, \qquad (4.47)$$

unde σ (+ sau −), τ (totdeauna +) sînt tensiunile, care acţionează, iar

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{ac}\cdot\sigma_{at}}{\sigma_{ac} - \sigma_{at}}, \quad \tau_0 = \frac{\sigma_{ac}\cdot\sigma_{at}}{\sigma_{ac} + \sigma_{at}}. \qquad (4.48)$$

g) După *teoria de rezistenţă a lui I.N. Miroliubov* (anul 1953)

$$\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_{a\ oct}} + \frac{\tau_{oct}}{\tau_{a\ oct}} = 1; \qquad (4.49)$$

la numărător sînt tensiunile octaedrice care acţionează, (4.7) şi (4.8); la numitor sînt rezistenţele admisibile octaedrice care acţionează, (4.7) şi (4.8); la numitor sînt rezistenţele admisibile octaedrice, care se exprimă, în funcţie de σ_0 şi τ_0 (v. 4.48) în modul următor:

$$\sigma_{a\,oct} = \frac{2}{3}\sigma_0, \quad \tau_{a\,oct} = \frac{\sqrt{8}}{3}\tau_0. \tag{4.50}$$

În acest caz linia limită $C'AC''B$ (vezi fig. 4.5) se transformă într-o dreaptă. Cînd $\sigma_{ac} = \sigma_{at}$ formula (4.49) se transformă în (4.45).

h) După *teoria de rezistenţă a lui P.P. Balandin*

$$\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_{a\,oct}} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_{a\,oct}}\right)^2 + k^2\left(\frac{\tau_{oct}}{\tau_{a\,oct}}\right)^2} = 1. \tag{4.51}$$

Aici notaţiile sînt aceleaşi ca la teoria de la punctul g), cu $k = 2\frac{\sigma_{ac}\sigma_{at}}{\sigma_{ac}+\sigma_{at}}$; cînd $\sigma_{ac} = \sigma_{at}$, teoria de la punctul g) este echivalentă cu teoria de la punctul e).

§ 4.5. Concentrarea tensiunilor şi rezistenţa la oboseală

Atunci cînd într-o bară *întinsă* există găuri (fig. 4.6), tensiunea maximă σ_{max} se determină cu formula

$$\sigma_{max} = \alpha_k\sigma_0, \tag{4.52}$$

unde $\sigma_0 = N : 2b\delta$ este tensiunea nominală; α_k este *coeficientul de concentrare*, care depinde de dimensiunea găurii t şi de raza de curbură ρ

$$\alpha_k \approx 1 + 2\sqrt{\frac{t}{\rho}}. \tag{4.53}$$

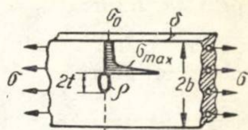


Fig. 4.6.

Formula (4.53) este corectă dacă $b \gg t$; în caz contrar, α_k creşte, iar la variaţia lui $t : b = \lambda$ de la 0 pînă la 0,5 şi pentru $t = \rho$ trebuie luat

$$\alpha_k \approx 3(1 + 1{,}7\lambda^2). \tag{4.54}$$

În cazul unor gîtuiri adînci (fig. 4.7) formula (4.52) rămîne valabilă. Se ia $\sigma_0 = N : 2a\delta$, iar coeficientul de concentrare este

$$\alpha_k \approx 1 + 0{,}4\frac{a}{\rho} - 0{,}006\frac{a^2}{\rho^2}. \tag{4.55}$$

Dacă se execută o racordare pentru trecerea lină de la o grosime la alta (fig. 4.8) şi dacă $t : \rho > 1$

$$\alpha_k \approx 1{,}6 + 0{,}08\frac{t}{\rho}\left(1 + 0{,}08\frac{a}{\rho}\right). \tag{4.55'}$$

Coeficienții α_k din formulele (4.52 ... 4.55') sînt teoretici; coeficienții efectivi (reali), β_k se determină cu formula

$$\beta_k = 1 + q(\alpha_k - 1), \tag{4.56}$$

unde q este *coeficientul de sensibilitate al materialului*, cuprins între limitele 0 și 1; pentru oțeluri $q \approx 0{,}5 \ldots 0{,}8$; valorile mai mari se referă la oțeluri foarte rezistente și cu granulație mică; pentru metale neferoase, q este mai apropiat de 0,5.

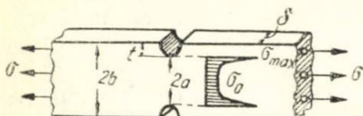


Fig. 4.7.

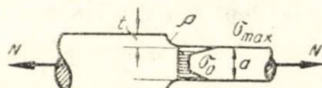


Fig. 4.8.

La *încovoiere*, coeficientul α_k dat de formula (4.55) trebuie micșorat cu aproximativ 20%. La *torsiune* valorile din formula (4.55) se reduc cu 25%. (Relații mai detaliate se găsesc în indicatoare speciale).

Acțiunea *sarcinilor variabile* repetată de multe ori, aduce după sine reducerea sensibilă a caracteristicilor de rezistență; această reducere depinde de coeficientul de asimetrie al solicitării ciclice (fig. 4.9).

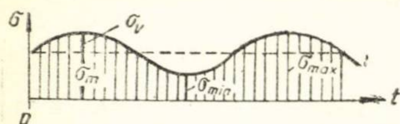


Fig. 4.9.

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \tag{4.57}$$

Cea mai periculoasă este solicitarea simetrică, cu $R = -1$. În acest caz *rezistența la oboseală*, σ_{-1}, determinată pentru epruveta încercată la încovoiere, este

$$\sigma_{-1} \approx 0{,}4\ \sigma_r,$$

pentru întindere

$$\sigma_{-1t} \approx 0{,}28\ \sigma_r,$$

pentru răsucire

$$\tau_{-1} \approx 0{,}22\ \sigma_r,$$

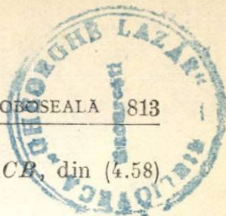
unde σ_r este rezistența statică la rupere (vezi capitolul 4.2) corespunzătoare la $R = +1$.

Pentru valorile intermediare ale lui R, între $+1$ și -1, limita de oboseală se determină cu ajutorul unui grafic special (fig. 4.10) ca ordonata punctului oarecare C

$$\sigma_R = \sigma_m + \sigma_v, \tag{4.58}$$

unde tensiunea medie σ_m a ciclului și amplitudinea σ_v a ciclului sînt respectiv egale cu (fig. 4.9)

$$\sigma_m = 0{,}5\,(\sigma_{max} + \sigma_{min}), \quad \sigma_v = 0{,}5\,(\sigma_{max} - \sigma_{min}). \tag{4.59}$$



La schematizarea printr-o linie dreaptă a curbei ACB, din (4.58) se găseşte că

$$\sigma_R = \sigma_{-1} + \sigma_m \left(1 - \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_r}\right), \quad \sigma_v = \sigma_{-1}\left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_r}\right). \tag{4.60}$$

În ipoteza unei curbe parabolice, se obţine

$$\sigma_v = \sigma_{-1}\left(1 - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_r^2}\right). \tag{4.61}$$

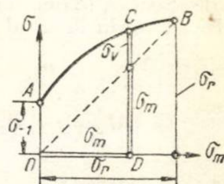


Fig. 4.10.

Trecerea la rezistenţa admisibilă se efectuează în acest caz prin împărţirea ordonatelor extreme ale graficului, reprezentat în fig. 4.10, astfel: ordonata iniţială se împarte la coeficientul de siguranţă c şi la coeficientul de concentrare β_k iar ordonata finală (σ_r) se împarte de obicei numai la c. Atunci rezistenţa admisibilă a ciclului cu coeficient R poate fi reprezentată în funcţie de rezistenţa admisibilă statică $\sigma_a = \sigma_r : c_1$ prin relaţia

$$\sigma_{a_R} = \sigma_a \cdot \varphi_R, \tag{4.62}$$

unde coeficientul de reducere al rezistenţei admisibile este

$$\varphi_R = \frac{1 + \dfrac{\sigma_v}{\sigma_m}}{1 + \dfrac{\sigma_v}{\sigma_m} \cdot \dfrac{\sigma_a}{\sigma_{-1a}}} \tag{4.63}$$

şi depinde de rezistenţa admisibilă la ciclu simetric

$$\sigma_{-1a} = \sigma_{-1} : c \cdot \beta_k.$$

La o viteză mare de încărcare a epruvetei, care depăşeşte pe cea atinsă de obicei în laboratoarele de încercări mecanice (v. § 4.8) de zeci şi sute de mii de ori, se observă un fenomen de creştere a caracteristicilor mecanice. Una din formulele propuse este

$$\sigma_1 = \sigma_0 + m \lg \frac{v_1}{v_0}. \tag{4.64}$$

Aici σ_1 şi σ_0 sînt caracteristicile, care corespund vitezelor v_1 şi v_0; m este un coeficient experimental, care pentru oţeluri cu rezistenţa de rupere $\sigma_r < 110$ kgf/mm² se recomandă (orientativ) să fie: $m = 1{,}5$ ... ... 2,5 kgf/mm² pentru determinarea rezistenţei de rupere; $m =$ $= 2{,}5$ ... 4 kgf/mm² pentru determinarea limitei de elasticitate.

Oţelurile care au $\sigma_r > 110$ kgf/mm² nu manifestă creşterea caracteristicilor mecanice cu viteza de încercare.

§ 4.6. Forțe interioare în bare și plăci

În cazul general al barei încărcate spațial (fig. 4.11), într-o secțiune oarecare $I - I$ se manifestă acțiunea a șase componente ale forței interioare: forța axială N_x, două forțe tăietoare, T_y și T_z, două momente încovoietoare M_y și M_z și un moment de răsucire M_x. Toate componentele se determină prin *metoda secțiunilor* cu ajutorul celor șase ecuații ale staticii, în funcție de forțele exterioare situate de o parte a secțiunii. De exemplu în cazul indicat în fig. 4.11

$$N_x = P_2, \quad T_y = - P_3, \quad T_z = P_1, \quad M_y = - P_1 x,$$

$$M_z = - P_2(a - b) + P_3 x, \quad M_x = - P_1 a.$$

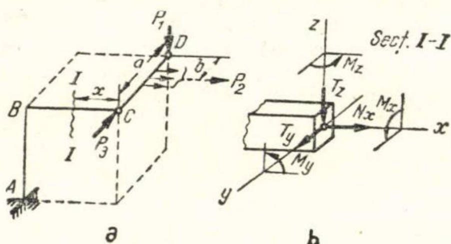


Fig. 4.11.

(Semnele pentru secțiunea $I - I$ sînt în conformitate cu sensurile pozitive de pe figura 4.11, *b*). Forțele se măsoară în kgf, momentele în kgf · cm.

Componentele forțelor interioare dintr-o placă (în secțiunea perpendiculară pe axa Ox) sînt indicate în fig. 4.12; se admite ca mărimile lor să fie raportate la unitatea dimensiunii respective (hașurată), de aceea forțele au unitatea de măsură kgf/cm iar momentele kgf · cm/cm, adică kgf. În fig. 4.12 sînt indicate: N_x, T_x și M_x (forța axială, forța tăietoare și momentul încovoietor) care solicită o fîșie unitate a plăcii de-a lungul axei Oy; N_{yx} și M_{yx} sînt forța tăietoare paralelă cu Oy și respectiv momentul de răsucire care acționează asupra aceleiași fîșii.

Fig. 4.12.

În mod analog (tot prin metoda secțiunilor) se pun în evidență forțele interioare care acționează perpendicular pe axa Oy; ele vor fi N_y, T_y, M_y, N_{xy} și M_{xy}.

Bibliografie. 1. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, Гостехиздат, 1958. 2. Филоненко-Бородич М. М., Курс сопротивления материалов, Гостехиздат, 1955.

4.2

Întinderea și compresiunea barelor

§ 4.7. Formule fundamentale

La întinderea centrică a barei (fig. 4.13) de către o forță axială N, într-o secțiune oarecare $I-I$ tensiunea normală σ determinată de formula

$$\sigma = N/F, \tag{4.65}$$

trebuie să satisfacă condiția de rezistență

$$\frac{N}{A} \leqslant \sigma_a \tag{4.66}$$

unde A este aria secțiunii transversale.

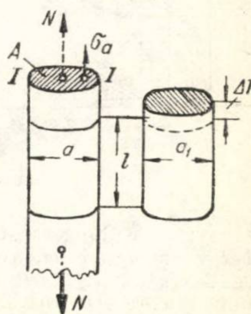


Fig. 4.13.

Formulele (4.65) și (4.66) rămîn valabile și în cazul compresiunii; trebuie precizată numai mărimea lui σ_a (vezi capitolul 4.7). În cazul acțiunii locale a forței (strivire, fenomene de contact), tensiunile în punctul de contact și în apropierea lui nu se consideră uniform distribuite (vezi capitolul 9 din cartea *Беляев Н. М.*, Сопротивление материалов, 1958). O porțiune oarecare din bară (fig. 4.13), de lungime l, își schimbă dimensiunile sale în modul următor: alungirea Δl și alungirea specifică ε sînt

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \tag{4.67}$$

unde E este modulul de elasticitate (vezi tabela 4.1); deformația transversală totală Δa și cea relativă ε_1 sînt

$$\Delta a = a_1 - a, \qquad \varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a} = -\mu\varepsilon, \tag{4.68}$$

unde μ este coeficientul lui Poisson (tabela 4.1). Dacă N sau A (sau ambele) sînt variabile în lungul barei, atunci

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_x \mathrm{d}x}{EA_x}. \tag{4.69}$$

Legea lui Hooke la întindere și compresiune este

$$\sigma = E\,\varepsilon. \tag{4.70}$$

§ 4.8. Curba caracteristică de întindere. Caracteristici mecanice

Făcînd încercarea la întindere cu viteză mică (de ordinul 0,01% pe secundă) a unei epruvete din oţel cu conţinut redus de carbon, aparatul indicator al maşinii de încercat înregistrează o diagramă de forma celei din fig. 4.14, unde pe ordonată se măsoară tensiunile normale ($\sigma = N/A$), A fiind aria iniţială a secţiunii, iar pe abscisă alungirile specifice ($\varepsilon = \Delta l/l$). Fiecare material are curba caracteristică proprie de întindere, mai mult sau mai puţin diferită de cea indicată în fig. 4.14.

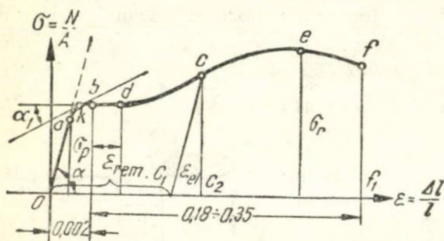


Fig. 4.14.

Anumite ordonate caracteristice ale diagramei au următoarele numiri: *rezistenţa de rupere* σ_r cea mai mare tensiune la care începe să se formeze o gîtuire (sau se rupe epruveta, dacă este din material casant); *limita de curgere* σ_c tensiunea la care epruveta se lungeşte fără creşterea sarcinii; dacă nu se observă un *palier de curgere bd*, alungirea specifică corespunzătoare lui σ_c se ia egală cu 0,2%; *limita de proporţionalitate* σ_p cea mai mare tensiune pînă la care este valabilă legea lui Hooke; ea diferă puţin de limita de elasticitate σ_e — cea mai mare tensiune, pînă la care există numai deformaţii elastice (ea se defineşte de obicei prin deformaţia remanentă corespunzătoare, de exemplu pentru oţel 0,02%).

În prima porţiune a diagramei (dreapta *Oa*) coeficientul unghiular $\operatorname{tg}\alpha = \text{const}$, la scara diagramei, dă mărimea modulului de elasticitate $E = \text{const}$. Pe celelalte porţiuni modulul de elasticitate variabil poate fi evaluat în mod analog; de exemplu, pentru punctul k, avem $\operatorname{tg}\alpha_1 = E_1 = \dfrac{d\sigma}{d\varepsilon}$. Uneori este convenabil să se utilizeze nu *modulul de elasticitate* E_1 *dat de tangentă*, ci *modulul secant* (fig. 4.15) $E' = \operatorname{tg}\alpha' = \sigma/\varepsilon$, întrucît modulul de elasticitate este $E = (\sigma + \Delta\sigma) : \varepsilon$, atunci împărţind E' prin E, se găseşte

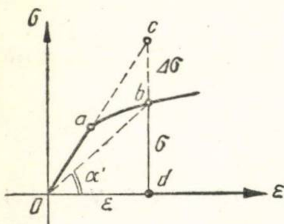


Fig. 4.15.

$$\sigma : \varepsilon = E' = E(1 - \omega), \quad \omega = \frac{\Delta\sigma}{\sigma + \Delta\sigma}. \quad (4.71)$$

Caracteristicile mecanice ale unor materiale sînt indicate în tabela 4.2. Dacă procesul de încărcare al barei se opreşte (punctul *c* în fig. 4.14) şi epruveta este descărcată, graficul descărcării va fi de obicei dreapta cc_1 paralelă cu dreapta *Oa*; în acest caz $Oc_1 = \varepsilon_{rem}$ este *deformaţia remanentă*, iar $c_1c_2 = \varepsilon_{el}$ este *deformaţia elastică*.

Tabela 4.2 **Caracteristicile mecanice ale unor materiale la $t = 20°C$**

Materiale	Limite [kgf/mm²]			% alungiri la rupere	Felul solicitării de încercare
	de proporționalitate	de curgere	rezistența de rupere		
Oțel 3	19–21	23	38–45	21	Oricare
Oțel 30	22–24	28	48–60	22	Oricare
Oțel 50	30–32	34	63–80	16	Oricare
Oțel de arc pentru cabluri	70–90	90-120	120–170	16	Oricare
Fontă cenușie	3,5–4,5	—	12–21	0,25	Întindere
Fontă cenușie	10–15	—	50–100		Compresiune
Cupru în foi	5	7	21	50	Întindere
Alamă	5–9	7–12	20–35	20–40	Întindere
Bronz	—	—	—	—	Întindere
Duraluminiu	18–20	24	37		Oricare
Celuloid	—	—	5–7	—	Întindere
Cauciuc	0,2–0,4	—	0,4–0,9	—	Compresiune
Sticlă[1])	4–10	—	8–20	—	Compresiune
Granit[1])	3–10	—	4–24	—	Compresiune
Gresie[1])	2–8	—	4–20	—	Compresiune
Zidărie de piatră	0,2–0,6	—	0,35–2	—	Compresiune
Beton[1])	0,25–2,5	—	0,50–5	—	Compresiune
Pin în lungul fibrelor	2,5	—	4	—	Compresiune
idem	3	—	8	—	Întindere

[1]) La întindere, limitele sînt de 8–12 ori mai mici.

Repetarea încărcării epruvetei după descărcare, are loc pe dreapta c_1c, după care se parcurge apoi curba *cef*; cu alte cuvinte, are loc o întărire (o creştere a calităţilor elastice). În legătură cu fenomenul de hysterezis la încărcări repetate, a se consulta literatura.

Suprafaţa elementară de sub curba caracteristică, $\sigma d\varepsilon$, determină mărimea *lucrului mecanic elementar*; în limitele elastice (dreapta *Oa*) lucrul mecanic de deformaţie pe unitatea de volum, W_1, corespunzător deformaţiei de la 0 pînă la ε, este

$$W_1 = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}. \tag{4.72}$$

Lucrul mecanic de deformaţie al întregii bare de lungime l, cînd N şi A sînt constante, este

$$W = \int_0^l \frac{\sigma^2}{2E} A \mathrm{d}l = \frac{N^2 l}{2EA}. \tag{4.73}$$

Energia specifică, cheltuită pentru deformarea corpului pînă la rupere este

$$W_{1r} = \eta \sigma_r \varepsilon_r, \tag{4.74}$$

unde *coeficientul de plenitudine al diagramei*, η, este cuprins între limitele 0,75 ... 0,90.

În tabela 4.3. sînt date valorile mărimilor care caracterizează unele materiale din punct de vedere al cantităţii energiei potenţiale, pe care o pot recepţiona pe unitate de greutate la deformarea lor pînă la limitele elastice.

Radiaţiile radioactive au asupra metalelor o acţiune asemănătoare cu întărirea. La metale, la anumite doze de radiaţii rezistenţa creşte, iar plasticitatea scade.

Tabela 4.3. **Lucrul mecanic elastic pe unitatea de greutate**

Materialul	Greutatea specifică γ [gf/cm³]	Limita de proporţionalitate σ_p [kgf/mm²]	Lucrul mecanic specific W_1 [kgf·cm/cm³]	$W_1 : \gamma$ [kgf·cm/kg]
Oţel 3	7,8	21	1	140
Oţel de arc	7,8	80	15	1950
Aluminiu	2,5	20	2,9	1140
Pin	0,8	2,5	0,30	390
Cauciuc	0,95	0,4	8	8400

Variația caracteristicilor mecanice ale materialelor cu creșterea temperaturii este redată în tabela 4.4.; datele sînt orientative, deoarece de obicei la $t > 250°$ starea de tensiune și de deformație nu este stabilă, ci are loc o variație cu timpul.

Tabela 4.4. **Caracteristici mecanice la temperaturi ridicate [kgf/mm²]**

Materiale	$t = 20°C$			$t = 250°C$			$t = 750°C$		
	$E:100$	σ_c	σ_r	$E:100$	σ_c	σ_r	$E:100$	σ_c	σ_r
Oțel 3	205	22	42	200	18	45	130	12	28
Oțel refractar	215	40	65	210	42	68	150	30	40
Duraluminiu	7,4	24	37	7	20	32	3	8	12
Cupru	10	7	21	8	5	15	2	2	6

§ 4.9. Rezistențe admisibile. Coeficient de siguranță[1]. Metode de calcul

Se deosebesc următoarele metode de calcul: a) după rezistențele admisibile; b) după capacitatea portantă; c) după starea limită.

Rezistențele admisibile σ_a și τ_a pot fi calculate după următoarele formule:

pentru sarcini statice

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_r \alpha_k} \text{ sau } \sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_c \alpha_k}, \tag{4.75}$$

unde c și α_k sînt respectiv coeficienții de siguranță și de concentrare a tensiunilor (vezi § 4.5); în cazul materialelor plastice, $\alpha_k \approx 1$;

pentru sarcini variabile ciclice [vezi § 4.4. formula (4.62)]

$$\sigma_{ar} = \sigma_a \cdot \varphi, \tag{4.76}$$

[1]) Vezi capitolul IX al lucrării «Основы современных методов разчета на прочность в машиностроении» sub red., С.Д. Пономариов, 1952; capitolul XIII din «Курс сопротивления материалов» vol. 1, 2 sub red. М.М. Филоненко — Бородич, 1955—1956.

unde σ_a se determină cu formula (4.75), pentru $\alpha_k = 1$; coeficientul de reducere este

$$\varphi = \frac{1 + \frac{\sigma_v}{\sigma_m}}{1 + \frac{\sigma_v}{\sigma_m} \cdot \frac{\sigma_c}{\sigma'_{-1}}}, \tag{4.77}$$

unde σ'_{-1} este rezistenţa la oboseală corectată

$$\sigma'_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\beta_k \cdot \varepsilon} \tag{4.78}$$

în care β_k este coeficientul efectiv de concentrare (vezi § 4.5), iar ε este un coeficient care ţine seama de următorii factori: de dimensiunile piesei — ε_d (factor de scară), de starea suprafeţei — ε_s, de prezenţa coroziunii — ε_{cor} şi de alţi factori ε_{al}; ε se determină cu formula

$$\varepsilon = \varepsilon_d \cdot \varepsilon_s \cdot \varepsilon_{cor} \cdot \varepsilon_{al}. \tag{4.79}$$

Valori orientative ale coeficienţilor ε pot fi calculate, utilizînd expresiile (4.80) ... (4.82)

$$\frac{1}{\varepsilon_d} \approx 1 - \frac{d - 10}{2d_0 - 20}, \tag{4.80}$$

unde d este diametrul piesei [mm] $10 \leqslant d \leqslant d_0$, iar $d_0 = 200$ mm pentru oţeluri-carbon fără concentrări de tensiuni; $d_0 = 100$ mm pentru oţeluri aliate cu concentratori; $d_0 = 30$ mm pentru oţeluri aliate cu concentratori puternici;

$$\frac{1}{\varepsilon_s} = a - \frac{\sigma_r - 30}{100}(b - a), \tag{4.81}$$

unde σ_r este rezistenţa de rupere (kgf/mm^2); coeficienţii a şi b se iau din tabela 4.5; în aceeaşi tabelă sînt redaţi coeficienţii a_1 şi b_1 pentru formula

$$1/\varepsilon_s\, \varepsilon_{cor} = a_1 - \frac{\sigma_r - 30}{100}(b_1 - a_1). \tag{4.82}$$

Valorile fără paranteze se referă la coroziunea în apă dulce, iar cele din paranteze la coroziunea în apă de mare.

Tabela 4.5. **Coeficienții a, a_1 și b, b_1 pentru formulele (4.81)–(4.82).**

	Șlefuire	Lustruire	Strunjire	Rabotare	Neprelucrat
a	1	1,1	0,97	0,92	0,82
b	1	1,15	0,80	0,52	0,30
a_1	—	—	—	—	0,64 (0,48)
b_1	—	—	—	—	0,18 (0,16)

Coeficienții de siguranță (c_r sau c_c) sînt stabiliți fie de normele de proiectare, fie din condițiile generale de lucru și de cerințele tehnico-economice ale construcției; trebuie luate în considerație eventuala supraîncărcare, stabilitatea proprietăților materialului, abaterile de la schema de calcul, durata de funcționare a construcției.

Coeficienții c_c sînt situați între limitele 1,4 ... 2,5; coeficienții c_r între limitele 2 ... 10 în funcție de material, de construcție și de condițiile de lucru. În cazul acțiunii dinamice a sarcinilor, aceste mărimi se reduc suplimentar cu așa numitul *coeficient dinamic* (capitolul 4.11).

În tabelele 4.6 ... 4.19 se dau unele indicațiuni din standarde.

Calculul după capacitatea portantă (sau, *după stadiul de rupere)* se reduce la utilizarea relației dintre forța admisibilă P_a (sau momentul admisibil M_a) și forța P_r (sau momentul M_r) corespunzătoare stadiului de rupere, sub forma

$$P_a \cdot c = P_r, \quad (4.83)$$

$$M_a \cdot c = M_r \quad (4.84)$$

unde c este coeficientul de siguranță.

În cazul unui sistem static determinat, forța (sau momentul de rupere) se găsește din condiția, ca o secțiune (sau o bară) să treacă în stadiul de rupere; în cazul unui sistem de n ori static nedeterminat, este necesar ca stadiul de rupere să se realizeze în $(n + 1)$ secțiuni (sau bare). În cazul cel mai simplu (la el ne limităm aici) trecerea secțiunii în stadiul de rupere este însoțită de apariția în întreaga secțiune a tensiunilor σ_c(sau τ_c) (vezi tabela 4.2) sau $\sigma_r(\tau_r)$.

Valorile orientative ale coeficienților c pentru unele materiale sînt indicate în tabelele 4.15 și 4.16. În lipsa unor date normate pentru c, acesta se determină aproximativ după formula (4.75).

Rezistențe admisibile la materiale

Felul rezistenței

Materialul	Caracteristicile materialului: Rezistența de rupere σ_r $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$	Lungirea la rupere δ [%]	Tracțiune σ_{at} $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$: I Solicitare statică $c=\frac{\sigma_r}{\sigma_a}$	I Solicitare statică σ_a	II Solicitare pulsatoare σ_a	III Solicitare simetrică σ_a	Compresiune σ_{ac} $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$: I Solicitare statică σ_a	II Solicitare pulsatoare σ_a	Presiuni pe suprafețe care nu alunecă $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$: I Solicitare statică p	II Solicitare pulsatoare p	III Solicitare simetrică p
Oțel de rezistență mică	3 500–5 000	25–15	4–3	900–1 500	600–1 000	300–500	900–1 500	600–1 000	800–1 000	530 – 670	270–330
Oțel (OL 60)	5 000–7 000	20–10	4	1 200–1 800	800–1 200	400–600	1 200–1 800	800–1 200	1 000–1 500	700–1 000	350–500
Oțel călit									1 500–1 800	900–1 200	400–600
Oțel de arc, călit											
Oțel cu nichel	4 500–6 000	20–16	4–3	1 200–1 800	800–1 200	400–600	1 200–1 800	800–1 200	1 000–1 500	700–1 000	350–500
Oțel turnat	3 600–6 000	20–10	6–5	600–1 200	400 – 800	200–400	900–1 500	600–1 000	800–1 000	530 – 670	270–330
Fontă brută	2 800–3 600 la încovoiere										
			5–4,5	300 – 350	200 – 230	100–120	900–1 000	600 – 660			
Fontă prelucrată	1 350–1 750								700 – 800	470 – 530	230–270
Aramă laminată	2 000–2 700	35–25	5–4	400 – 540	270 – 360	130–180	400 – 540	270 – 360	350 – 500	230 – 330	120–170
Plumb									20 – 50		
Aliaje de aluminiu	900–1 200	3	10–8	100 – 120	70 – 80	30– 40					
Bronz cu Sn, turnat	2 000–2 500	20– 6	6–5	400 – 500	270 – 330	130–170	400 – 500	270 – 330	300 – 400	200 – 270	100–130
Bronz fosforos	3 000–4 500	25–10	6–5	600 – 900	400 – 600	200–300	600 – 900	400 – 600	500 – 750	330 – 500	170–250
Alamă laminată	2 000–3 000	30–20	5	400 – 600	270 – 400	130–200	400 – 600	270 – 400	300 – 450	270 – 300	130–150

Tabela 4.0

din construcția mașinilor

admisibile

Încovoiere σ_{ai} $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$				Forfecare τ_{af} $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$				Răsucire τ_{at} $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$			
I Solicitare statică		II Solicitare pulsatoare	III Solicitare simetrică	I Solicitare statică		II Solicitare pulsatoare	III Solicitare simetrică	I Solicitare statică		II Solicitare pulsatoare	III Solicitare simetrică
$c = \frac{\sigma_r}{\sigma_a}$	σ_a	σ_a	σ_a	$c = \frac{\tau_r}{\tau_a}$	τ_a	τ_a	τ_a	$c = \frac{\tau_r}{\tau_a}$	τ_a	τ_a	τ_a
	900–1 500	600–1 000	300–500	4–3	720–1 200	480–800	240–400		600–1 200	400–800	200–400
	1 200–1 800	800–1 200	400–600	4	960–1 440	640–960	320–480		900–1 440	600–960	300–480
	7 500	5 000						2	6 000	4 000	
	1 200–1 800	800–1 200	400–600	4	960–1 440	640–960	320–480		900–1 440	600–960	300–480
	900–1 200	600 – 800	300–400	4–3,5	720–950	480–640	240–320		360–480	240–320	120–160
6	460 – 600	310 – 400	150–200								
7,5	370 – 480	250 – 320	120–160					5	270–350	180–230	90–120
9	310 – 400	210 – 270	100–130		300–350	200–230	100–120	6	220–290	150–190	70–100
5	560 – 720	370 – 480	190–240					3,5	380–500	250–330	130–160
6	460 – 600	310 – 400	150–200					3,2	420–550	280–370	40–180
7	400 – 510	270 – 340	130–170								
	400 – 540	270 – 360	130–180								
	150 – 200	100 – 130	50–70								
	400 – 500	270 – 330	130–170						300–400	200–270	100–130
	600 – 900	400 – 600	200–300		450–700	300–470	150–230		450–700	300–470	150–230
	400 – 600	270 – 400	130–200		320–480	210–320	110–160		320–480	210–320	110–160

T a b e l a 4.7. **Rezistenţele admisibile pentru elemente de construcţie din OL 38 şi OL 52**[1]

Elemente de construcţii	Felul solicitării sau al rezistenţei	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{at}}$[2] sau $\frac{\tau_a}{\tau_{at}}$	OL 38 Rezistenţe admisibile [kgf/cm²] Ipoteza de încărcare I	OL 38 II	OL 52 σ_a sau τ_a [kgf/cm²] Ipoteza de încărcare I	OL 52 II
Civile şi industriale	Întindere σ_{at}	1	1 400	1 600	2 100	2 400
	Compresiune σ_{ac}	1	1 400	1 600	2 100	2 400
	Încovoiere σ_{ai}	1	1 400	1 600	2 100	2 400
Civile şi industriale	Alunecare τ_a	0,8	1 120	1 280	1 680	1 920
	Alunecare în inimă τ_i	0,6	840	960	1 260	1 440
Buloane pentru ancoraj şi tiranţi	Întindere σ_{at}		1 000	1 200	1 500	1 700
De solidarizare (plăcuţe, zăbreluţe)[3]	Intindere σ_{at} Compresiune σ_{ac} Încovoiere σ_i	0,8	1 120	1 280		
Piese de reazem	Presiunea în punctul sau pe linia de contact		6 500	7 500	1 680	1 920
Din şine vechi de cale ferată			1 200	1 200	9 750	11 250

[1]) Ipoteza I de încărcare corespunde acţiunii simultane, celei mai defavorabile, datorită sarcinilor fundamentale: sarcini permanente, sarcini utile inclusiv greutatea zăpezii, sarcini accesorii. Ipoteza II de încărcare corespunde acţiunii celei mai defavorabile din ipoteza I plus sarcinile accidentale (presiunea vîntului, variaţii de temperatură etc.).

[2]) σ_a este una din valorile σ_{ac}, σ_{at}, σ_{ai} pentru elementul solicitat.

[3]) La flambajul barelor compuse cînd $e>h$, în care e este distanţa dintre centrele de greutate ale elementelor şi h înălţimea secţiunii.

Tabela 4.8. Rezistențele admisibile pentru mijloace de îmbinare ale pieselor de oțel[1])

Felul îmbinării	Mijloace de îmbinare	Felul solicitării	Simbolul	$\frac{\sigma_a}{\sigma_t}$ sau $\frac{\tau_a}{\tau_t}$	σ_a sau τ_a kgf/cm² Ipoteza de încărcare I	II	Caracteristici
Îmbinări nituite	Nituri de rezistență	Forfecare	τ_a	0,8	1 120	1 280	Nituri din OL 34
		Presiune pe gaură	σ_{ag}	2	2 800	3 200	
		Întindere în tijă	σ_{at}	0,3	420	480	
Îmbinări cu șuruburi (buloane)	Șuruburi păsuite	Forfecare	τ_a	0,8	1 120	1 280	Șuruburi din OL 38
		Presiune pe gaură	σ_{ag}	2	2 800	3 200	
		Întindere în tijă	σ_{at}	—	1 000	1 100	
	Șuruburi brute	Forfecare	τ_a	0,7	980	1 120	
		Presiune pe gaură	σ_{ag}	—	1 600	1 800	
		Întindere în tijă	σ_{at}	—	1 000	1 100	
	Buloane pentru ancoraj și tiranți	Întindere	σ_{at}	—	1 000	1 200	
Îmbinări sudate	Felul sudurii	Natura rezistențelor		$\frac{\sigma_{as}}{\sigma_a}$	σ_{as} kgf/cm² I	II	
	Sudură cap la cap[2])	Întindere		0,80	1 120	1 280	Piese din OL 38
		Compresiune		1,00	1 400	1 600	
		Încovoiere		0,85	1 190	1 360	
		Forfecare		0,65	910	1 040	
	De colț	Orice fel de rezistență		0,65	910	1 040	

Observație. Rezistențele admisibile pentru sudurile peste cap se reduc cu 25%.

1) Ipoteza I de încărcare corespunde acțiunii simultane, celei mai defavorabile, datorită sarcinilor fundamentale: sarcini permanente, sarcini utile inclusiv greutatea zăpezii, sarcini accesorii.

Ipoteza II de încărcare corespunde acțiunii celei mai defavorabile din ipoteza I plus sarcinile accidentale (presiunea vîntului, variații de temperatură etc.).

2) Numită și „cusătură în capete".

Tabela 4.9. **Construcţii de lemn. Rezistenţe admisibile pentru brad**

Nr. curent	Rezistenţe admisibile	Simbolul	Rezistenţe admisibile [kgf/cm²] Construcţii definitive	Construcţii provizorii auxiliare
1	Încovoiere	σ_{ai}	100	120
2	Întindere în lungul fibrelor......	σ_{at}	70	85
3	Compresiune în lungul fibrelor ..	σ_{ac}	100	120
4	Strivire în lungul fibrelor (fig. 1)..	σ_{as}	100	120
5	Compresiune normal pe fibre....	$\sigma_{ac\perp}$	15	18
6	Strivire normal pe fibre ($\sigma_{as\perp}$):			
	— cînd $0 < a < h$ sau $a < 10$ cm (fig. 2 şi 3)................; — în chertări laterale (fig. 6)....	$\sigma'_{as\perp}$	15	18
	— cînd $a \geqslant h$ sau $a \geqslant 10$ cm (fig. 4 şi 5) ....; — la îmbinări cu pene, avînd fibrele normal pe fibrele elementelor îmbinate (fig. 7)........; — în chertări frontale (fig. 8)....; — pe suprafeţele de reazem ale construcţiilor de lemn (fig. 9)..	$\sigma''_{as\perp}$	25	30
7	Strivire sub şaibe (rondele), pentru unghiuri de strivire între 60 şi 90° cu direcţia fibrelor......	σ_{ar}	35	40
8	Forfecare în lungul fibrelor, provenind din încovoiere........	τ_{at}	20	24
9	Forfecare (valoarea medie):			
	a) la îmbinări cu praguri, cu respectarea condiţiei ca lungimea de forfecare luată în calcul (fig. 10) $l_{forf} \leqslant 10\,hp$ sau $2h$ ..	τ_a	10	12
	b) la pene prismatice în planul fibrelor:			
	— în lungul fibrelor (fig. 11)..	τ_a	10	12
	— transversal fibrelor (fig. 7)..	τ'_a	5	6
10	Forfecare (valoarea medie) în lungul fibrelor la chertări laterale, cu respectarea condiţiei ca lungimea de forfecare în calcul (fig. 13) $l_{forf} \leqslant 5b$:			
	— la unghiul de îmbinare a pieselor $\alpha < 30°$	$\tau_{a\alpha}$	5	6
	— la unghiul de îmbinare a pieselor $\alpha \geqslant 30°$	$\tau'_{a\alpha}$	3	4
11	Forfecare în plan normal pe fibre (valoarea medie) (fig. 12)	$\tau_{a\perp}$	45	55


Fig. 1

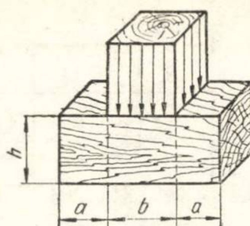


Fig. 2

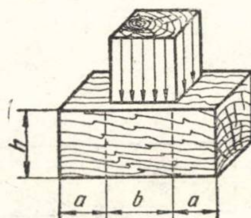


Fig. 3

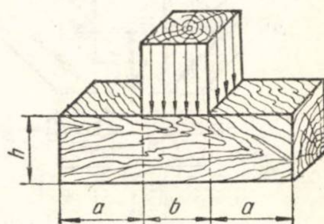


Fig. 4

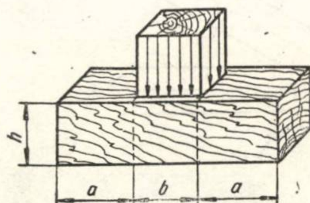


Fig. 5

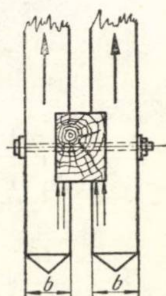


Fig. 6

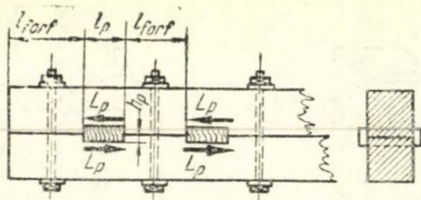


Fig. 7

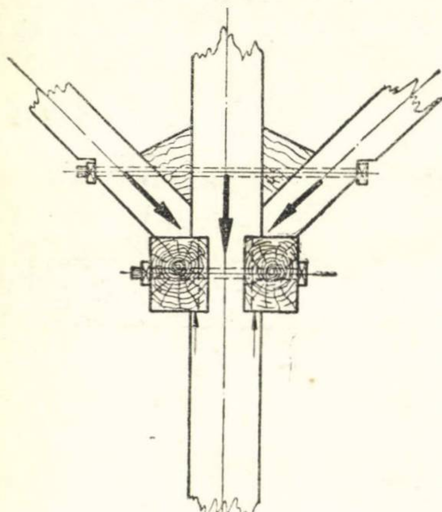


Fig. 8

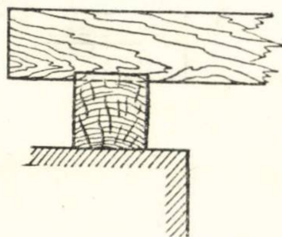


Fig. 9

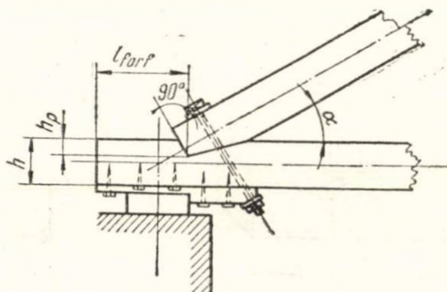


Fig. 10

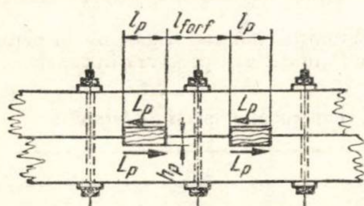


Fig. 11

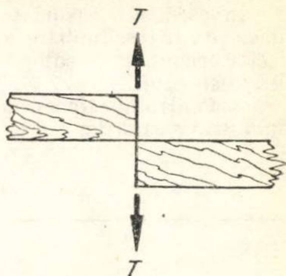


Fig. 12

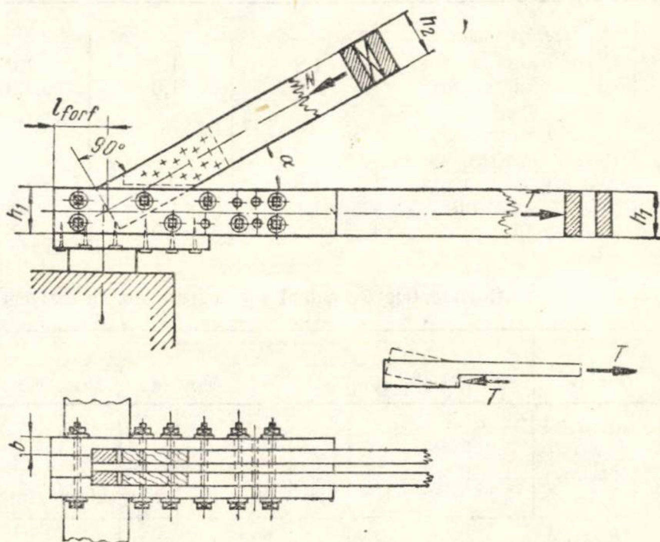


Fig. 13

Observație. — Încadrarea construcțiilor în permanente, provizorii și auxiliare, se face conform STAS 856-49.

— Rezistențele admisibile de mai sus se vor lua la dimensionarea elementelor atunci cînd materialul din care se execută corespunde categoriei în care sînt încadrate elementele conform STAS 857-49. În cazul cînd elementul este încadrat într-o categorie superioară calității efectiv folosite a materialului, rezistențele admisibile respective se vor reduce cu 15%.

În asemenea cazuri se recomandă ca în prealabil să se studieze dacă printr-o schimbare a dispoziţiei constructive nu se poate realiza o concordanţă între categoria în care este încadrat elementul şi materialul disponibil.

— Pentru alte specii de lemn, rezistenţele admisibile se obţin prin înmulţirea valorilor din tabela 1 cu coeficienţii α respectivi din tabela 2.

Tabela 4.10. **Coeficientul α pentru alte specii de lemn**

Nr. curent	Specia lemnului	Coeficientul α		
		Întindere, încovoiere, compresiune şi strivire în lungul fibrelor	Compresiune şi strivire normal pe fibre	Forfecare
	Răşinoase			
1	Larice	1,2	1,2	1,0
2	Pin, molid, brad	1,0	1,0	1,0
	Foioase			
3	Gorun, gîrniţă, salcîm, stejar	1,3	2,0	1,6
4	Fag, frasin, ulm	1,1	1,6	1,3
5	Anin, plop	0,8	1,0	0,8

Tabela 4.11. **Rezistenţele de calcul ale betoanelor, în kgf/cm²** [1]

Natura solicitării	Marca betonului									
	90	110	140	170	200	250	300	400	500	600
Compresiune axială (rezistenţă prizmatică) R_{pr}	72	88	108	125	145	175	200	260	310	350
Întindere axială sau rezistenţă principală de întindere R_t	10	11	13	15	17	20	23	27	31	35
Compresiune din încovoiere R_i	90	110	135	155	180	220	250	325	390	440

[1]) Valorile din această tabelă se micşorează cu 25% pentru betoanele din cimenturi portland supuse la acţiunea îndelungată a temperaturilor cuprinse între 100°C şi 250°C. Pentru temperaturi mai mari de 250°C rezistenţele de calcul se aleg după criterii speciale.

Tabela 4.12. **Rezistențe de rupere a zidăriilor**

Felul zidăriei	Rezistența de rupere	Rezistența de rupere, kgf/cm² — Marca mortarului					Cînd înălțimea rîndului este mai mare de 50 cm și marca portalului cel puțin 10
		100[1])	50	25	10	4	
Cărămidă sau blocuri cu înălțimea pînă la 15 cm	300	65	55	50	45	35	
	200	55	45	35	30	27	
	150	45	35	30	25	23	
	125	40	33	28	23	20	
	100	35	30	25	20	18	
	75	30	25	22	18	15	
	50	—	20	18	14	11	
	35	—	16	14	11	9	
	25	—		10	9	7	
Blocuri de beton sau piatră naturală	1 000	240	220	210	190	170	420
	700	180	165	160	140	130	315
	500	140	120	115	105	95	245
	300	90	85	80	75	65	165
	200	70	65	60	55	50	120
	150	63	53	48	43	38	95
	125	58	46	42	38	34	80
	100	45	40	35	33	30	65
	75	38	32	31	27	24	50
	50	30	25	23	20	18	35
	35	—	20	19	17	15	27
	25	—	16	15	13	11	18
Blocuri de beton cu goluri	100	40	34	32	27	25	
	75	32	28	25	22	20	
	50	25	22	20	17	15	
	35	—	18	16	14	12	
	25	—	14	13	11	10	

Tabela 4.12. (*continuare*)

Felul zidăriei	Rezistenţa de rupere	Rezistenţa de rupere, kgf/cm²					Cînd înălţimea rîndului este mai mare de 50 cm şi marca mortarului cel puţin 10
		Marca mortarului					
		100[1]	50	25	10	4	
Piatră brută	1 000	50	35	25	15	10	
	700	42	30	19	13,5	8,5	
	500	35	25	17	12	7	
	300	26	20	14,5	10	6	
	200	22	17	13	9	5,5	
	150	18,5	14,5	11,5	8	5	
	100	15	12	10	7	4,5	
	75	12	10,5	9	6	4	
	50	—	9	7,5	5,5	4	

[1]) Pentru mortarurile de ciment fără plastifiant (var) rezistenţele de rupere din tabelă se reduc cu 15%.

Tabela 4.13. **Rezistenţele admisibile pentru beton la podurile de beton armat, în kgf/cm²**

Natura solicitării	Marca betonului					
	140	170	200	250	300	350
Compresiune axială	53/40	62/50	72/60	87/70	100/80	112/90
Compresiune din încovoiere	65/50	75/60	90/70	110/85	125/100	140/115
Efort unitar principal de întindere, cînd barele ridicate şi etrierii se prevăd constructiv	5/4,5	6/5,2	7/5,7	8/6,7	9/7,5	10/8,3
Efort unitar principal de întindere limită, cînd barele ridicate şi etrierii intră în calcule	13/12	15/14	17/16	20/18	22/20	25/22

Notă. Numerele de sus corespund pentru podurile de şosea, iar cele de jos pentru podurile de cale ferată.

Tabela 4.14. **Presiuni admisibile în kgf/cm² pentru terenul de fundație (STAS 3503-52)**

Nr. crt.	Denumirea materialului din terenul de fundație	Sarcini definite conform STAS 503-49			Observații
		Sarcini fundamentale	Sarcini fundamentale + accidentale	Sarcini fundamentale + accidentale + extraordinare	
		I. *Roci stîncoase*			
1	Stîncă în formă de masiv compact fără crăpături sau goluri carstice	1/7 din rezistența rocii la compresiune în stare saturată	1/6 din rezistența la compresiune în stare saturată	1/5 din rezistența la compresiune în stare saturată	Presiunea admisibilă în cazul fundării pe roci stîncoase nu variază cu adîncimea de fundare și dimensiunile în plan ale fundațiilor
2	Stîncă crăpată constînd din blocuri nelegate, asemenea unei zidării uscate	între 15...6 în funcție de rezistența rocii la compresiune și de dimensiunile fragmentelor	între 18...7, în funcție de rezistența rocii la compresiune și de dimensiunile fragmentelor	între 21...9, în funcție de rezistența rocii la compresiune și de dimensiunile fragmentelor	
		II. *Roci marnoase, argiloase și nisipoase consolidate*			
3	Marne, marne argiloase și argile marnoase compacte, tari	7,5 ... 2,5	9,0 ... 3,0	10,0 ... 3,5	Presiunea admisibilă pe marne, argile marnoase, argile șistificate, șisturi și nisipuri cimentate se va stabili între limitele prescrise în funcție de rezistența la compresiune a materialului.
4	Argile șistificate, argile șistoase și șisturi, argile cu silice și nisipuri cimentate	6,0 ... 4,0	7,0 ... 5,0	8,5 ... 5,5	Valoarea presiunii admisibile nu variază cu adîncimea de fundare și dimensiunile fundațiilor.

Tabela 4.14 (*continuare*)

III. *Bolovănişuri, pietrişuri*

Nr. crt.	Denumirea materialului din terenul de fundaţie	Sarcini definite conform STAS 503-49			Observaţii
		Sarcini fundamentale	Sarcini fundamentale + accidentale	Sarcini fundamentale + accidentale + extraordinare	
5	Bolovănişuri cu interspaţiile umplute cu nisip şi pietriş	6,0	7,0	8,5	Presiunile admisibile pentru bolovănişuri şi pietrişuri cu interspaţiile umplute cu pămînturi argiloase se aleg în funcţie de starea de consistenţă a umpluturii
6	Blocuri cu interspaţiile umplute cu pămînturi argiloase	4 ... 2,5	5,0 ... 3,0	5,5 ... 3,5	
7	Pietrişuri curate	5,0	6,0	7,0	
8	Pietrişuri cu nisip	4,0	5,0	6,0	
9	Pietrişuri cu nisip argilos	3 ... 2,0	4,0 ... 3,0	5,0 ... 4,0	

IV. *Pămînturi nisipoase*

Nr. crt.	Denumirea materialului	Stare	Compacte	Cu îndesare mijlocie	Compacte	Cu îndesare mijlocie	Compacte	Cu îndesare mijlocie	Observaţii
10	Nisip mare		4,5	3,5	5,5	4,0	6,5	5,0	Pentru umpluturile de nisip pilonat sau vibrat umed, în strate de 0,15...0,20 cm, se vor lua valorile corespunzătoare coloanei „cu îndesare mijlocie". În cazul fundării pe nisipuri fine prăfoase, în apă, se va specifica pe planul săpăturilor pentru fundaţii măsurile luate pentru a împiedica antrenarea materialului prin epuismente.
11	Nisip mijlociu		3,5	2,5	4,0	3,0	5,0	4,0	
12	Nisip fin	umed	3,0	2,5	3,5	2,5	4,5	3,0	
		foarte umed şi saturat	2,5	1,5	3,0	1,8	3,5	2,0	
13	Nisip fin prăfos	uscat	2,5	2,0	3,0	2,5	4,0	3,5	
		umed	2,0	1,5	2,5	2,0	3,0	2,5	
		foarte umed şi saturat	1,5	1,0	1,8	1,2	2,0	1,5	

T a b e l a 4.14 (*continuare*)

V. *Pămînturi argiloase*

14	Nisipuri argiloase sau praf argilos cu porozitatea:							Presiunea admisibilă pe pămînturile argiloase se obține prin interpolare în funcție de valoarea indicelui de consistență (I_c) și apoi prin interpolare în raport cu porozitatea pămîntului (n). Pentru pămînturile argiloase tari ($I_c \geqslant 1$) presiunea admisibilă se va alege după cum urmează: a) pentru nisipuri argiloase sau prafuri argiloase valorile corespunzătoare lui $I_c = 1$; b) pentru argile nisipoase și argile, valorile din coloana $I_c = 1$ majorate cu 20%.
	$n = 33\%$	3,0	2,5	3,5	3,0	4,0	3,0	
	$n = 41\%$	2,5	1,5	3,0	1,8	3,3	2,0	
15	Argilă nisipoasă sau argilă prăfoasă cu porozitatea:							
	$n = 33\%$..............	3,0	2,5	3,5	3,0	4,0	3,3	
	$n = 41\%$..............	2,5	1,8	3,0	2,0	3,3	2,2	
	$n = 50\%$..............	2,0	1,0	2,5	1,2	3,0	1,3	
16	Argile cu porozitatea							
	$n = 37\%$..............	5,0	3,0	6,0	3,5	7,0	4,0	
	$n = 44\%$..............	3,0	2,0	3,5	2,5	4,0	2,8	
	$n = 52\%$..............	2,5	1,0	3,0	1,1	3,3	1,3	

Observație. Datele din această tabelă sînt valabile pentru o adîncime de fundare $h \geqslant 2$m. Pentru $h = 0$ se consideră o presiune admisibilă egală cu jumătate din valoarea corespunzătoare din tabelă, iar pentru $0 < h < 2$ se interpolează liniar între valorile corespunzătoare pentru $h = 0$ și pentru $h \geqslant 2$ (din tabelă).

Tabela 4.15. **Coeficienţii de siguranţă ai zidăriilor la calculul după stadiul de rupere**

Solicitarea şi felul zidăriei	Ipotezele de calcul		
	Sarcini fundamentale	Sarcini fundamentale şi accidentale	Sarcini fundamentale, accidentale şi extraordinare
1. La calculul zidăriei la rezistenţa la rupere, în pereţi, stîlpi, arce şi bolţi cu o secţiune mai mare decît 0,30 m²:			
— din cărămidă şi piatră naturală brută	2,5	2,3	1,9
— din blocuri de beton şi piatră naturală cu forme regulate şi blocuri de lut	2,8	2,5	2,1
— din blocuri ceramice cu goluri	3,0	2,7	2,3
2. La calculul de fisurare	1,2	1,1	—
3. La calculul stabilităţii la răsturnare şi alunecare	1,5	1,4	1,2

Tabela 4.16. **Coeficienţii de siguranţă pentru elementele din beton armat la calculul după stadiul de rupere**

Combinarea sarcinilor	Raportul $\frac{Q_u}{Q_g}$	Cauzele ruperii		
		Betonul ajunge la limita de rezistenţă prin compresiune sau armătura ajunge la limita de curgere		Betonul ajunge la limita de rezistenţă prin întindere (eforturi principale de întindere)
		În stîlpi, reazeme şi arce	În restul elementelor de construcţie	
		c	c	c_1
a) Sarcini fundamentale	Pînă la 2	2,0 (1,85)	1,8	2,2
	Peste 2	2,2 (2,0)	2,0	2,4
b) Sarcini fundamentale + sarcini accidentale	Pînă la 2	1,8	1,6	2,0
	Peste 2	2,0	1,8	2,2
c) Sarcinile de la b), inclusiv sarcini extraordinare	Pentru orice raport	1,6	1,5	1,8

Stările limită ale construcţiei[1]) sînt acelea, după care nu mai este posibilă o exploatare normală; astfel se deosebesc trei stări limită:

1) *capacitatea portantă* (rezistenţă, stabilitate şi rezistenţă la oboseală);

2) *dezvoltarea unor deformaţii foarte mari*;

3) *formarea de fisuri şi stricăciuni*.

Formula de calcul după prima stare limită are forma

$$N_{calc} \leqslant N_{lim}, \qquad (4.85)$$

unde N_{calc} este *efortul de calcul* (forţa sau momentul), care se calculează în funcţie de sarcini; el este un efort total ce se exprimă în funcţie de încărcările permanentă N_p şi utilă N_u, şi de coeficienţii de supraîncărcare c_p şi c_u adică

$$N_{calc} = N_p \cdot c_p + N_u \cdot c_u \qquad (4.86)$$

(mărimile c_p şi c_u sînt indicate în tabela 4.17);

N_{lim} este *rezistenţa limită* a materialului şi construcţiei, determinată cu metodele rezistenţei materialelor, ţinînd seama de:

a) particularităţile construcţiei evaluate cu *coeficienţi speciali de condiţii de lucru m* (tabela 4.17);

b) reducerea posibilă a rezistenţei de calcul R_{calc} a materialului faţă de cea din norme R^n, ca urmare a neuniformităţii probabile a materialului; în acest caz,

$$R_{calc} = R^n \cdot k_n, \qquad (4.87)$$

$$N_{lim} = AmR^n k_n, \qquad (4.88)$$

unde k_n este *coeficientul de neuniformitate*, care se ia între limitele 0,85 ... 1,0; A este *caracteristica geometrică* a secţiunii (în cazul cînd N este o forţă, A se exprimă în cm; în cazul cînd efortul este un moment M, caracteristica A se exprimă în cm³). Valorile lui R_{calc} pentru unele materiale sînt indicate în tabela 4.18.

T a b e l a 4.17. **Coeficienţi de supraîncărcare orientativi c şi coeficienţii condiţiilor de lucru m**

Natura supraîncărcării şi a condiţiilor de lucru	c_p	c_u	m
Sarcină permanentă	1–1,2	—	—
Zăpadă	—	1,4	—
Vînt	—	1,2–1,5	—
Sarcină utilă	—	1,2–1,4	—
Solicitare la întindere	—	—	0,8–1
Solicitare la compresiune	—	—	0,6–0,9
Solicitare la forfecare, despicare	—	—	0,8–1
Solicitare la încovoiere	—	—	0,9–1

[1]) Din anul 1956 s-a început folosirea acestui fel de calcul la proiectările de construcţii din U.R.S.S.

T a b e l a 4.18. **Rezistențe de calcul R_{calc} (formula 4.87)**

Materiale şi rezistenţa	[kgf/mm²]
Oțel 2, Oțel 3 — întindere, compresiune, încovoiere	20—21
Oțel 2, Oțel 3 — tăiere	12—13
Oțel 2, Oțel 3 — strivirea capătului	30—32
Pin — încovoiere, compresiune, strivire, în lungul fibrelor	1,3
Pin — întindere	1
Pin — despicare	0,12
Pin — compresiune şi strivire transversal pe fibră	0,18
Zidărie de cărămidă, cu marca cărămizii şi a mortarului 100	0,18
Idem, 75	0,14
Beton în beton armat — compresiune axială	0,65—0,9—1,25
Beton în beton armat — încovoiere	0,75—1,05—1,4
Beton în beton armat — întindere axială	0,04
Armătura în beton armat OL. 3	21
Armătura în beton armat OL. 5	24

Observații:

1. Datele pentru beton se referă la mărcile sale respective 140, 200, 300.

2. Oțelurile OL 2 şi OL 3 din GOST corespund aproximativ oțelurilor romîneşti, respectiv OL 34 şi OL 38 (vezi STAS R-4400-54).

Calculul după a doua stare limită cere îndeplinirea condiției

$$\Delta_{calc} \leqslant [f], \tag{4.89}$$

unde Δ_{calc} *este deplasarea efectivă a construcției* (săgeată, rotire) cauzată de sarcina normată, iar $[f]$ este deplasarea admisă de normele de calcul (tabela 4.19).

T a b e l a 4.19. **Săgețile maxime ale elementelor supuse la încovoiere**

Denumirea elementelor	Săgețile limită în fracțiuni din deschiderea l
Grinzi de rulare:	
a) pentru poduri rulante manuale	1/500
b) pentru poduri rulante electrice	1/600
Elementele planşeelor intermediare cu intradosul plan:	
— pentru $l < 7$ m	1/200
— pentru $l \geqslant 7$ m	1/300
Elementele planşeelor intermediare şi ale scărilor cu intradosul nervurat:	
— pentru $l < 5$ m	1/200
— pentru 5 m $\leqslant l < 7$ m	1/300
— pentru $l \geqslant 7$ m	1/400

Tabela 4.19 (*continuare*)

Denumirea elementelor	Săgețile limită în fracțiuni din deschiderea l
Elementele planşeelor de acoperiş ale clădirilor industriale:	
– pentru $l < 7$ m	1/200
– pentru $l \geqslant 7$ m	1/300
Grinzi din planşee care suportă zidării, săgeata datorită sarcinilor permanente şi utile	$<$ 1/500
Grinzi din planşee care nu suportă ziduri, dar pot suporta suprasarcini, săgeata datorită numai sarcinilor permanente şi utile este	$<$ 1/500
În cazul unei suprasarcini săgeata datorită numai acesteia trebuie să fie	$<$ 1/500

Calculul după a treia stare limită se efectuează după indicaţiile speciale pentru acele construcţii (de exemplu din beton armat) şi în acele condiţii, cînd fisurările şi stricăciunile nu periclitează rezistenţa şi stabilitatea.

§ 4.10. Luarea în considerare a greutăţii proprii

O bară de secţiune variabilă A_x întinsă (comprimată) centric de forţă P, are la distanţa x de punctul O (fig. 4.16) tensiunea σ_x şi alungirea Δx

$$\sigma_x = \frac{P + G_x}{A_x}, \tag{4.90}$$

$$\Delta x = \int_0^x \frac{P + G_x}{EA_x} \mathrm{d}x. \tag{4.91}$$

În cazul cînd $G_x = Ax\gamma$, unde γ este greutatea specifică, iar $A_x = A = \text{const}$ (prismă), rezultă

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + x\gamma, \tag{4.92}$$

$$\Delta x = \frac{Px}{EA} + \frac{x^2\gamma}{2E}. \tag{4.93}$$

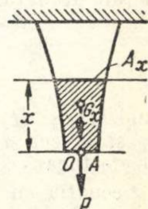


Fig. 4.16.

În cazul $\sigma_x = \sigma = \text{const}$ (bară de egală rezistenţă) şi $A_0 = P : \sigma$, se obţine

$$A_x = A_0\, e^{\gamma x/\sigma} \tag{4.94}$$

$$\Delta x = \frac{\sigma}{E} x. \tag{4.95}$$

Fir flexibil cu reazeme la acelaşi nivel (fig. 4.17). Pentru sarcina uniform distribuită q [kgf/cm], pentru deschiderea l şi pentru săgeata f, se obţin următoarele expresii ale reacţiunilor R şi H, a tensiunii σ şi a lungimii s a firului pe curbă

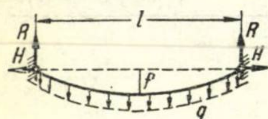


Fig. 4.17.

$$R = 0{,}5ql, \quad H = \frac{ql^2}{8f}, \quad \sigma = \frac{\gamma l^2}{8f}, \tag{4.96}$$

$$s = l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right) \text{ sau}$$

$$s = l\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)^{1/2}, \tag{4.97}$$

unde $\gamma = \frac{q}{A}$, A fiind aria secţiunii firului.

T a b e l a 4.20. **Deschiderea l [m] a firului, funcţie de raportul l/f şi tensiunea σ [kgf/mm^2] la $\gamma = 8$ t/m^3**

σ [kgf/mm^2]	$l : f$		
	1 000	100	50
100	100	1 000	2 000
10	10	100	200

Observaţii. 1. Funcţia ce dă pe l este liniară.

2. Pentru $\gamma_1 \neq 8$t/m^3, lungimea l_1 se găseşte cu ajutorul lungimii l din tabelă, după formula $l_1 = l\frac{8}{\gamma_1}$. Alungirea firului (se ia în considerare atunci cînd σ şi l sînt mari) este

$$\Delta s \approx \frac{\Delta\sigma l}{E} = \frac{H_1 - H_0}{EA}\, l, \tag{4.98}$$

unde H_0 şi H_1 sînt forţele de întindere orizontale la sarcina iniţială q_0 şi la cea finală q_1. În cazul general (orice încărcare) calculul se efectuează după formulele:

ecuaţia curbei firului

$$y = M : H_1, \tag{4.99}$$

lungimea curbei

$$s_1 = l + \frac{1}{2H_1^2}\int_0^l T_1^2\, \mathrm{d}x + \frac{\Delta\sigma \cdot l}{E}, \tag{4.100}$$

unde M şi T_1 sînt respectiv momentul încovoietor şi forţa tăietoare a barei simplu rezemate echivalente, la sarcina dată; forţa H_1 se găseşte din condiţia $s_1 = s$, unde s se ia din formula (4.97).

§ 4.11. Probleme static nedeterminate

A. La calculul prin *metoda rezistenţelor admisibile* se scriu ecuaţiile de echilibru şi condiţiile de compatibilitate a deplasărilor; numărul acestora din urmă este egal cu gradul de nedeterminare statică. Se cere (fig. 4.18) secţiunea A a unei bare verticale, atunci cînd sarcina la macara este $P = 13$ tf, iar $\sigma_a = 16$ kgf/mm². Bara AB a sistemului se presupune absolut rigidă. Sistemul este simplu static nedeterminat; folosim ecuaţiile:

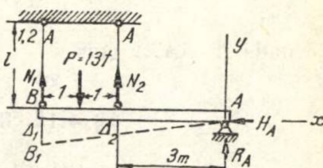


Fig. 4.18.

a) ecuaţia de echilibru

$$\sum M_A = 0 \quad \text{sau} \quad N_1 \cdot 5 + N_2 \cdot 3 = 13 \cdot 4;$$

b) de deplasări (în urma rotirii barei AB în poziţia AB_1)

$$\Delta_2 : \Delta_1 = 3 : 5 \quad \text{sau} \quad \frac{N_2 l}{EA} \cdot \frac{E \cdot 1{,}2\,A}{N_1 l} = 0{,}6.$$

Rezolvînd aceste ecuaţii, găsim: $N_1 = 8$ tf, $N_2 = 4$ tf.

Din ecuaţiile de proiecţii $\sum X = 0$ şi $\sum Y = 0$, găsim $H_A = 0$; $R_A = 1$ tf. Secţiunea necesară se găseşte din condiţia:

$$1{,}2\,A = \frac{N_1}{\sigma_a} = \frac{8\,000}{1600} = 5 \text{ cm}^2 \quad \text{sau} \quad A = 4{,}17 \text{ cm}^2.$$

B. Calculul după *metoda la rupere*, se face în următoarea ordine:

a) sarcina care lucrează P se amplifică spre a obţine mărimea sarcinii de rupere, $P \cdot c$., prin înmulţirea cu coeficientul de siguranţă c;

b) se consideră atingerea stării de rupere (aici curgere) în bara $n + 1$, unde n este gradul de nedeterminare statică. În cazul din fig. 4.18, avem: $N_{1c} = 1{,}2\,A_c$; $N_{2c} = A\,\sigma_c$. Din ecuaţia de momente $\sum M_A = 0$, avem:

$$13\,c \cdot 4 = N_{1c} \cdot 5 + N_{2c} \cdot 3$$

de unde, admiţînd

$$\frac{\sigma_c}{c} = \sigma_a = 1600 \text{ kgf/cm}^2$$

se obţine $A = 3{,}61$ cm².

C. Pentru acelaşi sistem (fig. 4.18) se poate efectua un calcul la *starea limită*. În acest caz să admitem că toată sarcina P se compune din sarcina permanentă $P_{cp} = 3$ tf şi sarcina utilă $P_u = 10$ tf; să considerăm coeficienţii de supraîncărcare $C_p = 1{,}1$ şi $C_a = 1{,}3$; afară de aceasta, pentru Ol.3 rezistenţa standardizată este $R = \sigma_c = 24$ kgf/mm², iar coeficienţii condiţiilor de lucru m şi de neomogenitate k sînt egali cu $m = k = 0{,}91$. Atunci, pentru efortul $N_1 = 8$ tf, determinat din calculul sistemului static nedeterminat, avem:

$$N_1 \frac{3}{13} C_p + N_1 \frac{10}{13} C_u \leqslant 1{,}2\, A \cdot \sigma_T\, km,$$

de unde $A = 4{,}22$ cm².

§ 4.12. Efectul temperaturii

Sub acţiunea variaţiilor temperaturii în sistemele static determinate au loc deformaţii libere ale barelor, fără a se produce tensiuni. Dacă $t =$ const este creşterea temperaturii pe toată lungimea l a barei, atunci alungirea ei Δl_t este:

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t, \tag{4.101}$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară, ale cărui valori, pentru unele materiale, sînt indicate în tabelă:

Materialul	Oţel-beton	Duraluminiu	Alamă, bronz	Cupru	Plumb, zinc, staniu	Porţelan
$\alpha \cdot 10^6$	12	22	18	16	28	3

Într-un sistem static nedeterminat, dacă deformaţiile produse de variaţia temperaturii sînt parţial împiedicate, alungirea barei cu $A =$ const este

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} + \alpha l \Delta t \tag{4.102}$$

iar tensiunea este, ca de obicei, $\sigma = N : A$. Considerăm că la sistemul din fig. 4.18, avînd $A_1 = 1{,}2\,A$ şi $A_2 = A$, bara din dreapta a suferit o încălzire suplimentară cu 40°C; în acest caz $P = 0$, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm²; $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$. Ecuaţiile de echilibru ($\sum M_A = 0$) şi de deplasări (§ 4.11, a) devin:

a) $5 N_1 + 3 N_2 = 0$, sau $\sigma_1 = -0{,}5\,\sigma_2$

b) $\Delta_2 = 0{,}6\,\Delta_1$, sau cu ajutorul relaţiei (4.102)

$$\frac{\sigma_2}{E} + \alpha \Delta t = \frac{\sigma_1}{E}.$$

Rezolvîndu-le, găsim: $\sigma_2 = -800$ kgf/cm² şi $\sigma_1 = 400$ kgf/cm².

§ 4.13. Tensiuni şi deformaţii pe direcţii înclinate

La întinderea după o singură direcţie (fig. 4.19)

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \sigma \sin \alpha' \cos \alpha; \tag{4.103}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha \\ \gamma_\alpha &= (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}\right\} \tag{4.104}$$

unde

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x; \qquad \varepsilon_x = \sigma : E. \tag{4.105}$$

La întindere pe două direcţii (fig. 4.20)

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha, \qquad \tau_\alpha = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha. \tag{4.106}$$

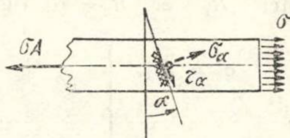


Fig. 4.19.

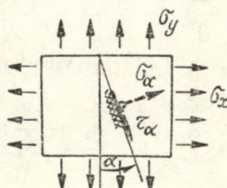


Fig. 4.20.

Formulele (4.104) îşi păstrează valabilitatea; în acest caz

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\sigma_j - \mu\sigma_x}{E}; \tag{4.107}$$

iar lucrul mecanic specific este

$$W_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y) = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y). \tag{4.108}$$

§ 4.14. Învelitori subţiri de rotaţie

Într-un punct arbitrar A (fig. 4.21) razele principale de curbură sînt: R_1 — pentru curba meridiană, $r = f(x)$ şi R_2 — pentru cercul paralel, unde $R_2 = r : \cos \alpha$, iar r este raza cercului paralel în planul perpendicular pe axa de rotaţie x. În cazul acţiunii unei presiuni interioare p, normală la suprafaţa învelitorii, condiţiile de echilibru (ecuaţia lui Laplace) sînt:

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{p}{\delta},$$

$$\sigma_1 = \frac{pR_2}{2\delta}. \tag{4.109}$$

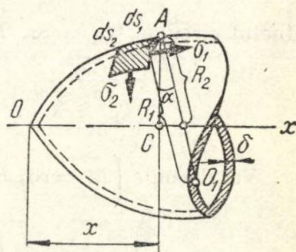
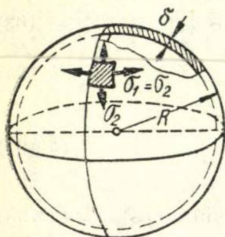


Fig. 4.21.

Deformaţiile relative ale elementului $ds_1 ds_2$ se determină cu formulele (4.97) ; variaţia razei R_2 este:



a

Fig. 4.21.

$$\Delta R_2 = R_2 \varepsilon_2 = R_2 \frac{\sigma_2 - \mu\sigma_1}{E}. \qquad (4.110)$$

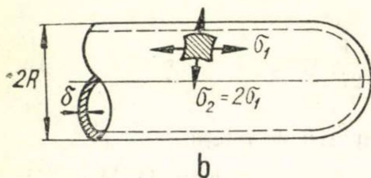
Vasul sferic ($R_1 = R_2 = R$) (fig. 4.21, *a*):

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2\delta},$$

$$\Delta R = \frac{pR^2(1-\mu)}{2E\,\delta}. \qquad (4.111)$$

Vasul cilindric ($R_1 = \infty$, $R_2 = R$) (fig. 4.21, *b*):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{pR}{2\delta}; \qquad \sigma_2 = 2\sigma_1, \\ \Delta R &= \frac{pR^2}{2E\delta}\,(2-\mu). \end{aligned}\right\} \qquad (4.112)$$



b

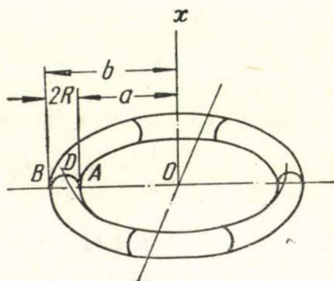


Fig. 4.21.

Inelul circular ($R_1 = \infty$, $R_2 = R$):

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{pR}{\delta}, \quad \Delta R = \frac{pR^2}{E\delta}. \qquad (4.113)$$

Vasul conic $\left(R_1 = \infty,\ R_2 = r : \cos\alpha = \frac{x \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}\right)$ (fig. 4.21,*c*):

$$\sigma_1 = \frac{pR_2}{2\delta}; \qquad \sigma_2 = 2\sigma_1. \qquad (4.114)$$

Torul este un vas obţinut prin rotaţia unui inel circular de rază R (fig. 4.21, d) în jurul axei x ($R_1 = R = \text{const}$, $R_2 = -a$ pentru punctul A; $R_2 = b$ pentru punctul B):

$$\sigma_2 = \frac{pR}{2\delta}; \quad \sigma_{1B} = \frac{pR}{\delta}\left(1 - \frac{R}{2b}\right); \quad \sigma_{1A} = \frac{pR}{\delta}\left(1 + \frac{R}{2a}\right). \quad (4.115)$$

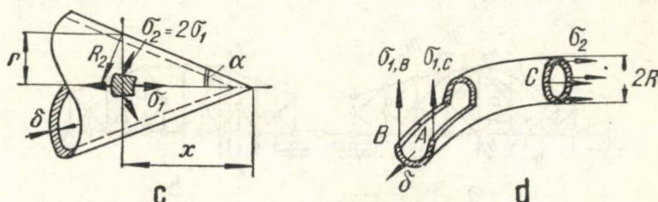


Fig. 4.21

În punctul D, care este aşezat la distanţa $a + R$ de axa x, $R_2 = \infty$; prin urmare, din ecuaţia (4.109) rezultă $\sigma_{1D} = \frac{pR}{\delta}$.

§ 4.15. Grinzi cu zăbrele[1]

Cea mai simplă schemă de calcul pentru grinzi cu zăbrele este sistemul de *bare articulate*, format din bare drepte, încărcat numai în noduri. Barele grinzii cu zăbrele suportă eforturi de întindere, sau de compresiune.

Aici se examinează bazele calculului doar pentru cîteva tipuri simple de grinzi cu zăbrele. În fig. 4.22 se arată grinzi cu tălpi paralele:

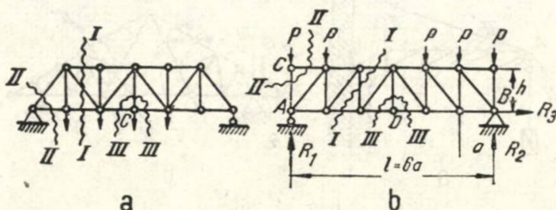


Fig. 4.22.

[1]) Vezi capitolul 4 în cartea «Основы строительной механики стержневых систем» И. М. Рабинович, 1956.

a — sistem triunghiular, *b* — sistem dreptunghiular. În fig. 4.23 sînt grinzi cu zăbrele cu talpă poligonală: *a* — sistem *K*; *b* — compusă. În fig. 4.24: *a* — grindă cu zăbrele de macara, *b* — fermă de acoperiş.

Grinda cu zăbrele trebuie să fie geometric nedeformabilă şi să satisfacă cerinţa indispensabilă în acest scop; *numărul de bare interioare este egal cu dublul numărului de noduri minus trei*. De exemplu, în grinda din fig. 4.22, *a* sînt 12 noduri, deci 21 de bare; în grinda

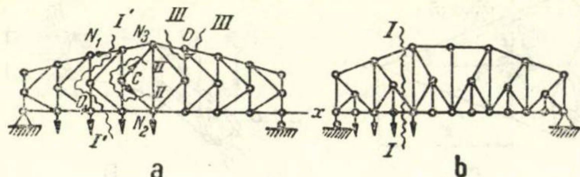


Fig. 4.23.

din fig. 4.24, *a* sînt 11 noduri, deci 19 bare (tirantul *AB* este bara exterioară).

Pentru determinarea pe cale analitică a eforturilor se foloseşte metoda secţiunilor; se recomandă ca secţiunile să fie făcute aşa cum se indică în fig. 4.22—4.24.

La izolarea nodurilor (secţiunile *II—II*, *III—III* şi *IV—IV* în toate schemele) se încearcă a se realiza fie ca secţiunea să treacă numai prin două bare şi atunci, deoarece pentru forţele concurente se folosesc două ecuaţii statice, necunoscutele se pot găsi; fie să se realizeze ca, atunci cînd se secţionează un număr mai mare de bare, eforturile în barele suplimentare să fie găsite în prealabil.

Să examinăm, de exemplu, schema din fig. 4.24, *b*; din secţiunea *II—II*, prin tăierea nodului *F*, se găsesc eforturile în două bare *FD* şi *FK*; în nodul *D* converg trei bare, dar printre ele este *FD*; prin urmare, acum din secţiunea *III—III* se pot găsi eforturile în cele-

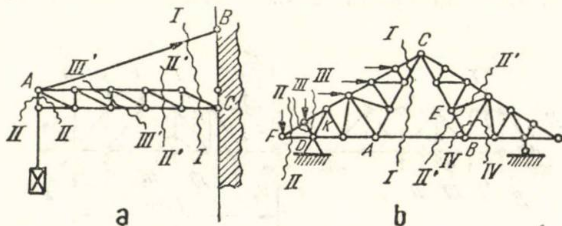


Fig. 4.24.

lalte două bare; în nodul *F* converg patru bare; aceasta înseamnă că problema poate fi rezolvată, dacă se vor găsi în prealabil eforturile, să spunem, în barele *AB* (din secţiunea *I—I*) şi *BE* (din secţiunea *II'—II'*).

Secțiunile *III—III* în schema din fig. 4.22, *a* și *b* sînt caracteristice prin faptul că, din trei bare prezente într-un nod, două sînt în prelungire; în acest caz, efortul în bara a treia se găsește ușor prin proiectarea tuturor forțelor pe o axă perpendiculară pe primele două bare.

În metoda izolării nodurilor, atunci cînd la fiecare nod succesiv secționat există doar două eforturi noi necunoscute, iar celelalte au fost în prealabil găsite, este posibil ca erorile să se acumuleze. Se recomandă atunci determinarea independentă a eforturilor în fiecare bară separat. Foarte des se reușește a se realiza aceasta, folosind nu izolarea nodurilor, ci secționări de tipul *I—I* arătate în schemele din fig. 4.22—4.24.

Secțiunea *I—I* prin trei bare, ale căror axe nu se întretaie în același punct, permite utilizarea a trei ecuații statice; cele mai comode sînt ecuațiile de momente față de punctele de intersecție ale unei perechi de bare *(punctele lui Ritter)*; dacă două bare oarecare sînt paralele (ca în cazul fermelor din fig. 4.22, *a* și *b*), punctul lui Ritter se depărtează la infinit și se utilizează ecuațiile de proiecție pe axa perpendiculară pe barele paralele.

Fie de determinat eforturile în barele grinzii cu zăbrele cu tălpi *paralele*, din fig. 4.22, *b*. Reacțiunile din reazeme vor fi: $R_1 = 2{,}33\,P$, $R_2 = 2{,}67\,P$, $R_3 = 0$. Izolînd cu ajutorul secțiunii *II—II* nodul *C* (fig. 4.25, *a*), presupunînd că eforturile necunoscute, N_1 și N_2 sînt de întindere și proiectînd forțele, pe axele Ox și Oy, obținem: $N_1 = 0$; $N_2 = -P$ (compresiune). Secționînd grinda (secțiunea *I—I*) și înlăturînd partea ei dreaptă, vom admite din nou că eforturile necunoscute N_3, N_4 și N_5 sînt întinderi (fig. 4.25, *b*). Pentru determinarea lui N_3 (punctul lui Ritter este la infinit), scriem ecuația de proiecții $\Sigma Y = 0 = 2{,}33\,P - 2\,P - N_3$, de unde $N_3 = 0{,}33\,P$. Pentru eforturile N_4 și N_5, punctele lui Ritter vor fi respectiv O_4 și O_5. Din ecuația $\Sigma M_{O4} = 0$ avem:

$$2{,}33\,P\cdot 2a - 2\,P\cdot 1{,}5a + N_4 h = 0.$$

de unde $N_4 = -1{,}66 P\, a/h$ (compresiune). Deoarece punctul O_5 este așezat pe aceeași verticală cu punctul O_4, obținem $N_5 = -N_4$ (întin-

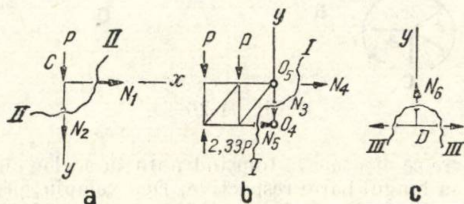


Fig. 4.25.

dere). Pentru determinarea efortului în montantul central al fermei, separăm nodul *D* prin secțiunea *III—III* (fig. 4.25, *c*). Din condiția $\Sigma Y = 0$ găsim $N_6 = 0$. În mod analog se determină eforturile în

celelalte bare. Grinda cu zăbrele din fig. 4.22, *a* se rezolvă în acelaşi mod. Grinda cu zăbrele de macara şi ferma de acoperiş se calculează în aceeaşi ordine ca şi grinda din fig. 4.22, *b*; în prealabil, cu ajutorul secţiunilor *I—I*, utilizînd punctul lui Ritter *C*, se găseşte efortul din bara *AB*; pe urmă, cunoscînd N_{AB} şi efectuînd secţionările *II—II* şi *III—III*, se determină eforturile în celelalte bare.

În grinda cu zăbrele sistem *K* (fig. 4.23, *a*) se recomandă secţionări speciale. Cu ajutorul secţiunii *I'—I'* se pot găsi eforturile în tălpi; de exemplu, pentru efortul N_1 se ia punctul lui Ritter O_1. Cu ajutorul secţiunii *II—II* se stabilesc relaţiile între eforturile N_2 şi N_3 (din condiţia $\Sigma X = 0$); efectuînd apoi o secţiune verticală, se găsesc N_2 şi N_3. Prin izolarea nodului *D* (secţiunea *III—III*) se poate găsi efortul în montant.

Grinda cu zăbrele compusă (fig. 4.23, *b*) se poate rezolva cu ajutorul secţiunilor prin trei bare (asemănătoare cu *I—I*) şi prin izolarea nodurilor.

Determinarea grafică a eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele constă în construirea epurei Maxwell-Cremona, a cărei executare succesivă rezultă din fig. 4.26. În stînga (fig. 4.26, *a*) sînt arătate cîmpurile de forţă şi anume cîmpurile exterioare *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, limitate de domeniul grinzii şi de asemenea de liniile de acţiune ale forţelor exterioare $P_1 = 2$ tf, $P_2 = 5$ tf şi de reacţiunile reazemelor $R_1 = 3{,}3$ tf, $R_2 = 4$ tf şi $R_3 = 1{,}7$ tf (ultimele au fost găsite din ecuaţiile statice) şi cîmpurile interioare care sînt notate cu cifrele 1, 2, 3. Citirea eforturilor interioare se efectuează folosind notaţia acelor cîmpuri care se învecinează de-a lungul barei respective. De exemplu, pentru nodul *II* efortul în bara orizontală a tălpii superioare (fig. 4.26, *b*) se citeşte *c*2. (Denumirile celor două cîmpuri *c* şi 2 se succed potrivit sensului acelor ceasornicului); astfel efortul în montantul de la nodul *II* se citeşte 21.

Fig. 4.26.

Epura Maxwell-Cremona (fig. 4.26, *b*) se construieşte la scara forţelor, în următoarea ordine. Se reprezintă forţele exterioare (inclu-

zînd şi reacţiunile din reazime): *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, care formează un poligon închis. După aceea, se taie nod după nod (într-o asemenea ordine ca în nodul dat să nu fie mai mult decît două necunoscute şi pentru fiecare nod se termină construirea poligonului de forţe închis).

Pentru sistemul din fig. 4.26 s-a admis următoarea ordine de izolare a nodurilor: *I*, *II*, *III*, *IV*. Pentru nodul *I* în planul forţelor se obţine triunghiul *abb*1 1*a*; pentru nodul *II* — poligonul 1*bbcc*221 şi a.m.d.

Eforturile de compresiune sînt notate punctat, eforturile de întindere prin linii continue.

Bibliografie

1. Vezi capitolul 4.1.
2. Рабинович И. М., Основы строительной механики стержневых систем, Стройиздат, 1956.
3. Справочник машиностроителя, т. з, Машгиз, 1955.

4.3
Forfecare

§ 4.16. Formule generale

Tensiunile tangenţiale τ produse de acţiunea forţelor tăietoare T asupra unui element mic de bară Δs (fig. 4.27) se determină aproximativ în ipoteza că ele sînt uniform distribuite pe suprafaţa secţiunii transversale

$$\tau = \frac{T}{A} \tag{4.116}$$

unde $T = P$; formula se utilizează în calculul de forfecare al şuruburilor, niturilor, cusăturilor sudate, îmbinărilor.

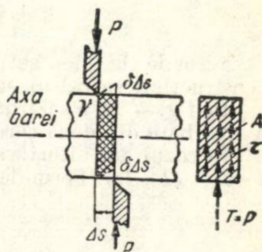


Fig. 4.27.

Sub limita de elasticitate, lunecarea specifică este

$$\gamma = \frac{\delta \Delta S}{\Delta S} \tag{4.117}$$

Legea lui Hooke pentru forfecare este:

$$\tau = G\gamma, \tag{4.118}$$

unde *modulul de elasticitate transversal* G (kgf/cm²) este legat de modulul de E prin relaţia

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{4.119}$$

μ fiind coeficientul lui Poisson (vezi § 4.3., capitolul 4.1 şi tabela 4.1). *Energia de deformaţie* pe unitatea de volum este:

$$W_1 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau\gamma}{2}. \qquad (4.120)$$

Formulele (4.116)—(4.120) corespund solicitării de forfecare pură (fig. 4.28, *a*), cînd un element infinit este supus numai acţiunii unor eforturi unitare tangenţiale indicate în fig. 4.28, *a*. Pe feţe înclinate cu 45° faţă de cele din fig. 4.28, *a*, indicate în fig. 4.28, *b*, au loc tensiunile principale normale $\sigma_{max} = \tau$ şi $\sigma_{min} = -\tau$.

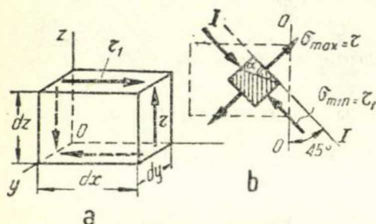


Fig. 4.28.

Pentru un element de suprafaţă înclinat cu unghiurile α faţă de $I-I$ respectiv $\alpha_1 = \alpha + 45°$ faţă de $0-0$, obţinem:

$$\sigma_{\alpha 1} = \tau \sin 2\alpha_1; \qquad \tau_{\alpha 1} = -\tau \cos 2\alpha_1; \qquad (4.121)$$

$$\varepsilon_{\alpha 1} = \varepsilon \sin 2\alpha_1; \qquad \gamma_{\alpha 1} = -2\varepsilon \cos \alpha_1. \qquad (4.122)$$

unde

$$\varepsilon = \frac{\tau(1 + \mu)}{E}.$$

§ 4.17. Îmbinări prin nituire

Niturile (la fel şi şuruburile) care asigură fixarea barelor de nodul construcţiei, se calculează la forfecare şi strivire.

În fig. 4.29, *a* se arată fixarea de grinda *B* cu ajutorul guseului *K* a unei bare din două corniere, întinsă cu forţa $N = 12{,}3$ tf.

În cazul dat niturile cu două secţiuni de forfecare (după planurile $I-I$ şi $II-II$). Formula de calcul este:

$$T = N = \frac{\pi d^2}{4} kn\tau_a \qquad (4.123)$$

d este diametrul niturilor; *n* — numărul lor; *k* — numărul de secţiuni de forfecare ale nitului. Dîndu-se rezistenţa admisibilă $\tau = 1000$ kgf/cm² şi diametrul $d = 1{,}4$ cm, cu $k = 2$, găsim forţa capabilă pentru un singur nit $R_1 = \frac{\pi d^2}{4} k\tau_a = 3080$ kgf; prin urmare sînt necesare $n = N; R_1 \approx 4$ nituri. Cele două corniere 60·40·6, au, conform STAS 425-49, secţiunea brută $A_b = 11{,}36$ cm², iar din cauza găurilor de nit, rămîne $A = 11{,}36 - 2 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}4 = 9{,}68$ cm². Efortul unitar este $\sigma = N : A = 1260$ kgf/cm².

Se admite, în mod convențional, o distribuție uniformă de tensiuni de strivire pe fiecare nit, pe suprafața dδ, unde δ este grosimea guseului. Formula de calcul la strivire este

$$N = d\delta n\sigma_{as}. \tag{4.124}$$

Luînd $\sigma_{as} = 2\sigma_a = 2800$ kgf/cm^2, rezultă:

$$\delta = \frac{N}{dn\sigma_{as}} = 0{,}8 \text{ cm}.$$

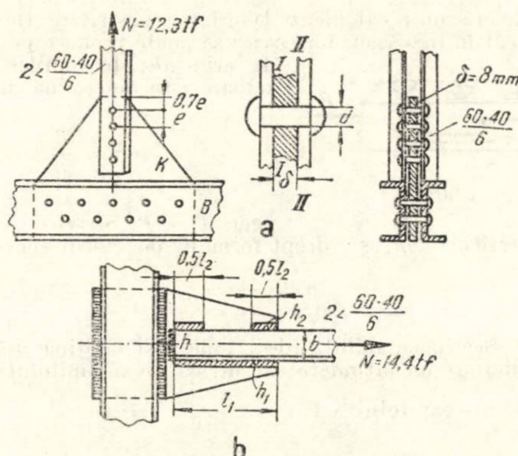


Fig. 4.29.

Distanța între nituri (pasul e) se stabilește din condiția ca tensiunile τ pe suprafața probabilă de *rupere* $(e-d)\delta$ să nu depășească pe τ_a, adică $(e-d)\delta\tau n = N$, de unde $e \approx 5{,}2$ cm; de obicei, se ia $e \geqslant 3{,}5d = 4{,}9$ cm.

§ 4.18. Îmbinări prin sudură

Calculul îmbinării unei bare la nodul construcției, prin sudură (fig. 4.29, *b*), se face luînd în considerație rezistența la forfecare a cusăturilor sudate, care au rezistența admisibilă τ_{as}

$$T = N = \tau_{as} \cdot 0{,}7k(h_1 l_1 + h_2 l_2 + hl) \tag{4.125}$$

unde k este numărul de corniere, din care este formată bara; h_1 și h_2 sînt grosimile cusăturilor laterale (cea continuă de lungime l_1 și cea întreruptă de lungime totală l_2); h este grosimea cusăturii frontale; de obicei $h_2 l_2 \approx 0{,}3\, h_1 l_1$.

Fie $N = 14{,}4$ t, $h_1 = h_2 = h = 4$ mm; se iau $2\,L\,60 \cdot 40 \cdot 6$; $\tau_{as} = 900$ kgf/cm²; prin urmare, $b = 6$ cm. Din formula (4.125) găsim $l_1 + l_2 = 26$ cm; apoi $l_1 = 20$ cm şi $l_2 = 6$ cm. În practică, la dimensiunile obţinute pentru l_1 şi l_2 se adaugă cîte 0,5—1,0 cm. Uneori nu se face cusătura frontală; atunci în formula (4.125) dispare ultimul termen din paranteză.

§ 4.19. Îmbinări în lemn

Îmbinările în lemn se calculează la forfecare şi strivire. De exemplu, în cazul indicat în fig. 4.30, forfecarea se poate produce pe suprafaţa de arie ab; tensiunile corespunzătoare t se determină cu formula:

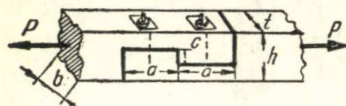


Fig. 4.30.

$$\tau = \frac{T}{ab} \qquad (4.126)$$

unde $T = P$. Strivirea are loc pe suprafaţa verticală ab, şi drept formulă de calcul serveşte:

$$\sigma_s = \frac{N}{cb} \qquad (4.127)$$

unde $N = P$. Secţiunea slăbită [de lăţime b şi înălţime $0{,}5\,(h - c)$] suportă o solicitare de întindere excentrică (vezi capitolul 4.8).

Bibliografie. Vezi capitolul 4.1.

4.4
Răsucire

§ 4.20. Formule pentru calculul diferitelor profile

Pentru un cilindru circular (plin sau gol), încastrat la un capăt şi suportînd la celălalt capăt acţiunea momentului de răsucire $M_x = M_t$ (fig. 4.31), *tensiunile tangenţiale* τ, în limitele elastice, se determină cu formulele

$$\left.\begin{aligned} \tau_\rho &= \frac{M_t}{I_p}\,\rho \\ \tau &= \frac{M_k}{W_p}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.128)$$

unde $I_p = 0{,}5\pi R^4$ este momentul de inerţie polar al secţiunii transversale a barei, iar $W_p = 0{,}5\pi R^3$ este modulul de rezistenţă polar; pentru cilindrul gol, avînd raza interioară R_1 rezultă în mod corespunzător:

$$I_p = 0{,}5\pi R^4(1 - c^4). \qquad W_p = 0{,}5\pi R^3(1 - c^4). \tag{4.129}$$

unde $c = R_1 : R$; pentru $c = 0$, se obţin caracteristicile cilindrului plin; în cazul unui inel foarte subţire

$$I_p = 2\pi R^3\delta; \qquad W_p = 2\pi R^2\delta, \tag{4.130}$$

unde δ este grosimea inelului.

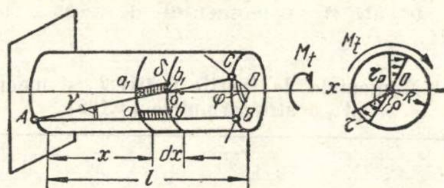


Fig. 4.31.

Unghiul de răsucire pe unitatea de lungime, numit răsucire specifică θ şi unghiul de alunecare specifică γ_ρ la distanţa ρ de punctul O sînt legate prin relaţiile

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p}, \quad \gamma_\rho = \theta \cdot \rho. \tag{4.131}$$

Unghiul de răsucire pe lungimea x este

$$\varphi = \frac{M_t x}{GI_p}. \tag{4.132}$$

Dacă M_t variază în lungul barei, atunci φ se obţine prin integrarea expresiei (4.131); *legea lui Hooke* este (4.133). Tensiunile principale acţionează pe suprafeţele înclinate faţă de secţiunile transversale cu $\pm 45°$ (fig. 4.32) şi ele sînt

$$\sigma_{max} = \tau, \quad \sigma_{min} = -\tau. \tag{4.134}$$

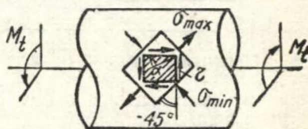


Fig. 4.32.

Pe suprafeţele înclinate în raport cu secţiunile longitudinale cu un unghi α tensiunile se determină cu formulele:

$$\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha, \qquad \tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha. \tag{4.135}$$

Energia specifică la răsucire este

$$W_1 = \frac{\tau_\rho^2}{2G} = \frac{M_t^2\,\rho^2}{2GI_p^2} \tag{4.136}$$

unde ρ este distanța de la centrul cilindrului. Energia potențială pentru un element de lungime dx este

$$dW = \frac{M_t^2\,dx}{2GI_p}. \qquad (4.137)$$

Pentru bare de secțiune necirculară formulele tensiunilor maxime τ și ale unghiurilor de răsucire $d\varphi$, în limitele elastice, au forma

$$\tau = M_t = W_d; \qquad d\varphi = \frac{M_t\,dx}{GI_d}. \qquad (4.138)$$

Modulele de rezistență W_d și momentele de inerție fictive I_d se iau din tabela 4.21.

T a b e l a 4.21 **Momentele de inerție fictive I_d și modulul de rezistență W_d pentru formulele (4.138)**

Forma secțiunii	I_d	W_d	Poziția unde se calculează
Segment de cerc	$\left(1{,}3\frac{h}{R} - 1\right)R^4$ $h > 0{,}25\,R$	$\dfrac{\left(1{,}3\frac{h}{R} - 1\right)R^3}{0{,}15\frac{h}{R} + 0{,}7}$	Punctul A
Elipsă	$\pi\dfrac{b^4n^3(1 - c^4)}{1 + n^2}$ $c = a_1 : a = b_1 : b$ $n = a : b = a_1 : b_1$ sau $c = 0$	$\pi\dfrac{b^3n}{2}(1 - c^4)$	Punctul A
Dreptunghi îngust	$\dfrac{m - 0{,}63}{3}b^4$ $m = h : b > 4$	$\dfrac{m - 0{,}63}{3}b^3$	Punctul A
Dreptunghi (aceeași schemă). Coeficienții α, β și γ, vezi tabela 4.22.	$\beta h b^3$	$\alpha h b^2$	Punctul A; pentru punctul B $\tau_1 = \tau\gamma$

Tabela 4.21 (*continuare*)

Forma secţiunii	I_d	W_d	Poziţia unde se calculează
Triunghi echilateral cu latura *a*.	$0{,}0216\ a^4$	$0{,}05\ a^3$	La mijloacele laturilor
Trapez alungit $c = b_0 : b;\ h \geqslant 4b$	$\frac{hb^3}{12}(1+c)\times$ $\times(1+c)^2 -$ $-0{,}1b^4(1+c^4)$	$J_h : b$	Pe laturile neparalele, mai aproape de *b*.
Hexagon regulat cu latura *b*.	$1{,}04\ b^4$	$0{,}97\ b^3$	La mijloacele laturilor
Octogon regulat cu latura *b*.	$3{,}67\ b^4$	$2{,}6\ b^3$	La mijloacele laturilor.
Cutie	$\dfrac{2F_h^2}{\frac{h}{t_1}+\frac{b}{t}}$ $F_h = bh$	$2F_h t$ $2F_h t_1$	Punctul *B* Punctul *A*
Profile deschise cu pereţi subţiri $\tau_1 = \tau \frac{t_1}{t}$	$\frac{a}{3}(b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3 +$ $+ b_3 t_1^3 + ...)$ $\alpha_< = 1{,}0$ $\alpha_I = 1{,}12$ $\alpha_U = 1{,}20$	$I_d : t$	Pentru latura de grosime *t*.

Tabela 4.22. **Coeficienţii α, β şi γ pentru dreptunghi** (vezi tabela 4.21)

$b:h$	1	1,5	2	3	4	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,313	1/3
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,313	1/3
γ	1	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742

Rezistenţele admisibile τ_a se bazează pe folosirea uneia sau alteia din teoriile de rezistenţă, ţinînd seama şi de efectele de oboseală, de concentrarea tensiunilor (mai detaliat vezi § 4.9). Plecînd de la

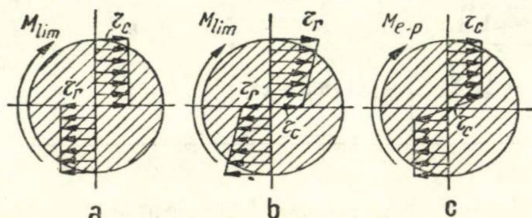


Fig. 4.33.

teoriile II, III şi V (vezi § 4.4.) valorile lui τ_a sînt respectiv $\dfrac{\sigma_a}{1+\mu}$; $0{,}5\,\sigma_a$ şi $0{,}58\,\sigma_a$. Diagramele tensiunilor pentru bara de secţiune circulară la *starea de rupere* au forma indicată în fig. 4.33, *a* material ideal plastic, *b*) cu întărire. În fig. 4.33, *c* este dată diagrama pentru starea elasto-plastică. Legătura între M_{lim} şi τ:
pentru *a*):

$$M_{lim} = \tau_c \frac{2\pi R^3}{3}$$

pentru *b*)

$$M_{lim} = \tau_c \frac{\pi R^3}{6}\left(1 + 3\frac{\tau_r}{\tau_c}\right). \tag{4.139}$$

§ 4.21. Răsucirea pură şi răsucirea împiedicată a profilelor subţiri deschise

În cazul răsucirii *pure*, secţiunile barei se deplanează liber, din cauza acţiunii momentelor de răsucire; generatoarele rămîn drepte (fig. 4.34); deplanarea u a unui punct oarecare B este:

$$u = -\gamma y = -\frac{d\varphi}{dx}yz = -\theta\omega = -\varphi'\omega \tag{4.140}$$

unde: $\omega = yz$ este aşa-numita *coordonată sectorială* a punctului B (vezi capitolul 4.5). Tensiunile τ şi deformaţiile de răsucire pură φ se determină cu formulele (4.138) § 4.20 (vezi ultimul rînd din tabela 4.21). În secţiunile transversale nu există tensiuni normale.

Răsucirea *împiedicată* (fig. 4.35) este însoţită de o încovoiere a generatoarelor, care are loc fie ca urmare a imposibilităţii deplanării libere pentru o secţiune oarecare, fie din cauza variaţiei sarcinii sau a secţiunilor barei; ecuaţia diferenţială a răsucirii este

$$M_x = GI_d\varphi' - EI_\omega\varphi''' \quad \text{sau} \quad m = M'_x = GI_d\varphi'' - EI_\omega\varphi^{IV}. \qquad (4.141)$$

Primii termeni din partea dreaptă iau în considerare efectul de răsucire liberă, la care tensiunile $\bar{\tau}$ se determină cu formula (4.138); ten-

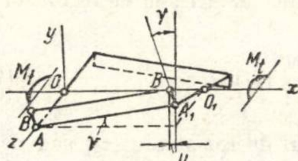


Fig. 4.34.

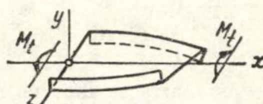


Fig. 4.35.

siunile secundare $\bar{\bar{\tau}}$ depind de termenul al doilea $M_\omega = -EI_\omega\varphi'''$ şi se calculează după formula

$$\bar{\bar{\tau}} = \frac{M_\omega}{tI_\omega} S^0_\omega \qquad (4.142)$$

unde: $I_\omega = \int_A \omega^2 \, dA$ este momentul de inerţie sectorial, iar $S^0_\omega = \int_{A_{ab}} \omega dA$ este momentul static sectorial al porţiunii din suprafaţa secţiunii (vezi capitolul 4.5); $m = \dfrac{dM_x}{dx}$.

La răsucirea împiedicată apar tensiuni normale suplimentare

$$\sigma_\omega = \frac{B \cdot \omega}{I_\omega}; \quad B = EI_\omega\varphi'' \qquad (4.143)$$

unde, după Vlasov[1]), B este bimomentul. Integrala ecuaţiei (4.141) cu $k = \sqrt{GI_d : EI_\omega}$, are forma:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{k} \operatorname{sh} kx + \frac{B_0}{EI_\omega k^2} (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_{x0}}{EI_\omega k^3} (kx - \operatorname{sh} kx) +$$
$$+ \frac{m_0}{EI_\omega k^4} \left(\frac{k^2x^2}{2!} - \operatorname{ch} kx + 1 \right) + \ldots; \qquad (4.144)$$

---

[1]) Власов В.З., Тонкостенные упругие стрежни, Физматгиз, 1958.

unde φ_0, φ'_0, B_0, M_{x0}, m_0 sînt parametrii inițiali (la $x = 0$). Pentru k foarte mic (pereți foarte subțiri), ecuația (4.144) ia forma simplificată

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi'_0 x + \frac{1}{EI_\omega}\left(\frac{B_0 x^2}{2} - \frac{M_{x0} x^3}{6} - \frac{m_0 x^4}{24} + \ldots\right) \quad (4.145)$$

§ 4.22. Calculul unui arbore la răsucire

Diagrame M_t

La un arbore care transmite o putere N, CP, cu turația n rot/min, momentul de răsucire este

$$M_t = 2{,}25 \frac{N}{\pi n}\ [\text{t}\cdot\text{m}]. \quad (4.146)$$

Dimensionarea se face pe criteriul de rezistență (τ_a) sau de rigiditate (φ_a), utilizînd formulele din § 4.20. În prealabil se construiesc diagramele lui M_t pentru punerea în evidență a momentelor de calcul; ordonata în fiecare secțiune a diagramei este egală cu rezultanta momentelor de răsucire exterioare, care acționează într-o parte a acestei secțiuni. În fig. 4.36 este redată diagrama pentru două cazuri de acționare. În cazul a, momentul M_0 al roții motoare transmite axului o putere $N_0 = 534$ CP, la o turație $n = 960$ rot/min. El se distribuie la diversele roți în următoarele rapoarte: $M_a : M_b : M_c = 0{,}2 : 0{,}3 : 0{,}5$. După formula (4.146), $M_0 = 2{,}25 \times \times \frac{534}{3{,}14\cdot 960} = 0{,}4$ tm; respectiv $M_a = 0{,}08$ t·m; $M_b = 0{,}12$ t·m; $M_c = 0{,}20$ t·m. Pe diagramă, s-au notat cu semnul + rezultantele momentelor exterioare, care se rotesc, față de normala exterioară (a secțiunii transversale) invers mersului acelor ceasornicului. Momentul de calcul este $M_{max} = 0{,}2$ t·m. Luînd $\tau_a = 475$ kgf/cm², calculul de rezistență dă raza $R = \sqrt[3]{2M : \pi\tau_a} = 3$ cm; din calculul de rigiditate luînd $\varphi_a = 0{,}6°$/m, sau 0,0103 1/m și la $G = 8\cdot 10^5$ kgf/cm², se obține.

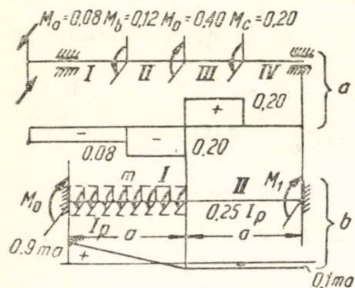


Fig. 4.36.

$$R = \sqrt[4]{2Ml/\varphi_a G} = 3{,}5 \text{ cm}.$$

Se ia $d = 2R = 7$ cm.

În cazul b, pe porțiunea I, $M_{\text{I}} = M_0 - mx$, unde $0 \leqslant x \leqslant a$; pe

porţiunea II, $M_{II} = M_0 - ma$. Pentru determinarea momentelor de reacţiune M_0 şi M_1 se scrie ecuaţia de deformaţii

$$\int_0^a \frac{M_I dx}{GI_p} + \frac{M_{II} a}{G\,0,25\,I_p} = 0,$$

de unde $M_0 = 0,9\ ma$; $M_1 = 0,1\ ma$.

Bibliografie

1. Vezi capitolul 4.1.
2. Власов В. З. Тонкостенные упругие стрежни, Физматгиз, 1958.
3. Тимошенко С. П., Устройчивость упругих систем, Гостехиздат, 1955.

4.5
Încovoiere

§ 4.23. Formule de bază

Tensiunile normale, la încovoierea pură, în secţiunea transversală a unei bare drepte sînt (fig. 4.37):

$$\left.\begin{aligned} \sigma(y) &= \frac{M}{I_z}\,y, \\ \sigma &= \frac{M}{W_z}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.147)$$

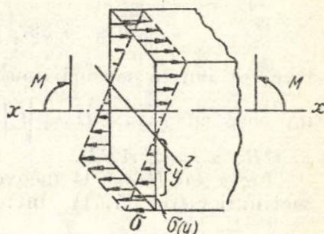


Fig. 4.37.

unde M este momentul încovoietor, egal cu momentul (faţă de axa Oz) forţelor exterioare, aşezate pe o parte a secţiunii date (tabela 4.28), I_z şi W_z sînt respectiv momentul de inerţie al suprafeţei secţiunii barei faţă de axa neutră Oz (tabela (4.23, 4.27) şi modulul de rezistenţă al aceleiaşi suprafeţe; y este distanţa de la axa Oz pînă la punctul curent unde se măsoară tensiunea $\sigma(y)$.

Tensiunea tangenţială, după formula lui Juravski (fig. 4.38) este

$$\tau = \frac{TS}{bI_z} \qquad (4.148)$$

unde T este forţa tăietoare, egală cu suma proiecţiilor, pe perpendiculara la axa neutră, a forţelor exterioare, situate de o parte a secţiunii (tabela 4.28); b este lăţimea secţiunii la nivelul unde se măsoară τ; $S = \int_{A_1} y\,\mathrm{d}A$, este momentul static al părţii de secţiune A_1 (situată sub linia pe care se măsoară τ), calculat faţă de axa Oz. *Tensiunile principale* (vezi formula (4.16) sînt:

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{\sigma(y)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2(y) + 4\tau^2}. \tag{4.149}$$

Tensiunea σ_{max} este înclinată faţă de direcţia axei Ox (fig. 4.39) cu unghiul α (luat pozitiv în sens opus mersului acelor ceasornicului) dat de formulele:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma(y)} \quad \text{sau} \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\tau}{\sigma_{max}} = \frac{\tau}{\sigma_{min}} \tag{4.150}$$

σ_{min} este perpendiculară pe σ_{max}. În locul formulelor (4.149) şi (4.150) se poate utiliza *cercul lui Mohr* (fig. 4.40), care se construieşte în felul următor: se ia $OK = \sigma(y)$ şi $KD = \tau$ (dacă au valori nega-

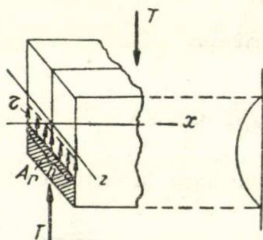


Fig. 4.38.

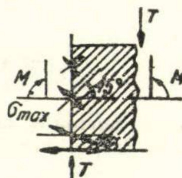


Fig. 4.39.

tive, se iau în sensuri opuse); din punctul $C(OC = CK)$ se duce un cerc cu raza $CD = \sqrt{\left(\frac{\sigma(y)}{2}\right)^2 + t^2}$, atunci $\sigma_{max} = OA$; $\sigma_{min} = OB$; $\alpha = \sphericalangle ABD$.

Legea lui Hooke la încovoiere, *curbura* $1/\rho$ şi *unghiul de rotire* al secţiunilor (fig. 4.41) sînt:

$$\sigma(y) = E\varepsilon(y) = E\frac{y}{\rho}. \tag{4.151}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}, \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{M\mathrm{d}x}{EI_z}. \tag{4.152}$$

Energia potenţială de deformaţie la încovoiere pentru un element de volum şi pentru o bară avînd variaţie continuă a lui M şi I_z, sînt:

$$\mathrm{d}W = \frac{M_2\mathrm{d}x}{2EI_z}; \quad W = \int_0^l \frac{M^2\mathrm{d}x}{2EI_z}; \tag{4.153}$$

energia de deformaţie specifică este

$$W_1 = \frac{\mathrm{d}W}{A\mathrm{d}x} = \frac{\sigma^2}{2E}. \tag{4.154}$$

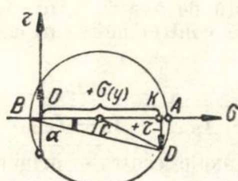


Fig. 4.40.

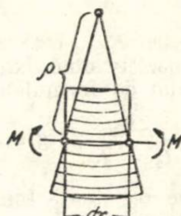


Fig. 4.41.

§ 4.24. Caracteristici geometrice ale secţiunilor

Momentele statice S_z şi S_y ale suprafeţei A a secţiunii transversale (fig. 4.42) sînt:

$$S_z = S_A y\mathrm{d}A = A \cdot d; \quad S_y = \int_A z\mathrm{d}A = A \cdot c. \tag{4.155}$$

unde c şi d sînt coordonatele centrului de greutate al suprafeţei. Momentele de inerţie [cm⁴] axiale I_z, I_y şi cel centrifugal I_{zy} sînt:

$$\left.\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2\mathrm{d}A = I_{z_0} + \mathrm{d}^2 A = i_z^2 A \\ I_y &= \int_A z^2\mathrm{d}A = I_{y_0} + c^2 A = I_y^2 A. \\ I_{zy} &= \int_A zy\mathrm{d}A = I_{z_0 y_0} + c \cdot \mathrm{d}A. \end{aligned}\right\} \tag{4.156}$$

Razele de inerţie sînt: i_z şi i_y; Cz_0 şi Cy_0 sînt axele centrale.

Momentul de inerţie polar I_p este egal cu suma celor axiale I_z şi I_y avînd polul în origina coordonatelor. La o rotire cu unghiul α a axelor de coordonate zy, momentele de inerţie devin:

$$\left.\begin{aligned} I_{z1} &= I_z \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha; \\ I_{y_1} &= I_z \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + I_{zy} \sin 2\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{4.157}$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha = -0{,}5 \frac{\mathrm{d}I_{z_1}}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{4.158}$$

Momentele de inerție principale, corespunzătoare originei coordonatelor în punctul O, sînt:

$$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}. \qquad (4.159)$$

Axa pentru I_{max} este înclinată, față de axa Oz (fig. 4.42), cu unghiul α pozitiv cînd axa Oz se rotește contrar mersului acelor ceasornicului dat de formulele

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_{zy}}{I_{max} - I_y} = -\frac{I_{zy}}{I_z - I_{min}}. \qquad (4.160)$$

Modulele de rezistență [cm³] față de axele centrale principale ale secțiunii sînt:

$$W_z = I_z/y_{max}; \quad W_y = I_y/z_{max}. \qquad (4.161)$$

Pentru profile cu pereți subțiri (fig. 4.43) se introduc în plus, caracteristicile sectoriale: *coordonata sectorială* ω [cm²], *momentul*

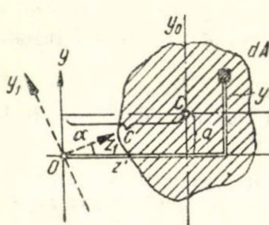


Fig. 4.42.

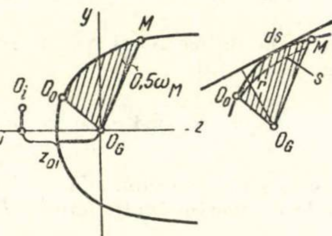


Fig. 4.43.

static sectorial al suprafeței S_ω [cm⁴], *momentele statice liniare — sectoriale* $S_{\omega z}$ și $S_{\omega y}$ (cm⁵) și *momentul de inerție sectorial* I_ω (cm⁶) ale suprafeței A:

$$\left.\begin{aligned} &\omega = \int_0^S r\,\mathrm{d}s, \quad S_\omega = \int_A \omega\,\mathrm{d}A, \quad S_{\omega z} = \int_A \omega y\,\mathrm{d}A, \\ &S_{\omega y} = \int_A \omega z\,\mathrm{d}A, \quad I_\omega = \int_A \omega^2\,\mathrm{d}A. \end{aligned}\right\} \qquad (4.162)$$

Cele mai simple formule de calcul se obțin, utilizînd, pe lîngă centrul de greutate (care servește drept pol pentru calculul coordonatelor ω), punctul sectorial de zero principal O_0 (avînd coordonata sectorială ω_0) și centrul de încovoiere O_t (cu coordonatele z_{0_i} și y_{0_i}):

$$\omega_0 = S_{\omega_1}:A; \quad z_{0_i} = -S_{\omega z}/I_z; \quad y_{0_i} = S_{\omega y}/I_y, \qquad (4.163)$$

unde: y, z, ω, precum și I_z și I_y sînt coordonate și momente de inerție față de axele centrale principale, avînd polul în centrul de

greutate O_G; S_{ω_1} este momentul static sectorial față de o origine oarecare. Se pot scrie următoarele relații:

$$\left.\begin{aligned} &S_{\omega_1} = S_\omega + \omega_0 A, \quad S_{z\omega_1} = S_{z\omega}, \quad S_{y\omega_1} = S_{y\omega} \\ &I_\omega = \int_A \omega^2 \,\mathrm{d}A = \int_A \omega\omega_1 \,\mathrm{d}A, \quad I_{\omega_1} = I_\omega + \omega_0^2 A. \end{aligned}\right\} \qquad (4.164)$$

unde ω este coordonata sectorială față de centrul de greutate. Dacă polul coordonatei ω se mută din centrul de greutate în punctul de coordonatele $z = a_1$ și $y = a_2$ (fig. 4.43), atunci

$$\left.\begin{aligned} S_{z\omega_1} &= S_{z\omega} + a_1 I_z, \\ S_{y\omega_1} &= S_{y\omega} - a_2 I_y \end{aligned}\right\} \qquad (4.165)$$

Pentru profilele deschise, la utilizarea formulelor (4.161) — (4.164) se folosește metoda grafo-analitică de integrare. În fig. 4.44 sînt

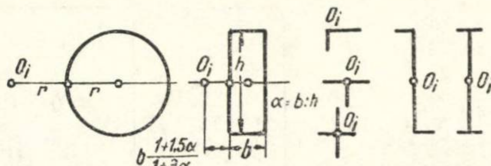


Fig. 4.44.

date diagramele de variație a coordonatelor ω, y și z pentru un profil U de grosime constantă t, cu laturile b și h, avînd suprafața $A = t(2b + h)$ și coordonata centrului de greutate (punctul $O : c = S_{y_1} : A = b^2 t : A = b^2(2b + h)$; $S_\omega = 0$ (suprafața diagramei ω); prin urmare, punctul sectorial principal este așezat pe axa Oz; $S_{y\omega} = 0$, deoarece diagramele lui ω și z sînt reciproc ortogonale; deci, $y_{0_i} = 0$; înmulțirea diagramelor ω și y prin metoda Vereșciaghin (capitolul 4.9) determină

$$S_{z\omega} = \frac{b^2 h^2 t(h + 3b)}{3(2b + h)}$$

și $I_z = \dfrac{th^2}{12}(h + 6b)$;

de aceea

$$z_{0_i} = -4b^2 \frac{h + 3b}{(2b + h)\ (h + 6b)}.$$

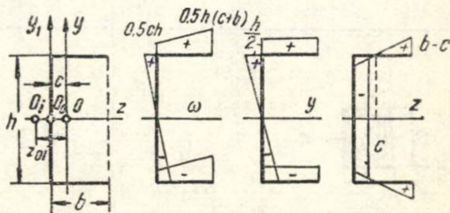


Fig. 4.45.

În fig. 4.45 sînt indicate centrele de încovoiere O_i pentru cîteva profile.

§ 4.25. Formule ale momentelor de inerţie şi modulelor de rezistenţă

T a b e l a 4.23. **Momente de inerţie şi module de rezistenţă axiale**

Forma secţiunii	I_z	I_y	I_{zy}	W_z
	$\frac{bh^3}{3}$	$\frac{hb^3}{3}$	$\frac{b^3h^2}{4}$	—
	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	$\frac{bh^2}{6}$
	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h^4}{12}$	0	$\frac{h^2\sqrt{2}}{12}$
	$\frac{bh^3}{12}(1-\beta c^3)$ $\beta=b_1:b$ $c=h_1:h$	$\frac{hb^3}{12}(1-c\beta^3)$	0	$\frac{bh^2}{6}(1-\beta c^3)$
	$\frac{bh^3}{12}(1-\beta c^3)$ $c=h_1:h$ $\beta=b_1:b$	$\frac{hb^3}{12}[1-c\beta(3-$ $-3\beta+\beta^2)]$	0	$\frac{bh^2}{6}(1-\beta c^3)$

Tabela 4.23 (*continuare*)

Forma secțiunii	I_z	I_y	I_{zy}	W_z
	$\frac{bh^3}{12}[(1-\beta c^2)^2-$ $-4\beta c(1-c)^2]$ $\beta=b_1:b$ $c=h_1:h$	Coordonata centrului $e=\frac{h}{2}\frac{1-\beta c^2}{1-\beta c}$	–	$I_z:e$
	$\frac{h^4}{12}(1-c^4)$	$\frac{h^4}{12}(1-c^4)$	0	$\frac{h^3}{12}\sqrt{2}(1-c^4)$
	$\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi r^4}{4}$		0	$\frac{\pi d^3}{32}=\frac{\pi r^3}{4}$
	$\frac{\pi d^4}{64}(1-c^4)=\frac{\pi r^4}{4}(1-c^4)$ $c=d_1:d$		0	$\frac{\pi d^3}{32}(1-c^4)$
	$\pi r^3 t$ $t \ll r$	$\pi r^3 t$	0	$\pi r^2 t$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16}r^4$	$\frac{5\sqrt{3}}{16}r^4$	0	$\frac{5}{8}r^3$

Tabela 4.23 (*continuare*)

Forma secţiunii	I_z	I_y	I_{zy}	W_z
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} r^4$	$\frac{5\sqrt{3}}{16} r^4$	0	$\frac{5\sqrt{3}}{16} r^3$
Poligon regulat înscris într-un cerc de rază R; A este suprafaţa poligonului	$\approx A \frac{R^2}{4}$	$\frac{AR^2}{4}$	0	$\frac{AR}{4}$
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	0	$\frac{bh^2}{24}$
	$\frac{bh^3}{12}(1+c_1+c_1^2)$ $c_1=h_1:h$	$\frac{hb^3}{4}$	$\frac{h^2b^2}{12}(1{,}5+c_1)$	–
$y=\frac{h}{b^n}z^n$	$\frac{bh^3}{3}(1+3n)$	$\frac{hb^3}{n+3}$	$\frac{h^2b^2}{4(n+1)}$	Suprafaţa $A=\frac{bh}{n+1}$. Coordonata centrului $c=\frac{b}{n+2}$

Tabela 4.23 (*continuare*)

Forma secțiunii	I_z	I_y	I_{zy}	W_z
	$\frac{r^4}{8}(\alpha - 0{,}5 \sin 2\alpha)$	$\frac{r^4}{8}(\alpha + 0{,}5 \sin 2\alpha)$	$\frac{r^4}{8}\sin^2\alpha$	Coordonatele centrului: $c = \frac{2}{3}\frac{r \sin\alpha}{\alpha}$ $d = \frac{2r}{3}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}$
	$r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) = 0{,}11\ r^4$	$\frac{\pi r^4}{8}$	0 Coordonata centrului $c = 0{,}425\ r$	$0{,}191\ r^3$
	$0{,}11\ r^4(1-e^4)$ $e = r_1 : r$	$\frac{\pi r^4}{8}(1-e^4)$	0 Coordonata centrului $c = 0{,}425\ r \times \times \frac{1+e+e^2}{1+e}$	$I_z : (r-c)$
	$\frac{\pi a^3 b}{4}$	$\frac{\pi a b^3}{4}$	0	$\frac{\pi a^2 b}{4}$
	$\frac{\pi a^3 b}{4}(1-\beta\alpha^3)$ $\alpha = a_1 : a$ $\beta = b_1 : b$	$\frac{\pi a b^3}{4}(1-\beta^3\alpha)$	0	$\frac{\pi a^2 b}{4}(1-\beta\alpha^3)$

T a b e l a 4.23, a. **Oțel cornier cu aripi egale**

Dimensiuni, greutăți, valori statice[1])

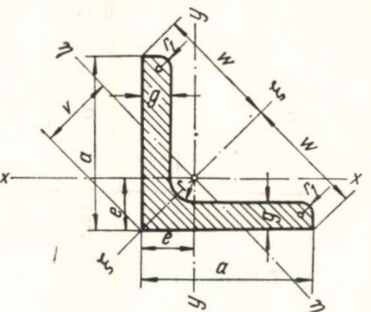


Fig. 4.23 a

I = Momentul de inerție
W = Modulul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$ = Raza de girație

} raportate la axa de încovoiere respectivă

Denumire	Dimensiuni [mm]				Secțiune S [cm²]	Greutate G [kgf/m]	Distanța axelor [cm]			Pentru axa de încovoiere								
										$x-x=y-y$			$\xi-\xi$			$\eta-\eta$		
L	a	g	r	r_1			e	w	v	I_x [cm⁴]	W_x [cm³]	i_x [cm]	I_ξ [cm⁴]	W_ξ [cm³]	I_ξ [cm]	I_η [cm⁴]	W_η [cm³]	i_η [cm]
20 × 20 × 3	20	3	3,5	2	1,12	0,88	0,60	1,41	),85	0,39	0,28	0,59	0,62	0,44	0,74	0,15	0,18	0,37
20 × 20 × 4		4			1,45	1,14	0,64		),90	0,48	0,35	0,58	0,77	0,55	0,73	0,19	0,21	0,36
25 × 25 × 3	25	3	3,5	2	1,42	1,12	0,73	1,77	1,03	0,79	0,45	0,75	1,27	0,72	0,95	0,31	0,30	0,47
25 × 25 × 4		4			1,85	1,45	0,76		1,08	1,01	0,58	0,74	1	0,91	0,93	0,40	0,37	0,47
30 × 30 × 4	30	4	5	2,5	2,27	1,78	0,89	2,12	1,24	1,81	0,86	0,89	2,85	1,34	1,12	0,76	0,61	0,58
35 × 35 × 4	35	4	5	2,5	2,67	2,10	1,00	2,47	1,41	2,96	1,18	1,05	4,68	1,89	1,33	1,24	0,88	0,68
40 × 40 × 4	40	4	6	3	3,08	2,42	1,12	2,83	1,58	4,48	1,56	1,21	7,09	2,51	1,52	1,86	1,18	0,78
40 × 40 × 5		5			3,79	2,97	1,16		1,64	5,43	1,91	1,20	8,64	3,05	1,51	2,22	1,35	0,77

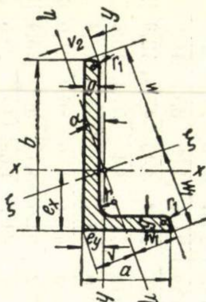
45×45×5	45	5	7	3,5	4,30	3,38	1,28	3,18	1,81	7,83	2,43	1,35	12,4	3,90	1,70	3,25	1,80	0,87
50×50×5		5			4,80	3,77	1,40		1,98	11,0	3,05	1,51	17,4	4,92	1,90	4,59	2,32	0,98
50×50×6	50	6	7	3,5	5,69	4,47	1,45	3,54	2,04	12,8	3,61	1,50	20,4	5,76	1,89	5,24	2,57	0,96
50×50×7		7			6,56	5,15	1,49		2,11	14,6	4,15	1,49	23,1	6,53	1,88	6,02	2,85	0,96
60×60×6		6			6,91	5,42	1,69		2,39	22,8	5,29	1,82	36,1	8,51	2,29	9,43	3,95	1,17
60×60×8	60	8	8	4	9,03	7,09	1,77	4,24	2,50	29,1	6,88	1,80	46,1	10,9	2,26	12,1	4,84	1,16
60×60×10		10			11,1	8,69	1,85		2,62	34,9	8,41	1,78	55,1	13,0	2,23	14,6	5,57	1,15
70×70×7	70	7	9	4,5	9,40	7,38	1,97	4,95	2,79	42,4	8,43	2,12	67,1	13,6	2,67	17,6	6,31	1,37
70×70×9		9			11,9	9,34	2,05		2,90	52,6	10,6	2,10	83,1	16,8	2,64	22,0	7,59	1,36
80×80×8	80	8	10	5	12,3	9,66	2,26	5,66	3,20	72,3	12,6	2,42	115	20,3	3,06	29,6	9,25	1,55
80×80×10		10			15,1	11,9	2,34		3,31	87,5	15,5	2,41	139	24,6	3,03	35,9	10,9	1,54
90×90×9	90	9	11	5,5	15,5	12,2	2,54	6,36	3,59	116	18,0	2,74	184	28,9	3,45	47,8	13,3	1,76
90×90×11		11			18,7	14,7	2,62		3,70	138	21,6	2,72	218	34,3	3,41	57,1	15,4	1,75
100×100×10		10			19,2	15,1	2,82		3,99	177	24,7	3,04	280	39,6	3,82	73,3	18,4	1,95
100×100×12	100	12	12	6	22,7	17,8	2,90	7,07	4,10	207	29,2	3,02	328	46,4	3,80	86,2	21,0	1,95
100×100×14		14			26,2	20,6	2,98		4,21	235	33,5	3,00	372	52,6	3,77	98,3	23,4	1,94
120×120×11	120	11	13	6,5	25,4	19,9	3,36	8,49	4,75	341	39,5	3,66	541	63,7	4,62	140	29,5	2,35
120×120×13		13			29,7	23,3	3,44		4,86	394	46,0	3,64	625	73,6	4,59	162	33,3	2,34
130×130×12		12			30,0	23,6	3,64		5,15	472	50,4	3,97	750	81,6	5,00	194	37,7	2,54
130×130×14	130	14	14	7	34,7	27,2	3,72	9,19	5,26	540	58,2	3,94	857	93,3	4,97	223	42,4	2,53
130×130×16		16			39,3	30,9	3,80		5,37	605	65,8	3,92	959	104	4,94	251	46,7	2,52
150×150×14	150	14	16	8	40,3	31,6	4,21	10,6	5,95	845	78,2	4,58	1340	126	5,77	347	58,3	2,94
150×150×16		16			45,7	35,9	4,29		6,07	949	88,7	4,56	1510	142	5,74	391	64,4	2,93

Greutatea teoretică este calculată cu greutatea specifică 7,85 kgf/dm^3.

[1]) Nu sînt cuprinse în prezentul standard profilele speciale pentru construcţii navale.

Tabela 4.23, b. **Oțel cornier**

Dimensiuni, greutăți, valori statice[1])



Denumire L	a	b	g	r	r_1	Secțiune S [cm²]	Greutate G [kgf/m]	e_x	e_y	w	w_1	v
	Dimensiuni [mm]							Distanța axelor [cm]				
40× 60× 5	40	60	5	6	3	4,79	3,76	1,96	0,97	4,08	3,01	1,68
40× 60× 6			6			5,68	4,46	2,00	1,01	4,06	3,02	1,72
40× 60× 7			7			6,55	5,14	2,04	1,05	4,04	3,03	1,77
50× 65× 7	50	65	7	6,5	3,5	7,60	5,97	2,07	1,39	4,50	3,62	2,19
50× 65× 9			9			9,58	7,52	2,15	1,41	4,48	3,63	2,28
65× 80× 6	65	80	6	8	4	8,41	6,60	2,39	1,65	5,61	4,63	2,69
65× 80× 8			8			11,0	8,66	2,47	1,73	5,59	4,65	2,79
65× 80×10			10			13,6	10,7	2,55	1,81	5,56	4,68	2,90
75× 100×7	75	100	7	10	5	11,9	9,32	3,06	1,83	6,96	5,42	3,10
75×100× 9			9			15,1	11,8	3,15	1,91	6,91	5,45	3,22
75×100×11			11			18,2	14,3	3,23	1,99	6,87	5,49	3,32
80×120× 8	80	120	8	11	5,5	15,6	12,2	3,83	1,87	8,23	5,99	3,27
80×120×10			10			19,1	15,0	3,92	1,95	8,18	6,03	3,37
80×120×12			12			22,7	17,8	4,00	2,03	8,14	6,06	3,46
100×150×10	100	150	10	13	6,5	24,2	19,0	4,80	2,34	10,3	7,50	4,10
100×150×12			12			28,7	22,6	4,89	2,42	10,2	7,53	4,19
100×150×14			14			33,2	26,1	4,97	2,50	10,2	7,56	4,28

Greutatea teoretică este calculată cu greutatea specifică 7,85 kgf/dm³.

[1]) Nu sînt cuprinse profilele speciale pentru construcții navale.

cu aripi neegale

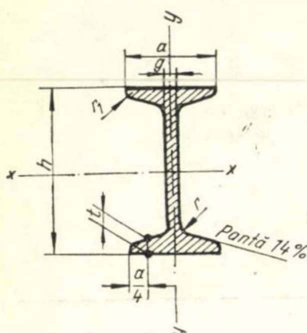
I = Momentul de inerție
W = Modulul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$ = Raza de girație

} raportate la axa de încovoiere respectivă

		Poziția axei $\eta-\eta$ tg α	Pentru axa de încovoiere									
			$x-x$			$y-y$			$\xi-\xi$		$\eta-\eta$	
v_1	v_2		I_x [cm⁴]	W_x [cm³]	i_x [cm]	I_y [cm⁴]	W_y [cm³]	i_y [cm]	I_ξ [cm⁴]	i_ξ [cm]	I_η [cm⁴]	i_η [cm]
2,09	1,10	0,437	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,50	0,86
2,08	1,12	0,433	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,12	0,85
2,07	1,14	0,429	23,0	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	2,00	4,73	0,85
2,37	1,52	0,574	31,0	6,99	2,02	15,8	4,31	1,44	38,4	2,25	8,37	1,05
2,36	1,57	0,567	38,2	8,77	2,00	19,4	6,39	1,42	47,0	2,22	10,5	1,05
2,94	2,01	0,649	52,8	9,41	2,51	31,2	6,44	1,93	68,5	2,85	15,6	1,36
2,94	2,05	0,645	68,1	12,3	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	2,82	20,3	1,36
2,95	2,11	0,640	82,2	15,1	2,46	48,3	10,3	1,89	106	2,79	24,8	1,35
3,61	2,18	0,553	118	17,0	3,15	56,9	10,0	2,19	145	3,49	30,1	1,59
3,63	2,22	0,549	148	21,5	3,13	71,0	12,7	2,17	181	3,47	37,8	1,59
3,65	2,27	0,545	176	25,9	3,11	84,0	15,3	2,15	214	3,44	45,4	1,58
4,20	2,16	0,441	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,29	261	4,10	45,8	1,72
4,19	2,19	0,438	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,27	318	4,07	56,1	1,71
4,18	2,25	0,433	323	40,4	3,77	114	19,1	2,25	371	4,04	66,1	1,71
5,25	2,68	0,442	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	5,13	112	2,15
5,24	2,73	0,439	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	749	5,10	132	2,15
5,23	2,77	0,435	744	74,1	4,73	264	35,2	2,82	856	5,07	152	2,14

Tabela 4.23 c. **Oțel I**

Dimensiuni, greutăți, valori statice[1])

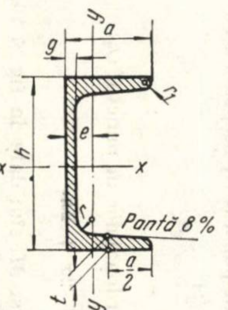


I = Momentul de inerție
W = Modulul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$ = Raza de girație

} raportate la axa de încovoiere respectivă

Denumirea I	Dimensiuni [mm]					Secțiunea S [cm²]	Greutatea G [kgf/m]	Pentru axa de încovoiere					
								X–X			Y–Y		
	h	a	t	$g=r$	r_1			I_x [cm⁴]	W_x [cm³]	i_x [cm]	I_y [cm⁴]	W_y [cm³]	i_y [cm]
8	80	42	5,9	3,9	2,3	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
10	100	50	6,8	4,5	2,7	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
12	120	58	7,7	5,1	3,1	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
14	140	66	8,6	5,7	3,4	18,3	14,4	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40
16	160	74	9,5	6,3	3,8	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
18	180	82	10,4	6,9	4,1	27,9	21,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
20	200	90	11,3	7,5	4,5	33,5	26,3	2140	214	8,00	117	26,0	1,87
22	220	98	12,2	8,1	4,9	39,6	31,1	3060	278	8,80	162	33,1	2,02
24	240	106	13,1	8,7	5,2	46,1	36,2	4250	354	9,59	221	41,7	2,20
26	260	113	14,1	9,4	5,6	53,4	41,9	5740	442	10,4	288	51,0	2,32
28	280	119	15,2	10,1	6,1	61,1	48,0	7590	542	11,1	364	61,2	2,45
30	300	125	16,2	10,8	6,5	69,1	54,2	9800	653	11,9	451	72,2	2,56
32	320	131	17,3	11,5	6,9	77,8	61,1	12510	782	12,7	555	84,7	2,67
36	360	143	19,5	13,0	7,8	97,1	76,2	19610	1090	14,2	818	114	2,90
40	400	155	21,6	14,4	8,6	118	92,6	29210	1460	15,7	1160	149	3,73

[1]) Greutatea teoretică este calculată cu greutatea specifică 7,85 kgf/dm³
Nu sînt cuprinse profilele speciale pentru construcții navale.



T a b e l a 4.23, d. **Oțel U**

Dimensiuni, greutăți și valori statice[1])

Dimensiuni în mm

I = Momentul de inerție
W = Modulul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$ = Raza de girație

} raportate la axa de încovoiere respectivă

Denumirea U	Dimensiunile [mm]					Secțiunea S [cm²]	Greutatea G [kgf/m]	Pentru axa de încovoiere						e [cm]
								$X-X$			$Y-Y$			
	h	a	g	$t=r$	r_1			I_x [cm⁴]	W_x [cm³]	i_x [cm]	I_y [cm⁴]	W_y [cm³]	i_y [cm]	
6¹/₂	65	42	5,5	7,5	4	9,03	7,09	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	1,42
8	80	45	6	8	4	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	1,45
10	100	50	6	8,5	4,5	13,5	10,6	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	1,55
12	120	55	7	9	4,5	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	1,60
14	140	60	7	10	5	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	1,75
16	160	65	7,5	10,5	5,5	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	1,84
18	180	70	8	11	5,5	28,0	22,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	1,92
20	200	75	8,5	11,5	6	32,2	25,3	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	2,01
22	220	80	9	12,5	6,5	37,4	29,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,30	2,14
24	240	85	9,5	13	6,5	42,3	33,2	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	2,23
26	260	90	10	14	7	48,3	37,9	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	2,36
30	300	100	10	16	8	58,8	46,2	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	2,70

Greutatea teoretică este calculată luînd ca bază greutatea specifică a oțelului de 7,85 kgf/dm³.

[1]) Nu sînt cuprinse profilele speciale pentru construcții navale și pentru vagoane.

§ 4.26. Ecuații generale pentru bare drepte. Diagrame

Intensitatea sarcinii transversale q (tm/), forța tăietoare T(t) și momentul încovoietor M (t · m) sînt legate între ele prin relațiile (fig. 4.46):

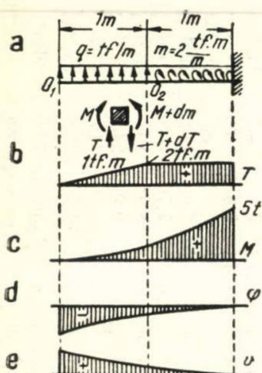


Fig. 4.46.

$$q = \frac{dT}{dx}, \qquad T = \frac{dM}{dx}. \qquad T + m = \frac{dM}{dx}; \tag{4.166}$$

$$M = \int_0^x (T + m)\,dx + C_1, \qquad T = \int_0^x q\,dx + C_2 \tag{4.167}$$

unde m este intensitatea momentului distribuit; C_1 și C_2 sînt parametrii inițiali. Sensurile pozitive pentru q, m, T și M sînt definite în fig. 4.46. Ecuațiile generale pentru T și M sînt:

$$T = T_0 + q_0 x + q_0' \frac{x^2}{2!} + q_0'' \frac{x^3}{3!} + \ldots$$
$$M = M_0 + (T_0 + m_0)\,x + (q_0 + m_0')\frac{x^2}{2!} + (q' + m'')\frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{4.168}$$

Cu indicele $_0$ sînt notați parametrii inițiali ai funcției și ai derivatelor ei. Pentru prima porțiune a barei în consolă din fig. 4.46, atunci cînd originea coordonatelor este în punctul O_1 se poate scrie:

$$T_I = 2x; \qquad M_I = 2\frac{x^2}{2} = x^2;$$

pentru a doua porțiune, cu originea coordonatelor în punctul O_2:

$$T_{II} = 2; \qquad M_{II} = 1 + 2x + 2x.$$

Graficele acestor funcții (diagramele T și M) sînt date în fig. 4.46, b și c.

Ecuațiile diferențiale ale fibrei medii deformate (la valori mici ale săgeților v) sînt:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2}. \tag{4.169}$$

Curbura $1/\rho$, unghiul de rotire al tangentei φ şi săgeata v sînt legate prin relaţiile

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{dx};\quad \varphi=\frac{dv}{dx};\quad v=\int_0^x \varphi\, dx+D_1;\quad \varphi=\int_0^x \frac{1}{\rho}\, dx+D_2. \quad (4.170)$$

Ecuaţiile generale pentru φ şi v, cînd EI = const, sînt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0+\frac{1}{EI}\Big(M_0 x+(T_0+m_0)\frac{x^2}{2!}+(q_0+m_0')\frac{x^3}{3!}+\\ &\quad +(q'+m'')\frac{x^4}{4!}+\dots;\\ v &= v_0+\varphi_0 x+\frac{1}{EI}\Big[M_0\frac{x^2}{2!}+(T_0+m_0)\frac{x^3}{3!}+\\ &\quad +(q_0+m_0')\frac{x^4}{4!}+(q'_0+m_0'')\frac{x^5}{5!}+\dots\Big]\end{aligned}\right\} \quad (4.171)$$

Dacă sarcinile au discontinuităţi, se utilizează principiul suprapunerii efectelor sau se deplasează originea coordonatelor în punctul de discontinuitate. În fig. 4.46, păstrînd pentru a doua porţiune originea coordonatelor în punctul O_1, rezultă:

$$\varphi_{II}=\varphi_0+\frac{1}{EI}\left[2\frac{x^3}{6}-2\frac{(x-1)^3}{6}+2\frac{(x-1)^2}{2}\right]$$

$$v_{II}=v_0+\varphi_0 x+\frac{1}{EI}\left[2\frac{x^4}{24}-2\frac{(x-1)^4}{24}+2\frac{(x-1)^3}{6}\right].$$

Folosind condiţia: la $x=2$, $\varphi=0$ şi $v=0$, obţinem:

$$\varphi_0=-\frac{10}{3EI};\quad v_0=\frac{61}{12EI}.$$

Diagramele φ şi v sînt indicate în fig. 4.46, *d* şi *e*.

Tabela 4.24. **Diagrama T şi M. Valori maxime ale unghiurilor φ şi săgeţilor v**

1. Consolă cu forţă concentrată în capăt.

Reacţiunile în reazem sînt:

$$R=P;\quad M_R=Pl;\quad T(x)=-P;$$
$$M(x)=-Px;\quad M_{max}=-Pl;$$
$$\varphi=\frac{Pl^2}{2EI},\quad v=\frac{Pl^3}{3EI}.$$

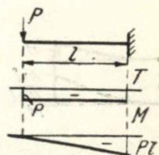
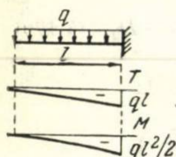


Tabela 4.24 (*continuare*)

2. Idem cu sarcină uniform distribuită:



Reacţiunea în reazim: $R = ql$; $M_R = \frac{ql^2}{2}$;

$T(x) = -qx$; $M(x) = -\frac{qx^2}{2}$;

$M_{max} = -\frac{ql^2}{2}$; $\varphi = \frac{ql^3}{6EI}$; $v = \frac{ql^4}{8EI}$.

3. Idem încărcată cu moment distribuit:



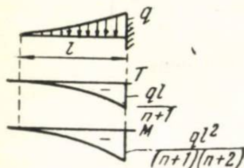
$R = 0$; $M_R = -ml$;

$T = 0$; $M = mx$;

$\varphi = \frac{ml^2}{2EI}$; $v = \frac{ml^3}{3EI}$.

4. Idem, cu o sarcină parabolică $q(x) = -\frac{q}{l^n}x^n$; $n \geqslant 0$;

$$R = \frac{ql}{n+l}; \quad M_R = \frac{ql^2}{(n+1)(n+2)};$$



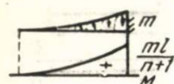
$$Q(x) = -\frac{qx^{n+1}}{l^n(n+1)};$$

$$M(x) = -\frac{qx^{n+2}}{l^n(n+1)(n+2)};$$

$$\varphi = \frac{ql^3}{(n+1)(n+2)(n+3)EI};$$

$$v = \frac{ql^4}{(n+1)(n+2)(n+4)EI}.$$

5. Idem încărcată cu momente variind după legea $m(x) = m\frac{x^n}{l^n}$;



$R = 0$; $M_R = -\frac{ml}{n+1}$; $Q=0$; $M(x) = \frac{mx^{n+1}}{l^n(n+1)}$;

$\varphi = \frac{ml^2}{(n+1)(n+2)EI}$; $v = \frac{ml^3}{(n+1)(n+3)EI}$.

Tabela 4.24 (*continuare*)

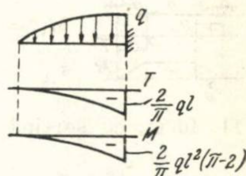
6. Idem, cu o sarcină sinusoidală $q(x) = -q \sin \frac{\pi x}{2l}$;

$$R = \frac{2}{\pi} ql; \quad M_R = \frac{2ql^2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right);$$

$$Q(x) = -\frac{2ql}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi x}{l}\right);$$

$$M(x) = -\frac{2ql}{\pi}\left(x - \frac{2l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2l}\right);$$

$$\varphi = \frac{ql^3}{\pi EI}; \quad v = \frac{ql^4}{\pi EI}\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{\pi^3}\right).$$

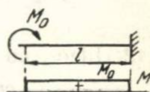


7. Idem, cu un moment concentrat:

$$R = 0; \quad M_R = -M_0;$$

$$T = 0; \quad M(x) = M_0;$$

$$\varphi = \frac{M_0 l}{EI}; \quad v = \frac{M_0 l^2}{2EI}.$$

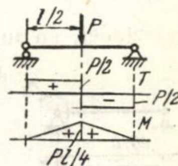


8. Grindă simplă rezemată cu o sarcină la mijloc:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2};$$

$$T_1(x) = \frac{P}{2}; \quad M_1(x) = \frac{P}{2}x; \quad M_{max} = -\frac{Pl}{4};$$

$$\varphi = \frac{Pl^2}{16\,EI}; \quad v = \frac{Pl^3}{48\,EI}.$$



9. Idem, cu sarcină într-un punct oarecare:

Reacțiunea în reazim: $R_A = \frac{Pb}{l}$;

$$R_B = \frac{Pa}{l};$$

$$T_I = R_A; \quad T_{II} = -R_B;$$

$$M_I = R_A x; \quad M_{max} = \frac{Pab}{l};$$

$$\varphi_A = \frac{Pab(b+l)}{6\,EIl}; \quad v|_{x=a} = \frac{Pa^2b^2}{3\,EIl}.$$

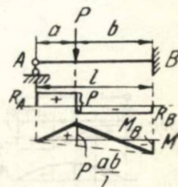
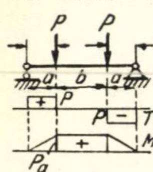


Tabela 4.24 (*continuare*)

10. Idem, cu două sarcini dispuse simetric:



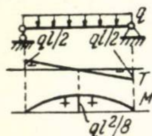
$$R_A = R_B = P;$$

$$T_I = P; \quad T_{II} = 0;$$

$$M_I = Px; \quad M_{II} = Pa = M_{max};$$

$$\varphi_A = \frac{Pa(a+b)}{2EI}; \quad v_{max} = \frac{Pa}{24EI}(8a^2 + 12ab + 3b^2).$$

11. Idem, cu sarcină uniform distribuită:

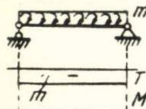


$$R_A = R_B = \frac{ql}{2};$$

$$T(x) = R_A - qx; \quad M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2}; \quad M_{max} = \frac{ql^2}{8};$$

$$\varphi = \frac{ql^3}{24EI}; \quad v = \frac{5ql^4}{384EI}.$$

12. Idem, cu moment uniform distribuit:

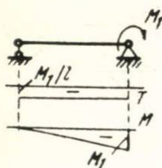


$$R_A = -R_B = -m;$$

$$T(x) = -m; \quad M(x) = 0;$$

$$\varphi = v = 0 = \text{const.}$$

13. Idem, cu un moment concentrat aplicat la extremitate:



$$R_A = -R_B = -\frac{M_1}{l};$$

$$T(x) = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = -\frac{M_1}{l}x;$$

$$\varphi_A = \frac{M_1 l}{6EI}; \quad \varphi_B = \frac{M_1 l}{3EI}; \quad v\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{M_1 l^2}{16EI}.$$

14. Idem, cu sarcină distribuită pe o porțiune, așezată simetric:



$$R_A = R_B = \frac{qb}{2}; \quad T_1 = R_A; \quad M_1 = R_A x;$$

$$M_{max} = \frac{qb}{8}(4a + b);$$

$$\varphi = \frac{qb^3}{24EI}\left(1 + 6\frac{a}{b} + 6\frac{a^2}{b^2}\right);$$

$$v = \frac{5qb^4}{384EI}\left(1 + 8\frac{a}{b} + 19{,}2\frac{a^2}{b^2} + 12{,}8\frac{a^3}{b^3}\right).$$

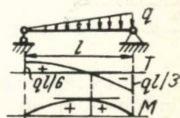
Tabela 4.24 (*continuare*)

15. Idem, cu sarcină triunghiulară $q = -\frac{q}{l}x$:

$$R_A = \frac{ql}{6};\ R_B = 2R_A;$$

$$T(x) = \frac{ql}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2}\right);\ M(x) = \frac{qlx}{6}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}};\ v\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2{,}5ql^4}{384EI}.$$



16. Idem, cu sarcina parabolică $q(x) = -q\frac{x^n}{l^n}$;

$$R_A = \frac{ql}{(n+1)(n+2)};\ R_B = R_A(n+1);$$

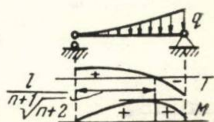
$$T(x) = R_A - \frac{qx^{n+1}}{l^n(n+1)};$$

$$M(x) = R_A x - \frac{qx^{n+2}}{l^n(n+1)(n+2)};$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{(n+2)^2\sqrt[n+1]{n+2}};$$

$$\varphi_A = \frac{ql^3(n+6)}{6(n+2)(n+3)(n+4)EI};$$

$$\varphi_B = \frac{ql^3}{3(n+2)(n+4)EI}.$$



17. Idem, cu sarcină sinusoidală $q(x) = -q\sin\frac{\pi x}{l}$;

$$R_A = R_B = \frac{ql}{\pi};$$

$$T(x) = \frac{ql}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l};\ M(x) = \frac{ql^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{\pi^2};\ \varphi = \frac{ql^3}{\pi^3 EI};\ v = \frac{ql^4}{\pi^4 EI}.$$

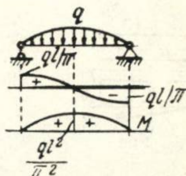
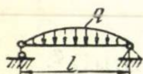


Tabela 4.24 (*continuare*)

18. Idem, cu sarcină parabolică simetrică: $q(x) = -q + q\frac{x^n}{l^n}$:



$$R_A = R_B = ql\frac{n}{n+1}.$$

Aspectul diagramelor T şi M este acelaşi ca în cazul 17. Cu originea coordonatelor în centru, rezultă:

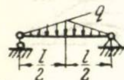
$$T(x) = -qx + \frac{qx^{n+1}}{l^n(n+1)};$$

$$M(x) = M_0 - \frac{qx^2}{2} + \frac{qx^{n+2}}{l^n(n+1)(n+2)};$$

$$M_0 = M_{max} = \frac{ql^2 n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}.$$

19. Idem, cu o sarcină triunghiulară simetrică. Forma diagramelor T și M este aceeași, ca în cazul 17:

$$R_A = R_B = \frac{ql}{4}; \quad T_1(x) = \frac{ql}{4}\left(1 - 4\frac{x^2}{l^2}\right);$$



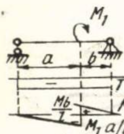
$$M_1(x) = \frac{qlx}{4}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{12};$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{5\,ql^3}{192\,EI}; \quad v = \frac{ql^4}{120\,EI}.$$

20. Idem, cu un moment concentrat într-un punct oarecare:

$$R_A = -R_B = -\frac{M_1}{l};$$



$$T(x) = -\frac{M_1}{l}; \quad MI(x) = -\frac{M_1}{l}x;$$

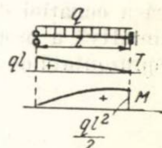
$$\varphi_A = \frac{M_1}{6\,El}(a^2 + 2ab - 2b^2);$$

$$v\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{M_1}{16\,EI}(a^2 + 2ab - 3b^2).$$

21. Grindă cu reazim mobil şi glisieră. Reacţiunea din stînga:

$R = ql$; cea din dreapta: $M_R = ql$;

$$M_R = -\frac{ql^2}{2};$$



$$T(x) = R_A - qx; \quad M(x) = qlx - \frac{qx^2}{2};$$

$$\varphi = \frac{ql^3}{3EI}; \quad v = \frac{5ql^4}{24EI}.$$

§ 4.27. Grinzi de secţiune variabilă

Ecuaţiile generale ale unghiurilor φ şi săgeţilor v pentru bare cu secţiune variabilă în trepte (fig. 4.47) sînt:

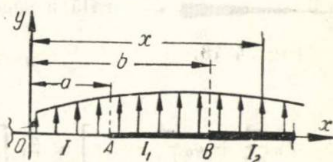


Fig. 4.47.

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{EI}\left\{M_0 x + T_0\frac{x^2}{2!} + q_0\frac{x^3}{3!} + \ldots \left(\frac{k}{k_1} - 1\right)\left[M_A(x - a) + T_A\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots\right] + \left(\frac{k}{k_2} - \frac{k}{k_1}\right)\left[M_B(x-b) + T_B\frac{(x-b)^2}{2!} + \ldots\right] + \ldots\right\}, \tag{4.172}$$

unde $k = EI$; $k_1 = EI_1$; $k_2 = EI_2 \ldots$;

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI}\left\{\frac{M_0x^2}{2!} + \frac{T_0x^3}{3!} + \frac{q_0x^4}{4!} + \ldots \ldots + \left(\frac{k}{k_1} - 1\right)\left[\frac{M_A(x-a)^2}{2!} + \frac{T_A(x-a)^3}{3!} + \frac{q_A(x-a)^4}{4!} + \ldots\right] + \left(\frac{k}{k_2} - \frac{k}{k_1}\right)\cdot\left[\frac{M_B(x-b)^2}{2!} + \frac{T_B(x-b)^3}{3!} + \ldots\right] + \frac{k}{k_1}\left[\frac{M_1x_1^2}{2!} + \frac{P_1x_1^3}{3!} + \frac{q_1x_1^4}{4!} + \ldots\right] + \ldots\right\}. \tag{4.173}$$

Aici, M_0, T_0, q_0, ... sînt parametrii iniţiali; M_A, T_A, q_A... sînt valorile în punctul de trecere de la prima la cea de a doua porţiune: M_B, T_B ... aceleaşi, la trecerea de la porţiunea *2* la *3*; dacă pe porţiunea

a doua există o sarcină suplimentară, ea se ia în considerare, cum este indicat în ultimul rînd.

Dacă bara are secţiunea continuu-variabilă şi integrarea de două ori a ecuaţiei diferenţiale este complicată, se face o rezolvare aproximativă a problemei; dacă variaţia momentului de inerţie poate fi reprezentată de formulele (fig. 4.48).

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \frac{I}{I_x} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \quad \beta_0 = F_0, \\ \beta_1 &= \frac{4F_c - 3F_a - F_b}{b}, \quad \beta_2 = 2\frac{F_a + F_b - 2F_c}{b^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.174}$$

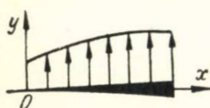


Fig. 4.48.

(unde b este lungimea porţiunii; F_a, F_b şi F_c sînt valorile lui $F(x)$ în origine, la extremitatea şi în mijlocul porţiunii), atunci ecuaţia generală a săgeţii va fi) [1]

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{I}{EI}\left\{\beta_0\left[M_0\frac{x^2}{2!} + T_0\frac{x^3}{3!} + q_0\frac{x^4}{4!} + \ldots\right] + \beta_1\left[M_0\frac{x^3}{3!} + 2T_0\frac{x^4}{4!} + 2q_0\frac{x^5}{5!} + \ldots\right] + \beta_2\left[2M_0\frac{x^4}{4!} + 6\,T_0\frac{x^5}{5!} + 12\,q_0\frac{x^6}{6!} + 20\,q_0'\frac{x^7}{7!} + \ldots\right] + \ldots\right\}. \tag{4.175}$$

Utilizînd metoda grafo-analitică a lui Mohr se procedează astfel: *a*) se construieşte diagrama curburii barei $\left(\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI(x)}\right)$, numită şi *diagrama sarcinii fictive* $\left(q_f = \frac{1}{\rho}\right)$ *b*) unghiul φ se calculează ca fiind forţa tăietoare fictivă (T_b); *c*) săgeata v este momentul încovoietor fictiv (M_f). Înlocuirea (după criteriul de egalitate a momentelor) sarcinii distribuite q_f prin una concentrată P_f se face după formula (fig. 4.49).

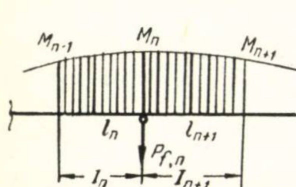


Fig. 4.49.

$$P_{f,n} = c_1 l'_n(c_2 M_{n-1} + M_n) + c_1 l'_{n+1}(M_n + c_2 M_{n+1}). \tag{4.176}$$

---

[1] Vezi N. K. Snitko, V.I.T. nr. 1, 1938.

unde $l' = l$; EI — este lungimea redusă; coeficienţii c se iau în funcţie de forma diagramei curburii:

$$\left.\begin{aligned} &\text{pentru linie frîntă} \quad c_1 = 0{,}333, \quad c_2 = 0{,}5;\\ &\text{pentru parabola de gradul II} = 0{,}417, \quad = 0{,}2;\\ &\text{pentru sinusoidă cu 6 porţiuni} = 0{,}340, \quad = 0{,}506;\\ &\text{pentru sinusoidă cu 4 porţiuni} = 0{,}348, \quad = 0{,}515. \end{aligned}\right\} \quad (4.177)$$

Pentru determinarea lui T_f şi M_f, sarcina fictivă se aplică unei grinzi fictive, avînd următoarele moduri de rezemare: la grinda reală simplu rezemată la capete, cea fictivă este de asemenea simplu rezemată; la grinda *reală* în consolă, capătul liber se schimbă în încastrare, iar încastrarea se transformă într-un capăt liber.

Se va determina săgeata grinzii din fig. 4.50, în locul de aplicare a forţei concentrate. Alegînd originea coordonatelor în reazimul din stînga şi punînd condiţia $v = 0$ la $x = 5a$, din ecuaţia (4.172), cu $k = EI$, $k_1 = 2EI$, $k_2 = 4EI$, se găseşte unghiul de rotire φ_0

$$\varphi_0 \cdot 5a + \frac{1}{k}\left\{\frac{2}{5} P \frac{(5a)^3}{6} - \frac{1}{2}\frac{2}{5} P \frac{(4a)^3}{6} - \frac{1}{4}\frac{2}{5} P \frac{(3a)^3}{6} - \right.$$

$$- \frac{1}{4} P \frac{(2a)^3}{6} - \frac{1}{4}\frac{3P}{5}\frac{a^3}{6} - \frac{1}{2}\frac{2}{5} Pa \frac{(4a)^2}{5} - \frac{1}{4}\frac{2}{5} P2a \frac{(3a)^2}{2} +$$

$$\left. + \frac{1}{4}\frac{3}{5} Pa \frac{a^2}{2}\right\} = 0,$$

de unde: $\varphi_0 = -\dfrac{89}{150k} Pa^2$. Pentru $x = 3a$, găsim, în mod analog, săgeata $v = -\dfrac{229}{300k} Pa^3$. Dacă problema se rezolvă grafo-analitic, atunci, din formula (4.176), sarcinile fictive în punctele de discontinuitate a grinzii sînt:

$$P_{f1} = \frac{Pa^2\, 8}{30k}; \quad P_{f2} = \frac{Pa^2}{30k} 8{,}5;$$

$$P_{f3} = \frac{Pa^2}{30k} \cdot 7{,}75 \text{ şi } P_{f4} = \frac{Pa^2}{30k} 6.$$

Reacţiunea sarcinii fictive în reazemul din stînga este $R_{A_f} = -\dfrac{79}{150k} Pa^2$; după adăugarea lui $P_{f_0} = -Pa^2/15k$, se obţine rezultatul anterior; săgeata, pentru $x = 3a$, coincide cu cea obţinută analitic:

$$v = -R_{A_f}\, 3a + P_{f_1}\, 2a + P_{f_2}\, a.$$

Dacă, la aceeaşi sarcină, se ia o variaţie a momentului de inerţie conform relaţiei (4.174), admiţînd, de exemplu, că pe lungimea $b =$ $= 3a$ (în stînga forţei P) $F_a = 1 : 0{,}8I = 1{,}25$; $F_c = I : 2I = 0{,}5$ şi $F_b = I : 4I = 0{,}25$, atunci $\beta_0 = 1{,}25$; $\beta_1 = -2 : 3a$; $\beta_2 = 1 : 9a^2$. Atunci, din condiţia $v = 0$, pentru $x = 5a$, găsim, din ecuaţia (4.175)

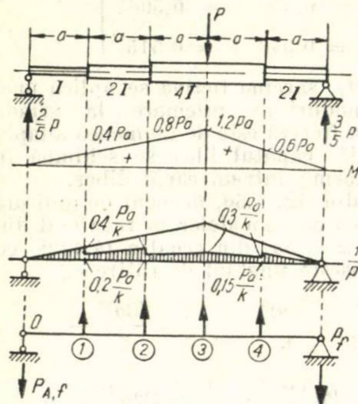


Fig. 4.50.

$\varphi_0 = -\dfrac{15{,}1}{30k} Pa^2$, iar dînd lui x valoarea $3a$, obţinem:

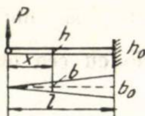
$$v = -\frac{15{,}1}{30k} Pa^2\, 3a + \frac{1}{k}\left[1{,}25 \cdot 0{,}4\, P \frac{(3a)^3}{6} - \frac{2}{3a} 2 \cdot 0{,}4\, P \frac{(3a)^4}{24} + \frac{1}{9a^2} 6 \cdot 0{,}4\, P \frac{(3a)^5}{130}\right] = -\frac{156}{300k} Pa^3.$$

adică, grinda aceasta este mai rigidă decît grinda în trepte din fig. 4.50.

Tabela 4.25. **Grinzi de egală rezistenţă la încovoiere**

Dimensiunile secţiunii se aleg în baza condiţiei $\sigma = M(x) : W(x) =$ $=$ const. în toate secţiunile; în locul în care $M(x) = 0$, secţiunea nu poate fi totuşi nulă, căci ea trebuie să asigure preluarea tensiunilor τ.

1. Bară în consolă, de înălţime constantă h, de lăţime variabilă $b = b_0 \dfrac{x}{l}$:



$$M(x) = Px;\quad W(x) = b_0 \frac{h^2}{6} \cdot \frac{x}{l};\quad I = \frac{b_0 h^3}{12};$$

$$\varphi_0 = -\frac{Pl^2}{EI};\quad v_0 = \frac{Pl^3}{2EI}.$$

2. Aceeaşi, de lăţime constantă b şi de înălţime variabilă $h = h_0 \sqrt{\frac{x}{l}}$;

$$M(x) = Px; \quad W(x) = \frac{bh_0^2}{6}\frac{x}{l}; \quad I = \frac{bh_0^2}{12};$$



$$\varphi_0 = -\frac{2Pl^2}{EI}; \quad v_0 = \frac{2}{3}\frac{Pl^3}{EI}.$$

3. Aceeaşi, de lăţime constantă b, de înălţime variabilă $h = h_0 \frac{x}{l}$:

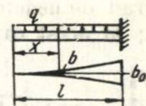
$$M(x) = \frac{qx^2}{2}; \quad W(x) = \frac{bh_0^2 x^2}{6l^2}; \quad I = \frac{bh_0^3}{12};$$



$$v_0 = \frac{ql^4}{2EI}.$$

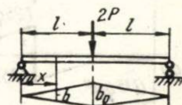
4. Aceeaşi, de înălţime constantă h şi de lăţime variabilă $b = b_0 \frac{x^2}{l^2}$:

$$M(x) = \frac{qx^2}{2}; \quad W(x) = \frac{b_0h^2}{6}\frac{x^2}{l^2}; \quad I = \frac{b_0h^2}{12};$$



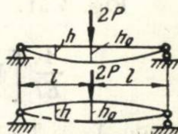
$$\varphi_0 = -\frac{ql^3}{2EI}; \quad v_0 = \frac{ql^4}{4EI}.$$

5. Grindă simplă, desenele de înălţime constantă h, de lăţime variabilă $b = b_0 \frac{x}{l}$. Se menţin formulele de la cazul 1.

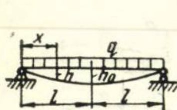


6. Aceeaşi, de lăţime constantă b, de înălţime variabilă $h = h_0 \sqrt{\frac{x}{l}}$.

Se menţin formulele cazului 2.



7. Aceeaşi, de lăţime constantă b, de înălţime variabilă $h = \frac{h_0}{l}\sqrt{2l\,x - x^2}$:

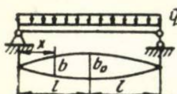


$$M(x) = \frac{q}{2}(2lx - x^2); \quad W(x) = \frac{bh_0^2}{6l^2}(2lx - x^2);$$

$$I = \frac{bh_0^3}{12}; \quad v_l = -\frac{ql^4}{2EI}.$$

8. Aceeaşi, de înălţime constantă h, de lăţime variabilă

$$b = b_0\frac{2l\,x - x^2}{l^2};$$



$$M(x) = \frac{q}{2}(2lx - x^2); \quad W(x) = \frac{b_0h^2}{6l^2}(2lx - x^2);$$

$$I = \frac{b_0h^3}{12}; \quad \varphi_0 = -\frac{ql^3}{2EI}; \quad v_l = -\frac{ql^4}{4EI}.$$

§ 4.28. Grinzi static nedeterminate

Gradul de nedeterminare statică este egală cu numărul de legături suplimentare în reazime, adică, în plan, egal cu numărul necunoscutelor, minus trei. *Metoda parametrilor iniţiali* este comodă pentru un grad de nedeterminare, nu prea mare (de obicei nu mai mare decît trei); în acest caz, se utilizează ecuaţiile generale (§ 4.26) pentru unghiurile φ şi săgeţile v, satisfăcînd condiţiilor de fixare. Drept exemplu, vom examina grinda din fig. 4.51 din $EI =$ const., adică o problemă simplu static nedeterminată. Admiţînd drept necunoscută suplimentară reacţiunea necunoscută X_1 în reazimul din dreapta, avem parametrii iniţiali (pentru reazimul din stînga): $v_0 = \varphi_0 = 0$; $M_0 = X_1 \cdot 3a - 6{,}75\,qa^2$; $T_0 = -X_1 + 2{,}25\,qa$; $q_0 = 0$; $q_0' = -q: 4{,}5\,a$.

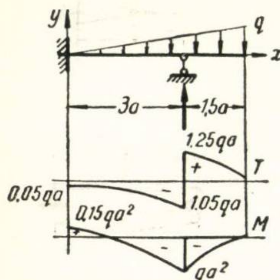


Fig. 4.51.

Utilizînd condiţia $v = 0$, pentru $x = 3a$, rezultă:

$$\frac{1}{EI}\left[M_0\frac{9a^2}{2} + T_0\frac{27a^3}{6} + q_0'\frac{243\ a^5}{120}\right] = 0.$$

de unde $X_1 = 2{,}3\ qa$; $M_0 = 0{,}15\ qa^2$; $T_0 = -\,0{,}05\ qa$.

Metoda forţelor se foloseşte, pentru grinzi continue, sub forma ecuaţiei celor trei momente (fig. 4.52).

$$M_0 l'_1 + 2M_1 (l'_1 + l'_2) + M_2 l'_2 = -\frac{6\,\Omega_1 a_1}{l_1 EI_1} - \frac{6\,\Omega_2 b_2}{l_2 EI_2}. \qquad (4.178)$$

unde l_1 şi l_2 sînt lungimile a două deschideri vecine: $l'_1 = l_1 : EI_1$; $l'_2 = l_2 : EI_2$; M_0; M_1 şi M_2 sînt momentele pe reazimele *0*, *1* şi *2*; Ω_1 şi Ω_2 sînt suprafeţele diagramelor de momente (M^0), datorită sarcinii de pe aceste deschideri, considerate ca grinzi simple rezemate; a_1 şi b_2 sînt coordonatele centrelor de greutate ale acestor diagrame.

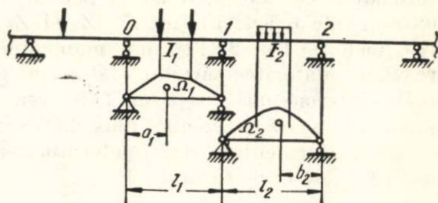


Fig. 4.52.

Pentru grinda din fig. 4.53 — dublu static nedeterminată este necesară scrierea a două ecuaţii. În acest scop, în stînga încastrării se adaugă un reazem — *1*, respectiv o deschidere de lungime $l_0 = 0$; prima ecuaţie cuprinde deschiderile l_0 şi l_1; a doua — deschiderile l_1 şi l_2. Admitem că EI = const. şi egal cu 1. Pentru calculul lui Ω se construiesc diagramele M^0 (fig. 4.53, *a*) pentru grinzile simple rezemate:

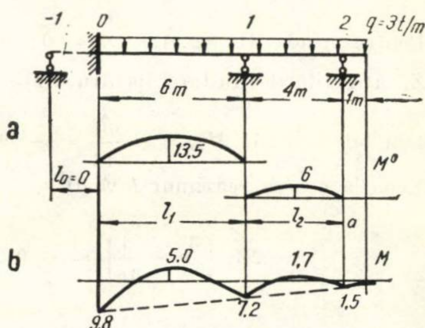


Fig. 4.53.

$$\Omega_1 = \frac{2}{3} l_1 \cdot 13{,}5 = 54;$$

$$a_1 = b_1 = 3m;$$

$$\Omega_2 = 16;\ a_2 = b_2 = 2m.$$

Prima ecuaţie (cu $M_{-1} = 0$):

$$2\,M_0 \cdot 6 + M_1 \cdot 6 = -\,6 \cdot \frac{54}{6} \cdot 3.$$

A doua ecuaţie (cu $M_2 = -\,1{,}5$) este:

$$M_0 \cdot 6 + 2M_1 \cdot 10 + M_2 \cdot 4 = -\,6 \cdot \frac{54}{6} \cdot 3 - 6 \cdot \frac{16}{4} \cdot 2.$$

Rezolvarea ecuaţiilor dă $M_0 = -\,9{,}81$ t·m; $M_1 = -\,7{,}25$ t·m. Diagrama M este arătată în fig. 4.53, *b*.

Metoda deplasărilor oferă uneori avantaje față de metoda forțelor; ecuația canonică pentru deschiderile $l_1 - l_2$ are forma ecuației celor trei unghiuri (fig. 4.52):

$$Z_0 i_1 + 2Z_1 (i_1 + i_2) + Z_2 i_2 = -0{,}5\,(M_{10}^0 + M_{12}^0), \qquad (4.179)$$

unde rigiditatea unitară i este egală cu $EI : l$ pentru deschideri intermediare și cu $0{,}75\ EI : l$ pentru cea extremă, dacă reazimul extrem este o articulație; Z_0, Z_1 și Z_2 sînt unghiurile de rotire în reazimele 0, *1* și *2*; M^0 sînt momentele de încastrare perfectă din reazime, datorite sarcinii date, în grinzile încastrate la reazimele intermediare, separate din cea continuă (vezi tabela 4.26); momentul se ia cu semnul plus dacă sarcina rotește nodul *1* în sensul acelor ceasornicului. După determinarea lui Z, momentele în grinda dată se găsesc cu formula

$$M_{12} = M_{12}^0 + 2i_2 (2Z_1 + Z_2). \qquad (4.180)$$

Pentru grinda din fig. 4.53, $Z_0 = 0$; singura necunoscută este unghiul Z_1. Rigiditățile unitare (pentru $EI = 1$) sînt: $i_1 = \frac{1}{6}$ și $i_2 = \frac{3}{16}$.

Din tabela 4.26, $M_{10}^0 = -\frac{ql_1^2}{12} = -9$; $M_{12}^0 = \frac{ql_2^2}{8} - \frac{qa^2}{4} = 5{,}25$.

Ecuația pentru reazimul *1* va fi:

$$2Z_1 \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{16}\right) = -0{,}5\,(-9 + 5{,}25),$$

de unde $Z_1 = 2{,}63$.

Determinînd momentele cu ecuația (4.180), obținem diagrama din fig. 4.53.*b*. *Metoda de calcul fără rezolvarea ecuațiilor canonice* constă în utilizarea formulei generale a momentului din reazim, care pentru un reazim oarecare *1* al deschiderii *1—2* are forma:

$$M_{12} = M_{12}^0 - M_1 \mu_{12} - M_2 \cdot 0{,}5\,\mu_{21}. \qquad (4.181)$$

unde M^0 sînt momentele inițiale, ca și în metoda deplasărilor (din tabela 4.26); μ sînt coeficienții de distribuție ai momentelor neechilibrate:

$$\mu_{12} = i_{12} : \Sigma_1 i; \quad \mu_{21} = i_{12} : \Sigma_2 i; \qquad (4.182)$$

M_1 şi M_2 sînt momentele de calcul din noduri pentru reazimele *1* şi *2*. Expresiile suficient de exacte ale momentelor, cît şi ale coeficienţilor α şi μ', care intră în ele, au forma:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= (1+\alpha_1)\left(1-\frac{\mu'_{21}}{4}\right)\left[M_1^0 - M_0^0\frac{\mu'_{01}}{2} + M_{-1}^0\frac{\mu'_{-10}\,\mu'_{01}}{4} - \dots\right] \\ M_2 &= (1+\alpha_2)\,(1-\mu'_{12})\left[M_2^0 - M_3^0\frac{\mu'_{32}}{2} + M_4^0\frac{\mu'_{43}\,\mu'_{32}}{4} - \dots\right] \end{aligned}\right\} \quad (4.183)$$

$$\alpha_{bară} = \alpha_{12} = \frac{\mu_{12}\,\mu_{21}}{4-\mu_{12}\,\mu_{21}};$$

$$\alpha_{nod} = \alpha_1 = \alpha_{10} + \alpha_{12} = \sum_1 \alpha_{bară};\ \alpha_{1-12} = \alpha_{10}; \quad (4.184)$$

$$\mu'_{12} = \mu_{12}\,(1+\alpha_{1-12});\ \mu'_{21} = \mu_{21}\,(1+\alpha_{2-12}); \quad (4.185)$$

unde M^0 sînt momentele iniţiale din noduri ($M_1^0 = M_{12}^0 + M_{10}^0$) coeficienţii α se calculează numai pentru deschiderile intermediare ale grinzii, iar μ — pentru nodurile intermediare. La grinda din fig. 4.53, $\alpha = 0$ şi calculul după formula (4.181) este elementar; deoarece există numai un singur nod intermediar (1), avem, după formula (4.182):

$$\mu_{10} = \frac{1}{6} : \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{16}\right) = 0,472;$$

$$\mu_{12} = \frac{3}{16} : \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{16}\right) = 0,528.$$

Momentul iniţial din nod, $M_1^0 = M_{10}^0 + M_{12}^0 = -9 + 5,25 = 3,75$ este după (4.183) egal cu cel de calcul M_1; de aceea, din (4.181) rezultă:

$$M_{12} = 5,25 - (-3,75)\cdot 0,528 = 7,25\ \text{t}\cdot\text{m}.$$

La bare cu trei deschideri (fig. 54) calculăm momentul M_{23} pentru

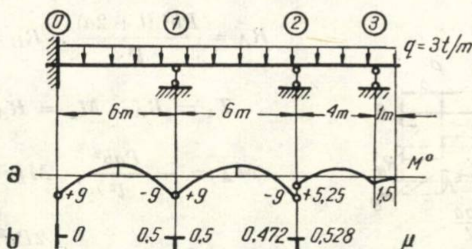


Fig. 4.54.

EI = const. În fig. 4.54, a este dată diagrama momentelor inițiale M^0, iar pe fig. 4.54, b — mărimile μ, determinate din (4.182). Utilizînd formulele (4.184) și (4.185), găsim:

$$\alpha_{12} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}472}{4 - 0{,}5\cdot 0{,}472} = 0{,}063,\ M_2 = 1{,}063\,(1 - 0)\,(-3{,}75) =$$

$$= -4,\ M_3 = 0.$$

Din (4.181) obținem $M_{23} = M_{23}^0 - M_2\cdot\mu_{23} = 5{,}25 - (-4)\cdot 0{,}528 =$

$$= 7{,}36 \text{ tf·m}.$$

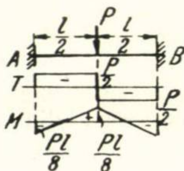
La calculul lui M_{21} trebuie recalculat M_2 după prima formulă (4.183).

$$M_2 = 1{,}063\left(1 - \frac{0{,}5}{4}\right)(-3{,}75) = -3{,}5 \text{ tf·m};\ M_1 = 0$$

$$M_{21} = -9 + 3{,}5\cdot 0{,}472 = -7{,}36 \text{ tf·m}.$$

Tabela 4.26. **Diagrama T, M și săgețile v pentru o zonă de grinzi**

1. Grindă încastrată la capete, cu sarcină concentrată la mijloc

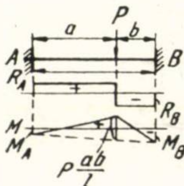


$$R_A = R_B = \frac{P}{2},\ T_1 = R_A;$$

$$M_1 = R_A x\ \frac{Pl}{8};$$

$$v_{max} = \frac{Pl^3}{192\,EI}.$$

2. Aceeași, cu sarcină aplicată într-un punct oarecare



$$R_A = \frac{Pb^2\,(l + 2a)}{l^3},\ R_B = \frac{Pa^2(l + 2b)}{l^3},$$

$$T_1 = R_A,\ M_1 = R_A x - M_A,$$

$$M_A = -\frac{Pab^2}{l^2},\ M_B = -\frac{Pa^2b}{l^2},$$

$$v\Big|_{x=a} = \frac{2Pa^3b^2}{3EI\,(l + 2a)^2}.$$

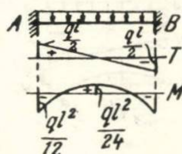
3. Aceeaşi, cu sarcină uniform distribuită

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}, \quad T(x) = \frac{ql}{2} - qx,$$

$$M(x) = -\frac{ql^2}{12} + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2};$$

$$M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}, \quad M_{l/2} = \frac{ql^2}{24},$$

$$v = \frac{ql^4}{384\,EI}.$$

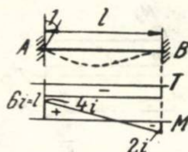


4. Aceeaşi, cu încastrarea din stînga rotită cu $\varphi = 1$

$$R_A = -R_B = -\frac{6i}{l}, \quad i = EI:l,$$

$$T(x) = -6i:l, \quad M(x) = M_A - 6\frac{i}{l}x,$$

$$M_A = 4i, \quad M_B = -2i.$$



5. Aceeaşi, cu deplasarea încastrării din stînga cu $v = 1$

$$R_A = -R_B = -\frac{12i}{l^2},$$

$$T(x) = -\frac{12i}{l^2}, \quad M(x) = M_A - \frac{12i}{l^2}x;$$

$$M_A = 6i:l, \quad M_B = -6i:l.$$

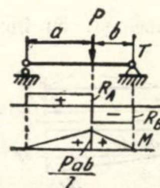


6. Grindă încastrată la un capăt şi simplu rezemată la celălalt încărcată cu o forţă P

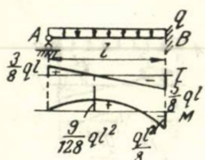
$$R_A = \frac{Pb^2(2l + a)}{2l^3}, \quad T_1 = R_A,$$

$$M_1 = R_A x, \quad M_{max} = \frac{Pab^2(2l + a)}{2l^3},$$

$$M_B = -\frac{Pab\,(l + a)}{2l^2}.$$



7. Aceeași, cu sarcină uniform distribuită



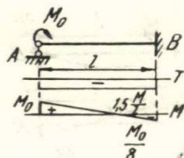
$$R_A = \frac{3}{8}\,ql, \quad R_B = \frac{5}{8}\,ql,$$

$$T(x) = R_A - qx, \; M(x) = R_A\,x - \frac{qx^2}{2},$$

$$M_{max} = \frac{9}{128}\,ql^2, \quad M_B = -\frac{ql^2}{8},$$

$$v_{max} = \frac{0{,}0054\,ql^4}{EI}.$$

8. Aceeași, cu cuplu concentrat pe necesarul din stînga



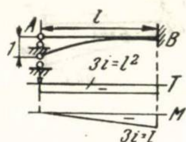
$$R_A = -R_B = -1{,}5\,\frac{M_0}{l},$$

$$T(x) = -1{,}5\,\frac{M_0}{l},$$

$$M(x) = M_0 - \frac{1{,}5\,M_0}{l}\,x,$$

$$M_A = M_0, \quad M_B = -\frac{M_0}{2}.$$

9. Aceeași, cu reazemul simplu deplasat cu $v = 1$

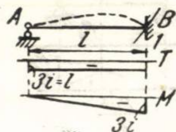


$$R_A = -R_B = -\frac{3i}{l^2}, \; i = EI:l;$$

$$T(x) = -\frac{8i}{l^2}, \; M(x) = -\frac{3i}{l^2}\,x,$$

$$M_B = -3\,\frac{i}{l}.$$

10. Aceeași, cu încastrarea rotită cu $\varphi = 1$



$$R_A = -R_B = -\frac{3i}{l}, \; T(x) = -\frac{3i}{l},$$

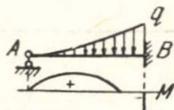
$$M(x) = -\frac{3i}{l}\,x, \quad M_B = -3i.$$

11. Aceeași, încărcată cu o sarcină parabolică $q(x) = -\frac{q}{l^n} x^n$, $n \geqslant 0$

$$R_A = \frac{3ql}{(n+1)(n+2)(n+4)},$$

$$R_B = R_A \frac{2n+5}{3},$$

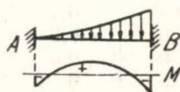
$$M_B = -\frac{ql^2}{(n+2)(n+4)}.$$



12. Bară încastrată la amîndouă capetele, încărcată cu o sarcină parabolică, ca în schema II

$$M_B = -\frac{q^2}{(n+3)(n+4)},$$

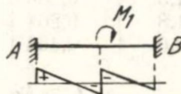
$$M_A = -\frac{2ql^2}{(n+2)(n+3)(n+4)}.$$



13. Aceeași, încărcată pe deschiderea cu un cuplu concentrat, într-un punct la distanța a de la reazimul stîng și b, la cel drept, deschiderea l.

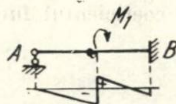
$$M_A = -\frac{M_1 b}{l^2}(2a - b);$$

$$M_B = -\frac{M_1 a}{l^2}(2b - a).$$



14. Grindă cu sarcina ca în schema 13, încastrată la un capăt și simplu rezemată la celălalt

$$M_B = -\frac{M_1}{2l^2}(b^2 + 2ab - 2a^2).$$



T a b e l a 4.27. **Coeficienţii pentru calculul lui T şi M în grinzi continuie cu deschideri egale, încărcate cu sarcini uniform distribuite, una constantă $g(k_g)$ şi una variabilă $p(k_p)$**

x/l	Forţe tăietoare			Momente		
	Efectul g	Efectul p		Efectul g	Efectul p	
	T	T_{max}	T_{min}	M	M_{max}	M_{min}
			Două deschideri			
0	+0,375	0,438	−0,063	0	0	0
0,4	−0,025	0,136	−0,161	+0,070	0,095	−0,025
0,8	−0,425	0,012	−0,437	−0,02	0,03	−0,05
1,0	−0,625	0	−0,625	−0,125	0	−0,125
			Trei deschideri			
0	0,4	0,45	−0,05	0	0,	0
0,4	0	0,15	−0,15	0,08	0,10	−0,02
0,8	−0,4	0,028	−0,428	0	0,04	−0,04
1,0	−0,6	0,017	−0,617	−0,1	0,017	−0,117
1,0	+0,5	0,583	−0,083	−0,1	0,017	−0,117
1,5	0	0,198	−0,198	+0,025	0,075	−0,05
			Patru deschideri			
0	0,393	0,446	−0,054	0	0	0
0,4	−0,007	0,146	−0,153	0,077	0,099	−0,021
0,8	−0,407	0,025	−0,432	−0,006	0,037	−0,043
1,0	−0,607	0,013	−0,621	−0,107	0,013	−0,121
1,0	0,536	0,603	−0,067	−0,107	0,013	−0,121
1,3	0,236	0,341	−0,115	+0,009	0,057	−0,048
1,8	−0,264	0,122	−0,387	0,001	0,042	−0,040
2,0	−0,464	0,107	−0,571	−0,071	0,036	−0,107

$$T = k_g \cdot gl + k_p \cdot pl; \quad M = k_g \cdot gl^2 + k_p \cdot pl^2.$$

§ 4.29. Grinzi pe teren elastic

Ecuaţia diferenţială, bazată pe ipoteza relaţiei liniare între săgeata grinzii v şi reacţiunea q a terenului [$q = -kv$, unde k (kgf/cm²) este coeficientul fundaţiei] are forma

$$\frac{d^4v}{dx^4} = -4\beta^4 v + p. \tag{4.186}$$

Soluţia ei, pentru sarcina exterioară $p = 0$, este:

$$v = e^{\beta x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x}(A_1 \cdot \cos \beta x + B_1 \cdot \sin \beta x). \quad (4.187)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}}; \quad D = EI.$$

Constantele A, B, A_1 şi B_1 se determină, în funcţie de următoarele condiţii iniţiale: săgeata v_0, unghiul φ_0, momentul M_0 şi forţa tăietoare T_0, prin relaţiile

$$A = \frac{v_0}{2} + \frac{\varphi_0}{4\beta} - \frac{T_0}{8D\beta^3}; \quad B = \frac{\varphi_0}{4\beta} + \frac{M_0}{4D\beta^2} + \frac{T_0}{8D\beta^3}, \quad (4.188)$$

$$A_1 = \frac{v_0}{2} - \frac{\varphi_0}{4\beta} + \frac{T_0}{8D\beta^3}; \quad B_1 = \frac{\varphi_0}{4\beta} - \frac{M_0}{4D\beta^2} + \frac{T_0}{8D\beta^3} \quad (4.189)$$

Pentru *grinzi lungi* ($\beta x > 5$) se consideră că $A = B = 0$, şi problema se rezolvă simplu. De exemplu (fig. 4.55), pentru o grindă semiinfinită, la capătul căreia sînt aplicate M_0 şi T_0, găsim, din (4.188):

$$v_0 = \frac{M_0}{2D\beta^2} + \frac{T_0}{2D\beta^3}; \quad \varphi_0 = -\frac{M_0}{D\beta} - \frac{T_0}{2D\beta^2}.$$

Din (4.189) obţinem acum: $B_1 = -\dfrac{M_0}{2D\beta^2}$; $A_1 = \dfrac{M_0}{2D\beta^2} + \dfrac{T_0}{2D\beta^3}$.

Diagramele se construiesc cu ajutorul relaţiei (4.187), în care se lasă numai al doilea termen.

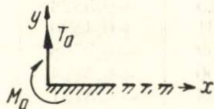


Fig. 4.55.

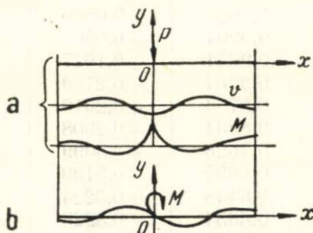


Fig. 4.56.

În tabela 4.28 sînt indicate valorile funcţiilor, care intră în formula (4.187) şi în cele care derivă din ea:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_1 = e^{-\beta x} \cos \beta x = -0{,}5 \frac{d\eta_2}{\beta dx}; \; \eta_2 = e^{-\beta x}(\cos \beta x - \\ &- \sin \beta x) = \frac{d\eta_3}{\beta dx}; \; \eta_3 = e^{-\beta x} \sin \beta x = -0{,}5 \frac{d\eta_4}{\beta dx}; \\ &\eta_4 = e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x) = -\frac{d\eta_1}{\beta dx}. \end{aligned}\right\} \quad (4.190)$$

Tabela 4.28. (*continuare*)

βx	β_4	η_3	η_2	η_1	ηx
6,2	0,00185	−0,00017	0,00219	+0,00202	6,2
2π	0,00187	−0,0000	0,00187	+0,00187	6,283
6,3	0,00187	+0,00003	0,00181	+0,00184	6,3
6,4	0,00184	+0,00019	0,00146	+0,00165	6,4
6,5	0,00179	+0,00032	0,00115	+0,00147	6,5
6,6	0,00172	+0,00042	0,00087	+0,00129	6,6
6,7	0,00162	+0,00050	0,00063	+0,00113	6,7
6,8	0,00152	+0,00055	0,00042	+0,00097	6,8
6,9	0,00141	+0,00058	0,00024	+0,00082	6,9
7,0	0,00129	+0,00060	0,00009	+0,00069	7,0
$9/4\pi$	0,00120	+0,00060	0,00000	+0,00060	7,069

Ecuația generală a săgeților, pentru grinzi lungi, are forma:

$$v = v_0 \frac{\eta_1}{2} - \varphi_0 \frac{\eta_2}{4\beta} - \frac{M_0}{D} \frac{\eta_3}{4\beta^2} + \frac{T_0}{D} \frac{\eta_4}{8\beta^3}. \tag{4.191}$$

În *cazul general* și pentru grinzi cu $\beta x < 5$, înlocuind expresiile (4.188) și (4.189) în (4.187), se obține *ecuația generală a săgeților*

$$v = v_0 A_x + \varphi_0 \frac{B_x}{\beta} + \frac{M_0}{D} \frac{C_x}{\beta^2} + \frac{T_0}{D} \frac{D_x}{\beta^3}, \tag{4.192}$$

Tabela 4.29. **Funcții hiperbolo-circulare**

$$A_x = \text{ch}\,\beta \cos \beta x; \quad B_x = \frac{1}{2} (\text{ch}\,\beta x \sin \beta x + \text{sh}\,\beta x \cos \beta x);$$

$$C_x = \frac{1}{2} \text{sh}\,\beta x \sin \beta x; \quad D_x = \frac{1}{4} (\text{ch}\,\beta x \sin \beta x - \text{sh}\,\beta x \cos \beta x)$$

βx	A_x	B_x	C_x	D_x
0,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,00000
0,02	1,0000	0,0200	0,0002	0,00000
0,04	1,0000	0,0400	0,0008	0,00001
0,05	1,0000	0,0500	0,0012	0,00003
0,06	1,0000	0,0600	0,0018	0,00005
0,08	1,0000	0,0800	0,0032	0,0001
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,00017
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,00135

Tabela 4.29 (*continuare*)

βx	A_x	B_x	C_x	D_x
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,40	0,9957	0,3996	0,0800	0,0107
0,50	0,9895	0,4989	0,1249	0,0208
0,60	0,9784	0,5974	0,1797	0,0360
0,70	0,9600	0,6944	0,2443	0,0571
0,80	0,9318	0,7891	0,3185	0,0851
0,90	0,8931	0,8803	0,4020	0,1211
1,0	0,8337	0,9667	0,4945	0,1659
1,1	0,7568	1,0464	0,5951	0,2203
1,2	0,6561	1,1173	0,7034	0,2851
1,3	0,5272	1,1767	0,8182	0,3612
1,4	0,3656	1,2216	0,9383	0,4490
1,5	0,1664	1,2485	1,0619	0,5490
$\frac{1}{2}\pi$	0,0000	1,2546	1,1506	0,6273
1,6	− 0,0753	1,2535	1,1872	0,6614
1,7	− 0,3644	1,2319	1,3118	0,7864
1,8	− 0,7060	1,1788	1,4326	0,9237
1,9	− 1,1049	1,0888	1,5463	1,0727
2,0	− 1,5656	0,9557	1,6489	1,2325
2,1	− 2,0923	0,7735	1,7358	1,4019
2,2	− 2,6882	0,5351	1,8018	1,5790
2,3	− 3,3562	0,2334	1,8407	1,7614
2,4	− 4,0976	− 0,1386	1,8461	1,9460
2,5	− 4,9128	− 0,5885	1,8104	2,1292
2,6	− 5,8003	− 1,1236	1,7255	2,3065
2,7	− 6,7565	− 1,7509	1,5826	2,4724
2,8	− 7,7759	− 2,4770	1,3721	2,6208
2,9	− 8,8471	− 3,3079	1,0837	2,7443
3,0	− 9,9669	− 4,2484	0,7068	2,8346
3,1	−11,1119	− 5,3022	0,2303	2,8823
π	−11,5919	− 5,7743	0,0000	2,8872
3,2	−12,2656	− 6,4710	− 0,3574	2,8769
3,3	−13,4048	− 7,7549	− 1,0678	2,8067
3,4	−14,5008	− 9,1506	− 1,9121	2,6589
3,5	−15,5198	−10,6524	− 2,9014	2,4195
3,6	−16,4218	−12,2507	− 4,0458	2,0735
3,7	−17,1622	−13,9315	− 5,3543	1,6048
3,8	−17,6875	−15,6760	− 6,8343	0,9969
3,9	−17,9387	−17,4598	− 8,4909	0,2321
4,0	−17,8498	−19,2523	−10,3265	−0,7073
4,1	−17,3472	−21,0160	−12,3404	−1,8392
4,2	−16,3505	−22,7054	−14,5273	−3,1812
4,3	−14,7722	−24,2668	−16,8773	−4,7501

Tabela 4.29 (*continuare*)

βx	A_x	B_x	C_x	D_x
4,4	−12,5180	−25,6372	−19,3742	− 6,5615
4,5	− 9,4890	−26,7446	−21,9959	− 8,6290
4,6	− 5,5791	−27,5056	−24,7116	−10,9638
4,7	− 0,6812	−27,8274	−27,4823	−13,5731
$\frac{3}{2}\pi$	0,0000	−27,8317	−27,8272	−13,9158
4,8	5,3164	−27,6051	−30,2589	−16,4604
4,9	12,5239	−26,7238	−32,9814	−19,6232
5,0	21,0504	−25,0564	−35,5774	−23,0525
5,1	30,9997	−22,4660	−37,9618	−26,7317
5,2	42,4661	−18,8057	−40,0350	−30,6346
5,3	55,5317	−13,9201	−41,6825	−34,7245
5,4	70,2637	− 7,6440	−42,7726	−38,9524
5,5	86,7044	0,1900	−43,1592	−43,2557
5,6	104,8687	9,7543	−42,6774	−47,5558
5,7	124,7352	21,2199	−41,1453	−51,7562
5,8	146,2448	34,7564	−38,3639	−55,7428
5,9	169,2837	50,5203	−34,1198	−59,3804
6,0	193,6813	68,6577	−28,2116	−62,5106
6,1	219,2004	89,2946	−20,3042	−64,9518
6,2	245,5231	112,5249	−10,2356	−66,4981
2π	267,7468	133,8724	0,0000	−66,9362
6,3	272,2487	138,4120	2,2885	−66,9174

în care intervin funcţiile hiperbolei circulare

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \mathrm{ch}\,\beta x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}x};\\ B_x &= 0{,}5\,(\mathrm{ch}\,\beta x\cdot\sin\beta x + \cos\beta x\cdot\mathrm{sh}\,\beta x) = \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}C_x}{\mathrm{d}x};\\ C_x &= 0{,}5\,\mathrm{sh}\,\beta x\cdot\sin\beta x = \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}D_x}{\mathrm{d}x};\\ D_x &= 0{,}25(\mathrm{ch}\,\beta x\cdot\sin\beta x - \cos\beta x\cdot\mathrm{sh}\,\beta x) =\\ &= -\frac{1}{4\beta}\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}x}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.193)$$

Valorile lor numerice sînt indicate în tabela 4.29.

Derivînd succesiv relaţia (4.191), se obţin ecuaţiile pentru φ, M şi T.

§ 4.30. Cadre plane simple

Gradul de nedeterminare este luat de numărul de legături suplimentare în reazime şi de întreitul numărului de contururi închise; cînd există articulaţii, gradul de nedeterminare scade cu numărul de articulaţii simple. Cadrul din fig. 4.57, care are două legături suplimentare în reazime, un contur închis şi o singură articulaţie, este de patru ori static nedeterminat.

În metoda forţelor, ecuaţia canonică de ordin k pentru necunoscutele suplimentare $X_1, X_2, ..., X_n$, în cazul unui sistem de n ori static nedeterminat, are forma:

$$X_1\delta_{k1} + X_2\delta_{k2} + X_3\delta_{k3} + ... + X_k\delta_{kk} + \\ ... + X_n\delta_{kn} + \Delta_{kp} = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n). \qquad (4.194)$$

Coeficienţii δ şi Δ (deplasările) pentru sistemul de bază, se iau din tabele, se calculează conform §§ 4.26—4.29 sau cu formula lui Mohr:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{M_k M_m \, ds}{EI}; \qquad (4.195)$$

Fig. 4.57.

Influenţa forţelor N şi T asupra deplasărilor se neglijează, de obicei. Integrala lui Mohr, pentru bare drepte de rigiditate constantă, se determină, după Vereşciaghin, astfel:

$$\frac{1}{EI}\int M_k M_m \, ds = \frac{1}{EI}\,\Omega \cdot y_0, \qquad (4.196)$$

unde: Ω este suprafaţa uneia din diagramele de momente (de orice contur), iar y_0 este ordonata celeilalte (numai rectilinie) măsurată în dreptul centrului de greutate al primei. În fig. 4.58 sînt reprezentate trei diagrame, din a căror combinaţie după Vereşciaghin, se obţine:

$$\text{I} \times \text{II} \; ... \; \frac{l}{6EI}\,(2aa_1 + 2bb_1 + ab_1 + a_1b);$$

$$\text{I} \times \text{III} \; ... \; \frac{l \cdot c}{12EI}\,(3b_1 + a_1).$$

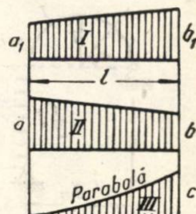


Fig. 4.58.

Aceste formule sînt aplicabile atît pentru diagrame de formă triunghiulară, cît şi dreptunghiulară; diagramele trapezoidale se transformă în triunghiulare, dacă se pun unele ordonate egale cu zero. Atunci cînd ordonatele a şi b sînt egale, diagramele sînt dreptunghiulare. Să examinăm cadrul din fig. 4.59, simplu static nedeterminat. Diagramele de momente produse de $X_1 = 1$ şi de sarcina exterioară $q = 2$ t/m sînt date în fig. 4.59. Ecuaţia canonică este:

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

Deplasarea pentru porţiunea curbilinie trebuie determinată prin integrare; pentru o secţiune dată de unghiul α, avem: $M_1 = -1 \cdot \sin\alpha - 1 \cdot (1 - \cos\alpha)$; $M_p = -1 \cdot \sin\alpha$.

După Mohr:

$$\delta_{11}^{I} = \int_0^{\pi} M_1^2 \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi} (\cos\alpha - 1 - \sin\alpha)^2 \cdot 1 \cdot d\alpha = \frac{4 + 2\pi}{EI};$$

$$\Delta_{1P}^{I} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi} M_1 M_p \, ds = \frac{4 + \frac{\pi}{2}}{EI}.$$

Pe porţiunea rectilinie se calculează, după Vereşciaghin:

$$\delta_{11}^{II} = \frac{\Omega \cdot y_0}{E \cdot \frac{1}{3} I} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\frac{1}{3}} = \frac{8}{EI};$$

$$\delta_{1P}^{II} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 1}{EI} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{EI}$$

(semnul minus este datorit semnelor diferite ale diagramelor M_1 şi M_p). Admiţînd $EI = 1$, avem: $\delta_{11} = 12 + 2\pi$; $\Delta_{1P} = \frac{\pi}{2}$. Atunci: $X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -0{,}085$ t. Diagramele finale se construiesc prin

Fig. 4.59. Fig. 4.59 *a*.

compunerea diagramelor datorite necunoscutei suplimentare X_1 şi sarcinii q. De exemplu, $M = M_P + M_1 X_1$ (fig. 4.59, *a*).

În *metoda deformaţiilor* ecuaţia canonică de ordin k, pentru n necunoscute (vezi § 4.28), are forma:

$$Z_1 r_{k1} + Z_2 r_{k2} + \ldots + Z_k r_{kk} + \ldots + Z_n r_{kn} + R_{kp} = 0$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n). \quad (4.197)$$

Coeficienţii r şi R (reacţiunile în sistemul de bază) se iau din tabelele § 4.26 şi 4.28.

Să calculăm cadrul din fig. 4.60, avînd o singură deformaţie necunoscută — unghiul de rotire Z_1 al nodului intermediar *1*. Pentru rezolvarea ecuaţiei canonice $Z_1 r_{11} + R_{1p} = 0$, se construiesc diagrame de moment pentru sistemul de bază, obţinut prin înlocuirea unei încastrări în nodul 1; se folosesc datele din tabela 4.26 pentru grinzi încastrate la ambele capete (pentru deschiderile 0—1 şi *1*—*2*) şi la unul singur(deschiderea *1*—*3*); M_p este diagrama datorită sarcinii exterioare; M_1 este diagrama datorită rotirii cu unghiul $Z_1 = 1$, în nodul 1; momentul în acest nod, datorit lui $Z_1 = 1$, adică r_{11} este egal cu suma momentelor din barele, care converg în nodul *1*, adică $r_{11} = 4 + 3 + 3 = 10$; momentul datorit sarcinii în acelaşi nod este $R_{1P} = -9 + 6 = -3$. Prin urmare, $Z_1 = \frac{3}{10}$; diagrama finală M se construieşte prin compunerea diagramei M_p şi a diagramei M_1 multiplicată cu 0,3.

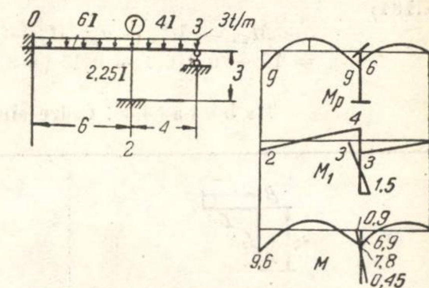


Fig. 4.60.

Metoda ecuaţiei generale, descrisă în § 4.28, rămîne valabilă şi pentru cadrele, care nu au deplasări ale nodurilor. Să examinăm calculul cadrului din fig. 4.61, *a*. Rigidităţile pe diferite porţiuni ale barelor ($i = EI : l$) sînt înscrise în cerculeţe în fig. 4.61, *b* şi tot acolo, lîngă noduri, sînt scrişi coeficienţii de distribuţie μ (de exemplu $\mu_{23} = 0,75 : (0,75 \cdot 2 + 1) = 0,3$. Coeficienţii α se calculează pentru barele *1*—*2* şi *2*—*3*:

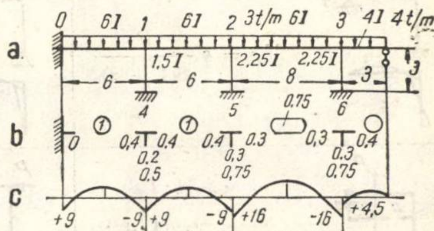


Fig. 4.61.

$$\alpha_{12} = \frac{0,4^2}{4 - 0,4^2} = 0,042; \quad \alpha_{23} = \frac{0,3^2}{4 - 0,3^2} = 0,023.$$

În fig. 4.61,*c* este redată diagrama iniţială M^0, din care avem: $M_1^0 = 0$; $M_2^0 = +16 - 9 = 7$; $M_3^0 = -16 + 4,5 = -11,5$. Pentru determinarea lui M_{23}, se calculează M_2 şi M_3 cu formula (4.183)

$$M_2 = (1 + \alpha_2)(1 - \mu'_{32}) M_2^0 = 6,9 \text{ t} \cdot \text{m};$$

unde

$$\alpha_2 = 0,042 + 0,023;\quad \mu'_{32} = \mu_{32};$$

În mod analog

$$M_3 = (1 + \alpha_3)(1 - \mu'_{23})\, M_3^0 = -8,12\ \text{t}\cdot\text{m};$$

unde $\alpha_3 = 0,023$; $\mu'_{23} = \mu_{23}(1 + \alpha_{2-23}) = 0,313$. Acum, din formula (4.181)

$$M_{23} = M_{23}^0 - \mu_{23}\cdot M_2 - 0,5\,\mu_{32}\cdot M_3 =$$
$$= 16 - 0,3\cdot 6,9 - 0,15\,(-8,12) = 15,13\ \text{t}\cdot\text{m}.$$

Tabela 4.30. **Cadre simple** $\left(\alpha = \dfrac{Ih}{I_1 l}\right)$

B, A, l, h, I, I_1	B, C, A, D, l, h, I, I_1, I_1
P, a, b; $\gamma = b:l$ $M_B = P\dfrac{\alpha\gamma(1+\gamma)}{2(1+\alpha)}$	P, a, b; $M_B = M_C =$ $= P\dfrac{ab}{l}\,\dfrac{3}{2(3+2\alpha)}$
q; $M_B = q\dfrac{l^2}{8(1+\alpha)}$	q; $M_B = M_C =$ $= q\dfrac{l^2}{4(3+2\alpha)}$
P, a, b; $\gamma = b:l$ $M_B = P\dfrac{2\alpha\gamma(1+\gamma)}{4+3\alpha}$ $M_A = 0,5\,M_B$	P; $M_B = M_C = P\dfrac{h}{2}$
q; $M_B = q\dfrac{l^2}{2(4+3\alpha)}$ $M_A = 0,5\,M_B$	q; $M_B = M_C =$ $= q\dfrac{l^2}{6(2+\alpha)}$ $M_A = M_D = 0,5\,M_B$

Rapoartele focare (cele de momente k_x şi cele unghiulare $k_x^{<}$) la grinzi şi cadre de orice complexitate, se determină în mod convenabil cu formulele:

$$k_x = 2 + \frac{6i_x}{\sum\limits_{-x} i(4-\mu)}; \quad k_x^{<} = 2 + \frac{\sum\limits_{-x} i(4-\mu)}{2i_x}. \quad (4.198)$$

De exemplu, pentru deschiderea *1—2* a cadrului din fig. 4.61, raportul focal din stînga este egal cu:

$$k_{12} = 2 + \frac{6i_{12}}{i_{23}(4-\mu_{23}) + i_{25}(4-\mu_{25})} = 3{,}08.$$

§ 4.31. Bare curbe

Atunci cînd bara are axa în formă de arc de cerc şi sarcina este aplicată în planul ei, cum este indicat în fig. 4.62, ecuaţiile generale pentru deplasarea radială v şi tangenţială u, unghiurile de rotire φ momentul încovoietor M, forţa tăietoare T şi cea normală N au forma (funcţie de parametrii iniţiali):

$$EIv = EIv_0 \cos\alpha + EI \sin\alpha\,(u_0 + \varphi_0 R) + M_0R^2(1-\cos\alpha) + T_0\frac{R^2}{2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) + \frac{R^3}{2}(2 - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha)(N^0 - q_{r0}R) + q_{t0}\frac{R^4}{2}(\alpha\cos\alpha + 2\alpha - 3\sin\alpha) = -\frac{du}{d\alpha}EI; \quad (4.199)$$

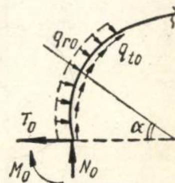


Fig. 4.62.

$$EIu = EIu_0\cos\alpha - EIv_0\sin\alpha - EI\varphi_0R(1-\cos\alpha) + M_0R^2(-\alpha + \sin\alpha) + \frac{T_0R^3}{2}(2\cos\alpha - 2 + \alpha\sin\alpha) + \frac{R^3}{2}(-2\alpha + 3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)(N_0 - q_{r0}R) + q_{t0}\frac{R^4}{2}(4 - 4\cos\alpha - \alpha\sin\alpha - \alpha^2); \quad (4.200)$$

$$EI\varphi = EI\varphi_0 + M_0R\alpha + T_0R^2(1-\cos\alpha) + R^2(\alpha - \sin\alpha)(N_0 - q_{r0}R) + q_{t0}R^3\left(\frac{\alpha^2}{2} + \cos\alpha - 1\right) = \frac{1}{R}\left(-u + \frac{dv}{d\alpha}\right)EI; \quad (4.201)$$

$$M = M_0 + T_0 R \sin\alpha + R(1 - \cos\alpha)(N_0 - q_{r0}R) + \\ + q_{t0}R^2(\alpha - \sin\alpha); \quad (4.202)$$

$$T = \frac{dM}{R d\alpha} = T_0 \cos\alpha + \sin\alpha(N_0 - q_{r0}R) + \\ + q_{t0}R(1 - \cos\alpha); \quad (4.203)$$

$$N = N_0 \cos\alpha - T_0 \sin\alpha + q_{r0}R(1 - \cos\alpha) + q_{t0}R \sin\alpha = \\ = \frac{dT}{d\alpha} + q_{r0}R. \quad (4.204)$$

Se va studia deformaţia inelului din fig. 4.63; alegînd originea coordonatelor în punctul O, avem:

$$u_0 = \varphi_0 = N_0 = 0;$$

$$T_0 = \frac{P}{2}; M_0 = ?$$

Utilizăm condiţia: $\varphi = u = O$ pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$; din (4.201) găsim



Fig. 4.63.

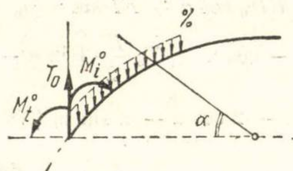


Fig. 4.64.

$M_0 R \frac{\pi}{2} + \frac{P}{2} R^2 = 0$, de unde $M_0 = -\frac{PR}{\pi}$, şi apoi din (4.200):

$EIv_0 = -\frac{PR^3}{4\pi}\left(4 - \frac{\pi^2}{2}\right)$.

La o sarcină perpendiculară pe planul axei barei (fig. 4.64) ecuaţiile generale ale săgeţilor w, ale unghiurilor de rotire Ψ şi de răsucire θ, ale momentelor de încovoiere M_i şi celui de răsucire M_t şi a forţei tăietoare T (funcţie de parametrii iniţiali), cu notaţia $k = EI : GI_d$, au forma:

$$EIw = w_0 EI + EI\psi_0 R \sin\alpha + EI\theta_0 R(1 - \cos\alpha) + \\ + \frac{M_i^0 R^2}{2}[\alpha \sin\alpha(1 + k) - 2k(1 - \cos\alpha)] -$$

$$-\frac{M_t^0R^2}{2}(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)(1+k)+\frac{T_0R^3}{2}\times$$

$$\times\left[(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)(1+k)+2k(\sin\alpha-\alpha)\right]-$$

$$-\frac{q_0R^4}{2}\left[(2-2\cos\alpha-\alpha\sin\alpha)+k(4-4\cos\alpha-\alpha\sin\alpha-\alpha^2)\right]; \quad (4.205)$$

$$EI_\psi=EI_{\psi_0}\cos\alpha+EI\theta^0\sin\alpha+\frac{M_i^0R}{2}[2\sin\alpha+$$

$$+(1+k)(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)]-\frac{M_t^0R}{2}(1+k)\alpha\sin\alpha+$$

$$+\frac{T_0R^2}{2}\left[(1+k)\alpha\sin\alpha+2k(\cos\alpha-1)\right]+\frac{q_0R^3}{2}\times$$

$$\times\left[-\sin\alpha+\alpha\cos\alpha+k(\alpha\cos\alpha+2\alpha-3\sin\alpha)\right]=\frac{\mathrm{d}w}{R\mathrm{d}\alpha}EI; \quad (4.206)$$

$$EI\theta=-EI_{\psi_0}\sin\alpha+EI\theta^0\cos\alpha-\frac{M_i^0R}{2}\times$$

$$\times(1+k)\alpha\sin\alpha-\frac{M_t^0R}{2}[\alpha\cos\alpha+\sin\alpha+$$

$$+k(\alpha\cos\alpha+\sin\alpha)]+\frac{T_0R^2}{2}[(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\times$$

$$\times(1+k)]-\frac{q_0R^3}{2}\left[(\alpha\sin\alpha-2+2\cos\alpha)(1+k)\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\alpha^2}\frac{1}{R}EI-M_iR; \quad (4.207)$$

$$M_i=M_i^0\cos\alpha-M_t^0\sin\alpha+T_0R\sin\alpha-$$

$$-q_0R^2(1-\cos\alpha)=\frac{\mathrm{d}M_t}{\mathrm{d}\alpha}; \quad (4.208)$$

$$M_t=M_i^0\sin\alpha+M_t^0\cos\alpha+T_0R(1-\cos\alpha)-q_0R^2(\alpha-\sin\alpha)=$$

$$=-\frac{\mathrm{d}M_i}{\mathrm{d}\alpha}+T_0R-q_0R^2\alpha; \quad (4.209)$$

$$T=T_0-q_0R\alpha. \quad (4.210)$$

Tabela 4.31. Eforturi în inele

P, α, O, P	$M_0 = P\,\dfrac{R}{\pi} \cdot M_\alpha = PR\left(\dfrac{1}{\pi} - 0{,}5\sin\alpha\right).$ $v_0 = \dfrac{P \cdot R^3}{8\pi EI}(8 - \pi^2).$
q, q, α, O	$M_0 = \dfrac{qR^2}{4} \cdot M_\alpha = \dfrac{qR^2}{4}(1 - 2\sin^2\alpha).$
P, q=const, O	$q = \dfrac{P}{4R},\ N_0 = \dfrac{4qR}{\pi}.$ $M_0 = \dfrac{qR^2}{\pi}\left(6 - \dfrac{\pi^2}{2}\right).$
q=const, O, P, P	$N_0 = 0{,}5\,P,\ M_0 = 0,\ b = \dfrac{P}{2R}.$ $T_0 = \dfrac{P}{2}\left(1 - \dfrac{2}{\pi}\right).$
q=const, P, O, P	$q = \dfrac{P}{\pi R},\ N_0 = 0{,}5\,P,\ M_0 = 0,$ $T_0 = \dfrac{P}{\pi}.$

§ 4.32. Calculul grinzilor, solicitate la încovoiere

A. Calculul în *regim elastic* se execută cu ajutorul condiţiilor de rezistenţa şi rigiditate (vezi § 4.23):

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \leqslant \sigma_a;\ \sigma_{max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \leqslant \sigma_a \qquad (4.211)$$

$$v_{max} = \frac{M_{max} l^2}{EI}\,k = \frac{\sigma}{E}\,\frac{l^2}{y_{max}}\,k \leqslant m v_a \qquad (4.212)$$

unde σ_a este rezistenţa admisibilă (vezi capitolul 4.2); y_{max} este distanţa de la fibra neutră pînă la cea extremă în secţiunea transversală; k este un coeficient determinat din expresiile săgeţilor (§§ 4.26—4.30); v_a este săgeata admisibilă, care, conform normelor de proiectare, este cuprinsă între limitele $\dfrac{l}{200} \div \dfrac{l}{1\,500}$.

B. Calculul de rezistență după *stadiul de rupere* se efectuează folosind formula (vezi capitolul 4.2)

$$M_r = C \cdot M_{max} = \sigma_r \cdot W_p \qquad (4.213)$$

unde C este coeficientul de siguranță; σ_r este egal sau cu σ_c — pentru un material ideal plastic, sau cu σ_r — pentru un material cu pro-



Fig. 4.65.

prietăți de consolidare (fig. 4.67). Modulul plastic de rezistență W_p pentru un corp ideal plastic este legat de modulul elastic de rigiditate W cu formula (fig. 4.65):

$$W_p = W\eta = S_c + S_t \qquad (4.214)$$

unde S_c și S_t sînt momentele statice față de axa neutră a suprafețelor secțiunii zonelor întinse și comprimate; valorile lui W și η se indică în tabela 4.32.

Mărimea M_{max} pentru formulele (4.213) se determină în grinzile static determinate prin calculul obișnuit (§§ 4.26—4.30); în grinzile static nedeterminate M_{max} se găsesc cu ajutorul egalării momentelor de rupere; în limitele fiecărei deschideri de calcul a grinzii continue trebuie să fie trei locuri unde ele se formează — trei articulații „plastice" (în deschiderea extremă cu un reazim articulat — două articulații „plastice") în reazime și în deschidere.

Tabela 4.32. **Valorile W_p și coeficientul η pentru formula** (4.214)

Forma secțiunii	W_p	η
Cerc	$1{,}33\ r^3$	1,7
Inel cu $c = r_1 : r$	$1{,}33\ r^3(1 - c^3)$	$1{,}7\ \dfrac{1 + c + c^2}{(1 + c)(1 + c^2)}$
Dreptunghi	$bh^2/4$	1,5
Profile dublu T, U, cutie cu $\beta = b_1 : b$; $c = h_1 : h$	$\dfrac{bh^2}{4}(1 - \beta c^2)$	$1{,}5\ \dfrac{1 - \beta c^2}{1 - \beta c^3}$
Profil dublu T laminat	$(1{,}15 - 1{,}17)\ W$	1,15 — 1,17

În fig. 4.66 sînt indicate două cazuri de egalare a momentelor; în cazul *a*, din condiţiile de echilibru între sarcina exterioară la rupere qc şi momentele interioare din articulaţiile plastice *1* şi *2*, se obţine $\frac{ql^2}{8}c = 2M_r$, de unde $M_r = \frac{ql^2}{16}c$. Analog pentru cazul *b*

$$\frac{Pl}{4}c = 1{,}5\ M_r.$$

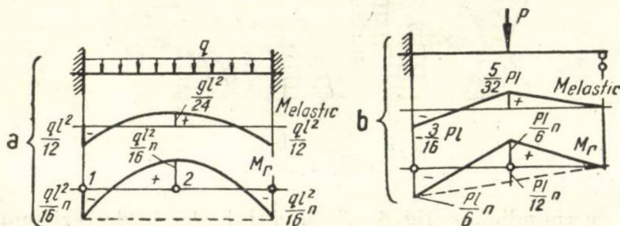


Fig. 4.66.

Pentru un material plastic cu consolidare (epura în fig. 4.65, *b*) formula (4.213) are forma

$$M_r = M_{max}\cdot c = \sigma_r\cdot W\cdot\eta_1,\ \eta_1 = 1 + \frac{\sigma_c}{\sigma_r}(\eta - 1) \qquad (4.215)$$

unde η se ia din tabelul 4.32. În cazul unei secţiuni dreptunghiulare şi la $\sigma_c : \sigma_r = 0{,}5$ avem $\eta_1 = 1 + 0{,}5\cdot 0{,}5 = 1{,}25$. Legătura tensiunilor $\sigma > \sigma_c$ cu momentul $M > M_p = \sigma_c W\eta$ şi curbura $\frac{1}{\rho}$ se determină cu formulele

$$\sigma - \sigma_c = \frac{M - M_p}{I}y,\ \frac{1}{\rho} = \frac{M - M_p}{E_1 I}. \qquad (4.216)$$

Modulul de consolidare este $E_1 = \text{tg}\,\alpha_1$ (fig. 4.67), unde:

α_1 este unghiul de înclinare a lui AB faţă de axa ε.

B. Dacă diagrama $\sigma - \varepsilon$ este admisă ca în fig. 4.67, în zona de deformaţii elastico-plastice

$$\sigma = E\varepsilon(1 - \omega) = E'\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}k_1; \qquad (4.217)$$

$$\omega = \left(1 - \frac{E_1}{E}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}\right) = \left(1 - \frac{E_1}{E}\right)\left(1 - \frac{y_c}{y}\right) = 1 - k_1 \qquad (4.218)$$

unde $\frac{1}{\rho}$ este curbura grinzii: $E = \text{tg}\,\alpha$; $E_1 = \text{tg}\,\alpha_1$, $1 - \frac{E_1}{E} = \lambda$; y şi y_c — vezi în fig. 4.65, c; $\omega = \Delta\sigma : (\sigma + \Delta\sigma)$. (fig. 4.67); k_1 şi ω variază între limitele 0 şi 1. Curbura grinzii în aceeaşi regiune este

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EIk_2} = \frac{\sigma_c}{Ey_c};$$

$$k_2 = 1 - \lambda \frac{I_p - y_c S_p}{I} \qquad (4.219)$$

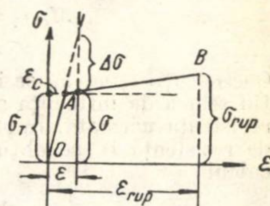


Fig. 4.67.

unde k variază între 0 şi 1, I_p şi S_p sînt respectiv momentul de inerţie şi momentul static al părţii din suprafaţa secţiunii, în care au loc deformaţii plastice. Din (4.218), notînd $I : W \cdot y_c = y_{max} : y_c = k$ şi $\sigma_c = M_c : W$, se obţine:

$$M = M_c k_0; \qquad k_0 = k \cdot k_2 \qquad (4.220)$$

Din (4.216) — (4.219) se găseşte:

$$\sigma = \sigma_c \frac{y}{y_c} k_1; \qquad \sigma_{max} = \sigma_c k_1 k. \qquad (4.221)$$

Pentru o bară de secţiune dreptunghiulară

$$\left.\begin{aligned} k_0 &= M : M_c = \frac{E_1}{E} k + \lambda \left(1{,}5 - \frac{0{,}5}{k^2}\right)^{1)}; \\ S_p &= \frac{bh^2}{4}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right); \; I_p = \frac{bh^3}{12}\left(1 - \frac{1}{k^3}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (4.222)$$

În cazul unei grinzi de secţiune dreptunghiulară $b = h = 1$ cm cu $E_1 : E = 0{,}05$ şi $\sigma_c = 3{,}3$ tf/cm² care suportă secţiunea unui moment $M = 2\,M_c$; să determinăm y_c şi σ_{max}.

Din (4.222), deoarece $k_0 = 2$, găsim:

$$2 = 0{,}05\,k + 0{,}95\left(1{,}5 - \frac{0{,}5}{k^2}\right)$$

de unde $k = 11{,}6$; prin urmare $y_c = y_{max} : 11{,}6 = 0{,}043\,h$. Cu $y = \frac{h}{2}$, găsim din (4.217) $k = 0{,}132$ şi din (4.220)

$$\sigma_{max} = 3{,}3 \cdot 11{,}6 \cdot 0{,}132 = 5{,}05 \text{ tf/cm}^2.$$

---

[1]) Pentru o bară de secţiune circulară paranteza termenului al doilea din dreapta se înlocuieşte cu $\left(2 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \frac{8}{3\pi}$.

Dacă σ_{max} se determină, ca pentru un corp perfect plastic din formulele (4.216) cu $M_p = 1,5\ M_c$ obţinem $\sigma_{max} = 1,5\ \sigma_c = 4,95$ tf/cm² (diferenţa este de 2 % faţă de cazul precedent).

D. Pentru calculul grinzilor după *prima stare limită* (§ 4.9) în analogie cu formulele (4.85)—(4.88) se utilizează formulele:

$$M_{calc} = M_p c_p + M_u c_u \leqslant M_{lim}; \qquad (4.223)$$

$$M_{lim} = m \cdot W \cdot R_i K_n. \qquad (4.224)$$

Coeficienţii c, m, k_n se iau după datele § 4.9, momentele M_p şi M_u ţin seama de influenţa sarcinii permanente şi a celei utile: R_i este rezistenţa normată. Împărţind egalitatea (4.223) cu c şi cu modulul de rezistenţă W se obţine formula pentru efortul unitar normal de calcul

$$\sigma = \frac{M_p \dfrac{c_p}{c_u} + M_u}{W} \leqslant R_i \frac{m}{c_u} k_n \qquad (4.224\ \text{a})$$

în partea dreaptă, este efortul unitar, care trebuie comparat cu rezistenţa admisibilă.

Bibliografie: vezi capitolul 4.1.

4.6.
Plăci

§ 4.33. Plăci dreptunghiulare

Relaţiile diferenţiale de bază (fig. 4.68) (vezi capitolul 4.1 § 4.5) sînt:

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}, \\ T_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y};\ T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}; \end{aligned}\right\} \qquad (4.225)$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad D = \frac{EI}{1-\mu^2}, \\ M_y &= D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\quad I = \frac{1 \cdot h^3}{12}, \\ M_{xy} &= D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.226)$$

unde D este rigiditatea la încovoiere a plăcii; μ este coeficientul lui Poisson; h este grosimea plăcii; w este săgeata plăcii.

Unitățile de măsură sînt: q — kg/cm²; T — kg/cm; M — kg.

Ecuația Navier — Sophie Germain este:

$$q = D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right). \tag{4.227}$$

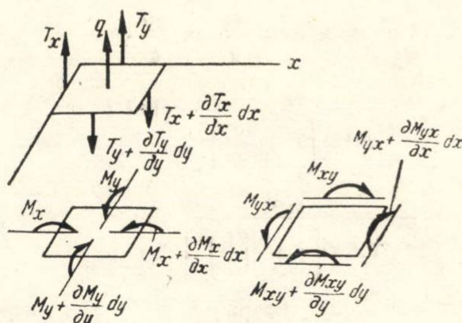


Fig. 4.68.

Tensiunile (fig. 4.69) se determină cu formulele:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x = \frac{M_x}{I} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{M_{xy}}{I} z. \\ \tau_{zx} = \frac{T_x S}{I}, \quad \tau_{zy} = \frac{T_y S}{I}, \end{aligned}\right\} \tag{4.228}$$

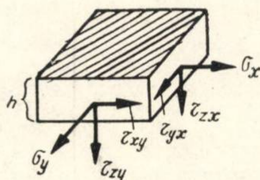


Fig. 4.69.

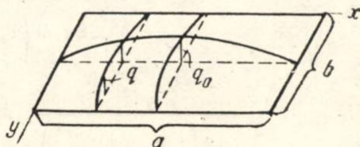


Fig. 4.70.

unde S este momentul static al părții de secțiune care alunecă [vezi formula (4.148) a lui Juravski]. Cazuri particulare:

a) Sarcină sinusoidală (fig. 4.70) pe o placă simplu rezemată pe contur:

$$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b},$$

Săgeata este

$$w = -\frac{q_0 a^4 b^4}{D\pi^4(a^2 + b^2)^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}.$$

b) Sarcină uniform distribuită, margini simplu rezemate:

$$\left.\begin{aligned} & w \approx c \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}. \\ & c = -\frac{q_0 a^4}{2\pi^3 D\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \quad \text{cînd } b : a \leqslant 2{,}5 \\ & c = -\frac{q_0 a^4}{76{,}8\, D\left[1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]} \quad \text{cînd } b : a > 2{,}5, \end{aligned}\right\} \quad (4.229)$$

unde: $c = w_{max}$; momentele calculate după relația (4.226) sînt aici majorate în medie cu 10%; mai precis:

$$M_{max} = M_x = \frac{0{,}125\, qa^2}{1 + 1{,}6\frac{a^2}{b^2}}; \quad M_y = M_x \frac{\mu + \frac{a^2}{b^2}}{1 + \mu\frac{a^2}{b^2}}. \quad (4.230)$$

c) Aceeași, cu marginile încastrate

$$\left.\begin{aligned} & w_{max} \approx -\frac{qa^4}{384\, D\left(1 + \frac{a^5}{b^5}\right)}, \\ & M_{min} \approx -\frac{qa^2}{12\left(1 + 0{,}62\frac{a^4}{b^4}\right)}, \quad M_{max} \approx \frac{qa^2}{24\left(1 + 0{,}8\frac{a^4}{b^4}\right)} \end{aligned}\right\}. \quad (4.231)$$

d) Aceeași, încastrată în lungul laturilor b; momentul de încastrare este:

$$M_{min} = -\frac{qa^2}{12\left(1 + 0{,}2\frac{a^4}{b^4}\right)}. \quad (4.232)$$

e) Aceeaşi, placă pătrată, rezemată în colţuri

$$w_{max} = -\frac{qa^4}{38\,D};\quad M_{max} = 0{,}111\,qa^2. \tag{4.233}$$

f) Forţă concentrată în mijloc, contur simplu rezemat (fig. 4.71) $(a \leqslant b)$

$$\left.\begin{aligned} w_{max} &= - \\ &= -\frac{Pa^2}{D\,59\left(1 + 0{,}46\,\dfrac{a^4}{b^4}\right)}, \\ M_{max} &= c\,\frac{P}{6}\ (\text{cînd } a = b). \end{aligned}\right\} \tag{4.234}$$

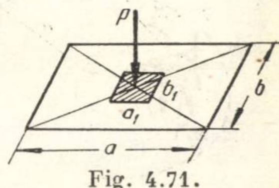


Fig. 4.71.

unde c se ia din tabela 4.33.

Tabela **4.33. Coeficientul** c **pentru formula** (4.234)

$a_1:a$ \ $b_1:b$	0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,0
0	∞	1,93	1,51	1,08	0,67	0,55
0,1	2,27	1,70	1,39	1,02	0,65	0,53
0,2	1,85	1,52	1,28	1,97	0,62	0,50
0,4	1,39	1,22	1,07	0,85	0,55	0,46
0,8	0,93	0,84	0,76	0,62	0,42	0,34
1,0	0,76	0,69	0,63	0,52	0,35	0,29

g) Aceeaşi, margini încastrate $(a \leqslant b)$

$$w = -\frac{Pa^2}{D\,136\left(1 + 0{,}31\,\dfrac{a^4}{b^4}\right)};\quad M_{min} = -\frac{P}{5{,}4\left(1 + 0{,}46\,\dfrac{a^2}{b^2}\right)} \tag{4.235}$$

h) Tensiunea în placa simplu rezemată σ_r şi în placa încastrată σ_i datorită diferenţei de temperatură t între feţele paralele cu planul median, este

$$\sigma_l = E\,\frac{\alpha t}{2};\quad \sigma_i = E\,\frac{\alpha t}{2\,(1 - \mu)} \tag{4.236}$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară.

§ 4.34 Plăci circulare și eliptice

Pentru o sarcină simetrică, relațiile între momentul radial M_r, cel tangențial M_t și forța tăietoare T (fig. 4.72), de asemenea între săgeata w și unghiul de rotire φ, au forma

Fig. 4.72.

$$\left.\begin{aligned} T_r &= M_i - M_r - r\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r}. \\ M_r &= D\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} + \mu\frac{\varphi}{r}\right). \\ M_t &= D\left(\frac{\varphi}{r} + \mu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right); \end{aligned}\right\} \quad (4.237)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}; \\ \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} - \frac{\varphi}{r^2} &= -\frac{T}{D^2} \end{aligned}\right\} \quad (4.238)$$

Integrala generală a ecuației diferențiale (4.238) este:

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r} + \varphi_0, \quad (4.239)$$

unde: A și B sînt constante; φ_0 este o soluție particulară ecuațiile generale, funcție de parametrii inițiali, se pot scrie în forma:

$$\left.\begin{aligned} w = w_0 &+ \frac{M_{r0}}{2!\,D(1+\mu)}r^2 - \frac{2T_0}{3\cdot 3!D}r^3 - \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_0\frac{3}{4\cdot 4!\,D}r^4 - \\ &- \left(\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}r^2}\right)_0\frac{4}{5\cdot 5!}r^5 - \ldots \\ \varphi &= \frac{M_{r0}}{D(1+\mu)}r - \frac{2\,T_0}{3\cdot 2!D}r^2 - \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_0\frac{3}{4\cdot 3!D}r^3 - \\ &- \left(\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}r^2}\right)_0\frac{4}{5\cdot 4!D}r^4 - \ldots; \\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} &= -\frac{2T_0}{3D}r - \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_0\frac{3}{4\cdot 2!D}r^2 - \left(\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}r^2}\right)_0\frac{4}{5\cdot 3!D}r^3 - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4.240)$$

Cazuri particulare:

a) placă eliptică, încastrată pe margini şi cu o sarcină uniform distribuită (*a* şi *b* sînt semiaxele):

$$w = -\frac{qa^4b^4}{24\,D\left(a^4 + \frac{2}{3}a^2b^2 + b^4\right)}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 \qquad (4.241)$$

(originea coordonatelor este în centrul plăcii).

b) placă circulară de rază *a*, simplu rezemată

$$\left.\begin{aligned} w &= -\frac{q}{64\,D}\left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \mu}\right],\\ \varphi &= \frac{qa^3}{12D(1 - \mu^2)}\ (\text{pe contur}),\\ max\,M_r &= max\,M_t = \frac{qa^2}{16}(3 + \mu)\ (\text{în centru});\end{aligned}\right\} \qquad (4.242)$$

în cazul încastrării conturului, al doilea termen din paranteză, în expresia lui *w*, dispare, iar momentele vor fi:

$$\left.\begin{aligned} max\,M_r &= max\,M_t = \frac{qa^2}{16}(1 + \mu)\ (\text{în centru}),\\ min\,M_r &= -\frac{qa^2}{8},\ min\,M_t = -\mu\frac{qa^2}{8}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.243)$$

c) aceeaşi, sub acţiunea unui moment *M* distribuit pe contur:

$$\left.\begin{aligned} w &= -\frac{M}{2D(1 + \mu)}(a^2 - r^2),\\ \varphi &= \frac{Ma}{D(1 + \mu)}\ (\text{pe contur}).\end{aligned}\right\} \qquad (4.244)$$

d) aceeaşi, sub acţiunea unei forţe concentrate (în centru):

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{P}{8\pi D}\left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu}\left(\frac{a^2 - r^2}{2}\right) + r^2 \ln\frac{r}{a}\right]\\ \varphi &= \frac{P \cdot a}{4\pi D(1 + \mu)}\ (\text{pe contur}),\\ M_r &= \frac{(1 + \mu)P}{4}\ln\frac{a}{r}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.245)$$

Dacă conturul este încastrat, în expresia lui w dispare termenul $(3+\mu):(1+\mu)$, iar momentul este

$$M_r = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{a}{r} - 1\right]; \quad M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{a}{r} - \mu\right]. \quad (4.246)$$

e) placă circulară subţire, încastrată pe contur; săgeţile mari w_0 se găsesc din ecuaţia

$$w_0\left(1 + 0{,}58\frac{w_0^2}{h^2}\right) = \frac{qa^4}{64\,D}; \quad (4.247)$$

în cazul unei membrane se înlătură 1 din paranteză, iar tensiunile maxime din centru σ_0 şi pe contur σ_a sînt

$$\sigma_0 = 0{,}42\sqrt[3]{E\left(\frac{qa}{h}\right)^2}, \quad \sigma_a = 0{,}78\,\sigma_0; \quad (4.248)$$

pentru membrana pătrată, de latură $2a$:

$$w_0 = 0{,}8\,a\sqrt[3]{\frac{qa}{Eh}}; \quad \sigma_0 = 0{,}4\sqrt[3]{E\left(\frac{qa}{h}\right)^2}. \quad (4.249)$$

f) placă (modul de elasticitate E, grosime h, rază a) pe teren elastic (modul de elasticitate E_0, coeficient de fundaţie k), avînd parametrul $\dfrac{E_0a^3}{Eh^3} > 3$, sub acţiunea unei forţe concentrate P:

$$\left.\begin{aligned} w_p &= \frac{P}{8\sqrt{Dk}}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \\ k &\approx \frac{0{,}65\,E_0}{h}\sqrt[3]{\frac{E_0}{E}}. \end{aligned}\right\} \quad (4.250)$$

g) aceeaşi, cu o sarcină continuă q, distribuită pe o suprafaţă mică de rază r:

$$w_q = \frac{16\,(1-\mu_0^2)\,qr}{3\pi E_0}. \quad (4.251)$$

Bibliografie

1. Бубнов И. Г. Труды по теории пластин, Гостехиздат, 1953.
2. Папкович П. Ф., Строительная механика корабля, ч-2, Судпромгиз, 1941.
3. Тимошенко. С. П., Пласлинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.
4. Справочник машиностроения, т.3, гл. V, Машгиз, 1955.

4.7
Stabilitate elastică

§ 4.35. Ecuaţii generale pentru bare drepte

Ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate a unei bare solicitată la încovoiere şi la compresiune cu o forţă N (fig. 4.73) este:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} - \alpha^2 (v - v_0), \tag{4.252}$$

unde

$$M = M_0 + T_0 x + q_0 \frac{x^2}{2} + \ldots;$$

$$\alpha^2 = N : EI. \tag{4.253}$$

Fig. 4.73.

Soluţiile generale ale ecuaţiei, cînd $EI = \text{const}$, sînt:

$$v = v_0 + \frac{\varphi_0}{\alpha} \sin \alpha x + \frac{M_0}{EI\alpha^2}(1 - \cos \alpha x) + \frac{T_0}{EI\alpha^3}(\alpha x - \sin \alpha x) + \frac{q_0}{EI\alpha^4}\left(\frac{\alpha^2 x^2}{2!} - 1 + \cos \alpha x\right) + \ldots; \tag{4.254}$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos \alpha x + \frac{M_0}{EI\alpha} \sin \alpha x + \frac{T_0}{EI\alpha^2}(1 - \cos \alpha x) + \frac{q_0}{EI\alpha^3}(\alpha x - \sin \alpha x) + \ldots; \tag{4.255}$$

$$M = M_0 \cos \alpha x + \frac{T_0}{\alpha} \sin \alpha x + \frac{q_0}{\alpha^2}(1 - \cos \alpha x) - \varphi_0 EI \alpha \sin \alpha x + \ldots \tag{4.256}$$

În cazul cînd $N = N_{cr}$ şi dacă nu există sarcini transversale, formulele (4.252) — (4.256) duc la expresia forţei critice de flambaj; pentru cele patru cazuri uzuale de flambaj (ale lui Euler), notate în fig. 4.74, expresia forţei critice este:

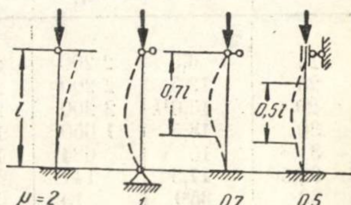


Fig. 4.74.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}; \quad \mu = \frac{\pi}{\alpha l} = \frac{\pi}{\nu}. \tag{4.257}$$

Valorile coeficientului μ sînt date în fig. 4.74.

Tensiunile critice, în domeniul flambajului elastic sînt (după Euler):

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leqslant \sigma_p; \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} \tag{4.258}$$

unde: λ este coeficientul de sveltețǎ; $i = \sqrt{I:A}$ este raza minimă de inerție a secțiunii; σ_p este limita de proporționalitate. Formula (4.258) este valabilă pentru

$$\lambda \geqslant \lambda_e = \pi \sqrt{E:\sigma_p}. \tag{4.259}$$

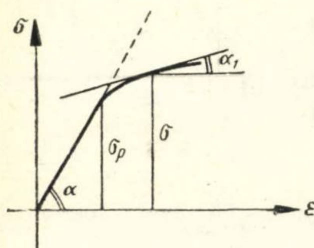


Fig. 4.75.

Pentru $\lambda < \lambda_e$ tensiunea critică este deasupra limitei de proporționalitate

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{cr} &= \frac{\pi^2 T}{\lambda^2}; \\ T &= \frac{4\,EE_1}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_1})^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.260}$$

unde $E = \text{tg}\,\alpha$ și $E_1 = \text{tg}\,\alpha_1$ (fig. 4.75); expresia lui T (după Engesser Iasinski) este valabilă pentru secțiuni dreptunghiulare și este suficient de precisă pentru alte forme de secțiuni. Uneori (după Shanley) se ia $T = E_1$.

Valorile lui E_1 și T, pentru două materiale, sînt date în tabela 4.34.

Tabela 4.34. **Modulele E_1 și T (tf/cm²)**

σ [kgf/mm²]	Oțel SHL-1			Duraluminiu		
	ε	E_1	T	ε	E_1	T
14	6,3	2 200	2 200	20¹⁾	700	700
28	12,5	2 200	2 200	70²⁾	105	218
29	13,0¹⁾	2 200	2 200	79	88	187
30	13,5	1 650	1 900	81	70	155
31,6	15	684	1 125	120	42	105
32,5	17,5	147	369	145	36	95
33	35²⁾	19	88	180	33	88
42	52	19	88	1 000³⁾	10	35
66	1 800³⁾	19	88	—	—	—

Observație. ε este majorat de 10^4 ori, 1) ε_p; 2) ε_c; 3) ε_l.

În lipsa datelor asupra lui T şi E_1 se utilizează formula lui Tetmayer-Iasinski

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda; \quad a \approx (1,0 \dots 1,4)\,\sigma_c; \quad b = \frac{a - \sigma_p}{\lambda_p} \tag{4.261}$$

unde λ_p este dat de formula (4.259); σ_c şi σ_p sînt limitele de curgere şi de proporţionalitate. Mărimile a şi b pentru unele materiale (kgf/mm²) sînt:

	Oţel 3	Oţel 50	SHL-1	Pin
a	34	60	37	2,93
b	0,15	0,30	0,1	0,02

Pentru fontă se utilizează uneori formula

$$\sigma_{cr} = 7\,800 - 120\,\lambda + 0,5\,\lambda^3. \tag{4.262}$$

Dimensionarea barelor comprimate se face cu formula:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leqslant \sigma_a \varphi \tag{4.263}$$

unde σ_a este rezistenţa admisibilă la compresiune, pentru $\lambda = 0$; φ se ia din tabela 4.35. Coeficientul de siguranţă se determină cu formula

$$c = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma} = \frac{\sigma_{cr}}{\varphi \cdot \sigma_a}. \tag{4.264}$$

Să se determine secţiunea pătrată a unui stîlp de lemn, de lungime $l = 4$ m, articulat la capete, luînd $\sigma_a = 125$ kgf/cm², pentru $P = 25$ tf. Din formula (4.263) găsim $A = 200 : \varphi$. Luînd o valoare arbitrară $\varphi = 0,55$, găsim $A = 364$ cm², iar latura pătratului $a = 19$ cm; în acest caz $i = \sqrt{I:A}, = \frac{a}{\sqrt{12}} = 5,5$ cm; prin urmare, svelteţea este $\lambda = \frac{l}{i} = 73$ şi din tabela 4.35, prin interpolare, se află $\varphi_k = 0,57$. Abaterea valorii calculate φ_k de la cea iniţială, φ mai mică decît 5 %, este admisibilă; de aceea, luăm secţiunea $a^2 = 19^2 = 361$ cm²; $\sigma_a\varphi = 125 \cdot 0,57 = 71$ kgf/cm²; $\sigma = P : A = 69$ kgf/cm²; pentru lemn, după (4.259) $\lambda_p = 100$; de aceea, tensiunea critică după (4.261), este $\sigma_{cr} = 293 - 2 \cdot 73 = 147$ kgf/cm²; coeficientul de siguranţă este $c = 147 : 69 = 2,13$.

Condiţiile de pierdere a stabilităţii, pentru cîteva cazuri de fixare la capete şi de încărcare, sînt date în tabela 4.36.

Tabela 4.35. **Valorile coeficientului de flambaj φ**

λ	Oţel OL 38	Fontă	Lemn de brad	Oţel OL 52
0	1,000	1,000	1,000	1,000
20	1,000	0,910	0,970	1,000
30	0,953	0,810	0,930	0,939
40	0,907	0,690	0,870	0,879
50	0,862	0,570	0,800	0,820
60	0,817	0,440	0,710	0,760
70	0,771	0,340	0,610	0,695
80	0,723	0,260	0,480	0,620
90	0,672	0,200	0,380	0,507
100	0,610	0,160	0,300	0,411
110	0,510	—	0,250	0,339
120	0,428	—	0,220	0,285
130	0,365	—	0,180	0,243
140	0,314	—	0,160	0,409
150	0,274	—	0,140	0,183
160	0,240	—	—	0,160
170	0,213	—	—	0,142
180	0,190	—	—	0,127
190	0,170	—	—	0,113
200	0,154	—	—	0,102
210	0,140	—	—	0,093
220	0,127	—	—	0,085
230	0,116	—	—	0,077
240	0,107	—	—	0,071
250	0,098	—	—	0,065

Tabela 4.36. Condiţiile de pierdere a stabilităţii

Forma de pierdere a stabilităţii	Condiţia
φ_0, C_φ, φ_0, N, l	$\operatorname{tg}\nu = \frac{C\varphi l}{EI\nu}, \quad \nu = \alpha l$ C_φ – rigiditatea încastrării (kg/cm)
φ_0, C_φ, φ_0, N, l	$\operatorname{tg}\nu = \frac{\nu}{1 + \frac{EI\nu^2}{C_\varphi l}}$
M_0, $T_0 = T_l$, v_l, N, $Q_l = C_v v_l$	$\operatorname{tg}\nu = \nu\left(1 - \frac{\alpha^2 EI}{C_v l}\right)$ C_v – rigiditatea reazimului (kg/cm)
φ_0, C_φ, φ_0, v_l, N, $T_0 = T_l$, $C_v v_l$	$\frac{EI}{C_v l^3} = \left(\bar{a}_0 + \frac{\psi}{3}\right) : \left(\bar{a}_0 \nu^2 - \frac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}\right),$ $\bar{a}_0 = \frac{EI}{C_\varphi l}$, ψ – cm, cazul 7 mai departe
φ_0, C_φ, φ_l, C_φ, N, l	$\frac{\psi}{3}\,\frac{EI}{l}\left(\frac{1}{C_{\varphi_0}} + \frac{1}{C_{\varphi_l}}\right) +$ $+ \left(\frac{EI}{l}\right)^2 \frac{1}{C_{\varphi_0} C_{\varphi_l}} + \frac{\chi}{12} = 0,$ $\chi = \frac{12\left(2\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} - \nu\right)}{\nu^3}$

Tabela 4.36 (*continuare*)

Forma de pierdere a stabilității	Condiția
	$\operatorname{tg} \nu = \dfrac{C_1 l_2}{E_2 I_2 \nu_2}$ $C_1 = 3E_1 I_1 : l_1 \psi_1$
	$\dfrac{\psi_1 l_1}{E_1 I_1} = -\dfrac{\psi_2 l_2}{E_2 I_2}$ $\psi_1 = \dfrac{3(\operatorname{tg} \nu_1 - \nu_1)}{\nu_1^2 \operatorname{tg} \nu_1}$
	$\operatorname{tg} \nu_1 \operatorname{tg} \nu_2 = \dfrac{E_1 I_1 \alpha_1}{E_2 I_2 \alpha_2}$ $\nu_1 = \alpha_1 l_1 = \sqrt{\dfrac{N(1+\beta)}{E_1 I_1}}\, l_1,$ $\nu_2 = \alpha_2 l_2 = \sqrt{\dfrac{N}{E_2 I_2}}\, l_2$
	$(ql)_{cr} = k \dfrac{EI}{l^2}$; pentru modurile de rezemare din fig. 4.74. Cazul 1. $k = 7{,}87$ Cazul 2. $k = 18{,}5$ Cazul 3. $k = 52{,}5$ Cazul 4. $k = 73{,}6$

Fie (cazul 1) $C_\varphi = \frac{3EI}{l}$, atunci $\operatorname{tg} \nu = \frac{3}{\nu}$; din tabelele de funcţii trigonometrice, găsim $\nu = 1,192$ şi din formula (4.257) $\mu = \pi : \nu = 2,63$, din (4.257), $N_{cr} = 1,42 \frac{EI}{l^2}$. În cazul 8, luăm $l_1 = 2l_2 = l$,

$$I_1 = 2I_2 = I, \ \beta = 1; \ \text{atunci} \ \nu_1 = l\sqrt{\frac{2N}{EI}}, \ \nu_2 = 0,5\ \nu_1, \ \alpha_1 = \alpha_2,$$

$$\operatorname{tg} \nu_1 \operatorname{tg} 0,5\ \nu_1 = 2;$$

din tabelele de funcţii trigonometrite, $\nu_1 = 1,23$; prin urmare

$$N_{cr} = 0,75 \frac{EI}{l^2}.$$

§ 4.36. Bare de secţiune variabilă

Pentru unele bare cu secţiune variabilă în trepte, vezi tabela 4.36. În cazul general, este avantajoasă utilizarea metodei grafo-analitice (§ 4.27). Admitem că se cere expresia lui N_{cr} (fig. 4.76) pentru o bară cu moment de inerţie venind continuu, după legea

$$I_x = I_0 \left(1 + 0,2 \frac{x}{l} + 0,2 \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Forma de pierdere a stabilităţii este indicată în fig. 4.76, *a*, iar în fig. 4.78, *b* este dată diagrama sarcinii fictive şi a săgeţilor; deci forţa critică este

$$N_{cr} = \frac{EI_1}{-v_1}. \tag{4.265}$$

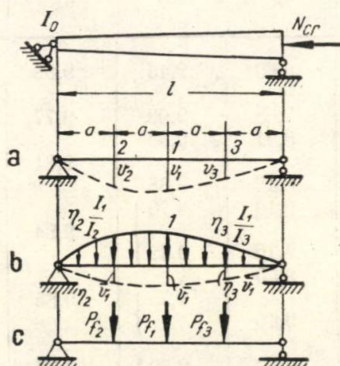


Fig. 4.76.

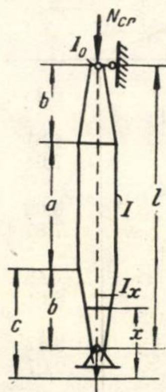


Fig. 4.77.

unde I_1 şi $\bar{v}_1$ sînt momentul de inerţie şi săgeata în punctul caracteristic, care posedă indicele 1. Trecerea la sarcinile fictive concentrate (fig. 4.76, *c*) după formula (4.176) dă:

$$P_{f_2} = 0{,}087\, l\,(2{,}166\,\eta_2 + 0{,}515);\; P_{f_1} = 0{,}087\, l\,(2 + 0{,}558\,\eta_2 + 0{,}470\,\eta_3)\; P_{f_3} = 0{,}087\, l\,(0{,}515 + 1{,}822\,\eta_3).$$

Săgeţile, calculate ca momente ale sarcinii fictive sînt:

$$\bar{v}_2 = \eta_2\bar{v}_1 = 0{,}087\,\frac{l^2}{4}\,(1{,}515 + 1{,}902\,\eta_2 + 0{,}691\,\eta_3),$$

$$\bar{v}_1 = 0{,}087\,\frac{l^2}{4}\,(2{,}515 + 1{,}638\,\eta_2 + 1{,}382\,\eta_3),$$

$$\bar{v}_3 = \eta_3\bar{v}_1 = 0{,}087\,\frac{l^2}{4}\,(1{,}515 + 0{,}820\,\eta_2 + 1{,}601\,\eta_3).$$

De aici, $\eta_2 = 0{,}723$, $\eta_3 = 0{,}691$. Prin urmare,

$$N_{cr} = \frac{11{,}36\,EI_0}{l^2} \text{ şi } \bar{v}_1 = 0{,}1012\, l^2.$$

Pentru stîlpul din fig. 4.77 forţa critică este

$$N_{cr} = k\,\frac{EI}{l^2};\quad I_x = I_0\left(\frac{x}{c}\right)^m \qquad (4.266)$$

unde *k* este un coeficient ce depinde de variaţia lui I_x şi este indicat în tabela 4.37, după A.N. Dinnik, pentru $m = 1$ şi $m = 4$.

T a b e l a 4.37. **Coeficientul** k **din formula** (4.266).

$I_0 : I$ \ $a : l$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	m
0,1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	1
	4,81	6,11	7,68	9,08	9,77	4
0,2	7,01	7,99	8,91	9,63	9,81	1
	6,02	7,90	8,42	9,38		4
0,4	7,87	8,59	9,19	9,70	9,84	1
	7,48	8,33	9,10	9,62		4
0,6	8,61	9,12	9,55	9,75	9,85	1
	8,47	9,01	9,45			4
0,8	9,27	9,54	9,69	9,82	9,86	1
	9,23	9,49				4

§ 4.37. Bare compuse şi bare pe reazeme elastice

Forţa critică a unui stîlp din zăbrele (fig. 4.78) se determină cu formula:

$$N_{cr} = \psi N_0; \quad 1 : \psi = 1 + \frac{\pi^2 I_y}{l^2}\left[\frac{1}{A_1 \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha} + \frac{1}{A_2 \operatorname{tg}\alpha}\right] \qquad (4.267)$$

unde: N_0 este forţa critică fără considerarea legăturilor; A_1 şi A_2 sînt ariile secţiunii diagonale şi a unui montant, I_y este momentul

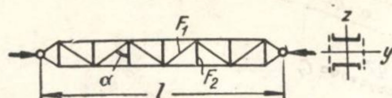


Fig. 4.78.

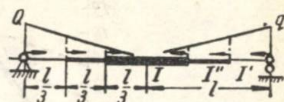


Fig. 4.79.

de inerţie al secţiunii barelor. Coeficientul de zvelteţe ideal (de calcul) se determină cu formula:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\lambda_2^0 + \lambda_1^2} \\ \lambda_0 &= l : i_y; \; \lambda_1 = a : i_1 \end{aligned}\right\} \qquad (4.268)$$

unde i_y şi i_1 sînt respectiv razele de inerţie ale barei pe toată lungimea ei de pe distanţa între două solidarizări. Forţa critică a barei (fig. 4.79), corespunzînd acţiunii unei sacini de compresiune descrescînd liniar spre mijlocul deschiderii, în cazul unui moment de inerţie variabil în trepte *(problema lui Iasinski)* se determină după formula:

$$N_{cr} = \frac{ql}{2} = k\,\frac{EI}{l^2} \qquad (4.269)$$

unde k se ia din a doua coloană a tabelei 4.38, iar

$$\alpha = I' : I \text{ şi } 1 + \alpha = 2I'' : I.$$

T a b e l a 4.38. **Coeficienţii k pentru formula (4.269)**

α	k	Talpa comprimată a fermei pentru		
		6 panouri	12 panouri	16 panouri
1	5,12	3,58	4,22	4,41
0,8	4,94	3,42	—	—
0,6	4,78	3,24	—	—
0,4	4,53	3,00	—	—
0,2	4,12	2,59	—	—

Dacă talpa comprimată a fermei unui pod are un număr intermediar de panouri, atunci mărimea k trebuie luată din coloanele următoare ale tabelei 4.38. Influenţa reacţiunii elastice a montanţilor şi a diagonalelor este favorabilă, forţa critică crescînd şi mărimea lui k trebuie căutată în graficul din fig. 4.80, unde β este coeficientul de tasare (kg/cm^2), egal cu reacţiunea elastică a montanţilor şi dia-

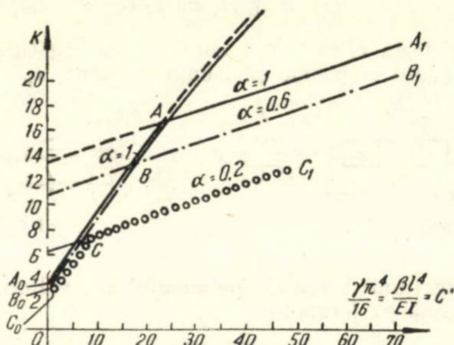


Fig. 4.80.

gonalelor din nod, împărţită cu lungimea panoului. Ecuaţiile curbelor din fig. 4.80 se aproximează cu drepte şi sînt:

$$\left.\begin{aligned} A_0A &: k = 3{,}58 + 0{,}52\ c \\ AA_1 &: k = 13{,}32 + 0{,}135\ c \\ C_0C &: k = 2{,}59 + 0{,}63\ c \\ CC_1 &: k = 6{,}15 + 0{,}14\ c. \end{aligned}\right\} \qquad (4.270)$$

Punctele A, B şi C determină trecerea de la umflarea după o singură semiundă la cea după două semiunde, care este uneori mai periculoasă.

Pentru o grindă rezemată fix la capete, de secţiune constantă şi de lungime l, aşezată pe un teren elastic (cu coeficientul de tasare β), şi comprimată cu o forţă constantă, N_{cr} se determină cu formula (4.269)

$$k = \pi^2\left(n^2 + \frac{c}{\pi^4 n^2}\right) \approx \pi^2 + 1{,}93\sqrt{c}, \quad c = \frac{\beta l^4}{EI}; \qquad (4.271)$$

dacă grinda nu are reazime la extremităţi, atunci pentru $P_{cr} > P_e$ şi $P_{cr} < P_e$ avem respectiv

$$k \approx 1{,}07\sqrt{c} \ \text{ şi } \ k \approx \sqrt{8 \cdot 10^{-6}c^2 + c} \qquad (4.272)$$

unde $P_e = \pi^2 EI : l^2$.

În cazul cînd grinda nu este aşezată pe un mediu continuu, ci pe reazime elastice, distanţate cu $a = \text{const}$, se pot utiliza formulele (4.271) şi (4.272), înlocuind coeficientul reazimului elastic c cu βa.

§ 4.38. Inele şi arce

Pentru inele circulare şi arce de secţiune constantă, ecuaţia diferenţială care duce la stabilirea sarcinii critice şi integrala ei au forma (fig. 4.62):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2v}{d\alpha^2} + n^2 v = \frac{MR^2}{EI}, \quad n^2 = 1 + \frac{NR^2}{EI}, \\ &M = M_0 + T_0 R \sin\alpha + N_0 R (1 - \cos\alpha) + q_r{}^0 R^2 (\cos\alpha - 1); \end{aligned}\right\} \tag{4.273}$$

$$v = v_0 \cos n\alpha + \frac{\varphi_0 R + u_0}{n} \sin n\alpha + \frac{a}{n^2}(1 - \cos n\alpha) + \\ + \frac{b\left(\sin\alpha - \frac{1}{n}\sin n\alpha\right)}{n^2 - 1} + \frac{c(\cos\alpha - \cos n\alpha)}{n^2 - 1}; \tag{4.274}$$

$$a = \frac{R^2}{EI}(M_0 + N_0 R - q_r{}^0 R^2), \quad b = \frac{R^3}{EI} T_0, \\ c = \frac{R^3}{EI}(- N_0 + q_r{}^0 R). \tag{4.275}$$

Pentru arcul cu două articulaţii (fig. 4.81), luînd originea coordonatelor în punctul O, avem $v_0 = u_0 = M_0 = 0$; din condiţia $v = 0$ pentru $\alpha = \beta$ din (4.274) găsim:

$$\frac{\varphi_0 R}{n} \sin n\beta = 0,$$

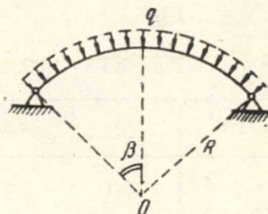


Fig. 4.81.

de unde $n\beta = \pi$, iar din (4.273) obţinem formula forţei critice:

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi^2}{\beta^2} - 1\right)\frac{EI}{R^2}; \tag{4.276}$$

pentru $\beta = \pi$ obţinem N_{cr} pentru inel:

$$N_{cr} = \frac{3EI}{R^2} = qR. \tag{4.277}$$

Pentru un arc fără articulaţii

$$N_{cr} = qR = k\frac{EI}{R^2}, \quad k = \frac{6{,}38}{\alpha \sin 0{,}25\alpha\left(1{,}066 + 0{,}283\,\dfrac{\sin 0{,}75\,\alpha}{\sin\alpha}\right)}. \tag{4.278}$$

Pentru un arc parabolic cu două articulaţii, intensitatea sarcinii uniform distribuite pe deschiderea l este $q_{cr} = EI \cdot k : l^3$, unde pentru săgeata f şi $a = 0,5l$, avem:

$$k \approx \frac{32\,\pi^2\,(f : a)}{\left(1 + \frac{7}{3}\frac{f^2}{a^2}\right)^{3/2} + \left(1 + 1,118\,\frac{f^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\frac{f^2}{a^2}\right)^{1/2}}, \quad (4.279)$$

Pentru un arc parabolic, fără articulaţii (cu aceleaşi notaţii, ca şi pentru arcul cu două articulaţii):

$$k \approx \frac{183\sqrt{l}\,(6 + 7,03\,l)}{(1 + 2,29\,l)\left[\left(1 + \frac{7}{3}l\right)^{1/2}(1,35 + 1,1\,l) + \left(1 + \frac{1}{3}l\right)^{1/2}(2 + 0,58\,l)\right]} \quad (4.280)$$

unde $l = \frac{f^2}{a^2}$.

§ 4.39. Plăci şi învelitori

Forţa critică pentru *placa* dreptunghiulară, simplu rezemată pe contur, comprimată în lungul axei Ox (fig. 4.82) este:

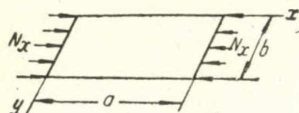


Fig. 4.82.

$$N_x = \frac{\pi^2 D}{b^2}\,k = \frac{\pi^2 D}{a^2}\,k_1. \quad (4.281)$$

Valorile coeficientului k sînt date în tabela 4.39; D este rigiditatea $D = Eh^3 : 12\,(1 - \mu^2)$ unde h este grosimea plăcii.

Tabela 4.39. **Coeficienţii k din formula (4.281)**

a/b	0,4	0,6	0,8	1,0	1,41	2
k	8,41	5,14	4,2	4,0	4,47	4,0

La placa comprimată de-a lungul ambelor axe Ox şi Oy, $N_{cr} = N_x m^2 + N_y \alpha^2$

$$N_{cr} = \pi^2 D a^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2; \quad (4.282)$$

pentru $a = b$, $N_x = N_y = N_{cr}$

$$N_{cr} = 2\,\frac{\pi^2 D}{a^2}. \quad (4.283)$$

Compresiunea axială a unui cilindru cu pereţi subţiri poate provoca pierderea stabilităţii; forţa critică este:

a) la flambajul în ansamblu

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^3 Eha^3}{(\mu l)^2}; \qquad (4.284)$$

b) la flambajul local al peretelui

$$N_{cr} = \alpha \frac{Eh^2}{a\sqrt{3(1-\mu^2)}}. \qquad (4.285)$$

unde valorile coeficientului α, determinate experimental, sînt cuprinse între limitele: 0,3 — 0,6; h este grosimea peretelui; a este raza cilindrului.

4.8
Solicitări compuse

§ 4.40. Incovoiere oblică şi compresiune excentrică

Formula tensiunii normale în secţiunea transversală, la încovoiere oblică (fig. 4.83) este:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z; \qquad \left. \begin{aligned} M_z &= M\cos\alpha; \\ M_y &= M\sin\alpha. \end{aligned} \right\} \qquad (4.286)$$

Aici I_z şi I_y sînt momentele centrale principale de inerţie ale secţiunii transversale. Direcţiile axelor Oz şi Oy se aleg astfel ca în primul cadran momentele M_z şi M_y să producă tensiuni de întindere, care se iau cu semnul plus. Poziţia axei neutre este dată de unghiul

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha \frac{I_z}{I_y}. \qquad (4.287)$$

În cazul secţiunii dreptunghiulare, calculul tensiunii maxime se poate reduce la utilizarea formulei (fig. 4.83):

$$W_z = \frac{M}{\sigma_a}(\cos\alpha + c\sin\alpha) \qquad (4.288)$$

unde: W_z este cel mai mare modul de rezistenţă; $c = W_z : W_y$; pentru dreptunghi $c = h : b$ (latura b este paralelă cu axa Oz); pentru secţiunea în dublu T $(W_z > W_y)$, $c \approx 6 \div 15$; pentru profile U,

$c \approx 4 \div 11$. Secțiunile de formă regulată (cerc, inel, poligoane regulate) nu suferă încovoiere oblică, deoarece au $I_z = I_y$. În cazul întinderii sau compresiunii excentrice (fig. 4.84) tensiunea normală din secțiunea transversală, atunci cînd aceasta nu este cu pereți subțiri are expresia:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \qquad (4.289)$$

Regula semnelor, pentru componentele tensiunii, datorite momentelor, este aceeași, ca și în fig. 4.83; primul termen din (4.289) se ia

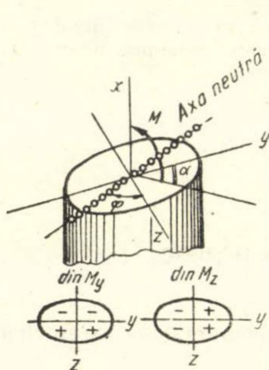


Fig. 4.83.

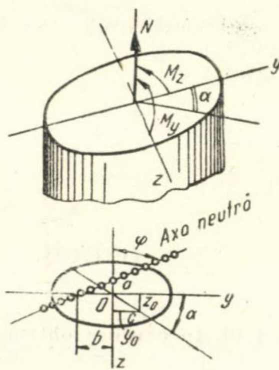


Fig. 4.84.

cu plus, dacă N este forță de întindere. Momentele M_z și M_y se obțin ca rezultat al reducerii forței N în centrul de greutate al secțiunii (punctul O); coordonatele punctului de aplicație al forței N (fig. 4.84) sînt:

$$z_0 = \frac{M_y}{N}, \quad y_0 = \frac{M_z}{N}. \qquad (4.290)$$

Poziția axei neutre se determină prin intersecțiile ei cu axele de coordonate, a și b, după ecuațiile:

$$az_0 = -i_y^2, \quad by_0 = -i_z^2, \qquad (4.291)$$

unde i_y și i_z sînt razele de inerție ale secțiunii transversale; în acest caz rămîne valabilă formula (4.287) pentru tg φ.

Se numește *sîmbure central* zona secțiunii, care posedă proprietatea că atunci cînd forța N se aplică în interiorul lui, ea produce în toată secțiunea tensiuni de același semn dacă punctul de aplicație al forței (z_0, y_0) se deplasează pe conturul sîmburelui central, atunci axa neutră va fi tangentă la conturul secțiunii; dacă punctul de

aplicaţie este aşezat în exteriorul sîmburelui, axa neutră intersectează secţiunea transversală.

Sîmburele central al cercului are diametrul $\alpha/4$; la un inel subţire, diametrul lui este $\alpha/2$; la dreptunghi are dimensiunile din fig. 4.85. În cazul cînd forţa excentrică N este aplicată pe una din axele principale, avînd de ex. $z_0 = 0$ atunci formula (4.289) devine

$$\sigma = \frac{N}{W_z'}(y_0 - b), \quad W_z' = \frac{I_z}{y}, \quad y_0 = \frac{M_z}{N}, \quad b = -\frac{i_z^2}{y} \qquad (4.292)$$

unde y este coordonata punctului, în care se calculează σ.

În fig. 4.86 este reprezentată o bară de secţiune circulară $d =$ $= 4$ cm), supusă acţiunii excentrice a forţei P_1 într-un plan vertical

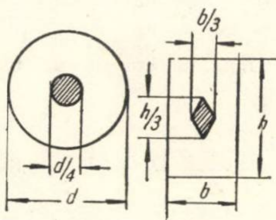


Fig. 4.85.

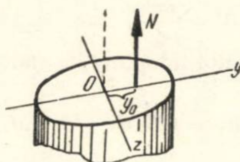


Fig. 4.86.

şi încovoierii de către forţa P_2 într-un plan orizontal. Pentru determinarea tensiunii din mijlocul deschiderii după formula (4.289), s-au construit diagramele de momente în planele orizontal (M_h) şi vertical (M_v). Deoarece $I_z = I_y$, se poate determina momentul rezultant $M = \sqrt{3\,000^2 + 4\,000^2} = 5\,000$ kg·cm. Prin urmare

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{1\,000}{12{,}56} \pm \frac{5\,000}{6{,}28},$$

$$\sigma_{max} = 840 \text{ kgf/cm}^2.$$

Formulele (4.289) şi (4.292) se modifică în cazul barelor foarte zvelte ($\lambda > 50$; vezi capitolul 4.7). Din cauza acţiunii comune a forţei N, aplicată cu excentricitatea e, şi a momentului datorit sarcinii transversale M_0, momentul încovoietor de calcul M_{calc}, se determină cu formula

$$M_{calc} = M_0 + Ne + \frac{Nv_0}{1 \pm \beta}. \qquad (4.293)$$

unde v_0 este săgeata în secţiunea de calcul, $\beta = N : N_{cr}$. Se ia $+ \beta$ în cazul întinderii şi $- \beta$ în cazul compresiunii. Mai precis, calculul trebuie efectuat folosind ecuaţiile generale (4.254) — (4.256).

Pentru luarea în considerare a influenței pereților subțiri (vezi § 4.21), în partea dreaptă a formulei (4.289) trebuie adăugat un al patrulea termen, care introduce acțiunea bimomentului B și care se determină cu formula (4.143): $\frac{B}{I_\omega} \cdot \omega$

§ 4.41. Răsucire cu încovoiere

Pentru o bară de secțiune circulară, formula de calcul este:

$$\sigma_{ech} = \frac{M_{ech}}{W} \leqslant \sigma_a \tag{4.294}$$

unde $W = \frac{\pi r^3}{4}$, iar M_{ech} se determină, în funcție de teoria de rezistență adoptată, astfel:

$$M_I = 0{,}5\, M_i + 0{,}5\, M_{III}; \quad M_{II} = \frac{1-\mu}{2} M_i + \frac{1+\mu}{2} M_{III};$$

$$M_{III} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2}; \quad M_V = \sqrt{M_i^2 + 0{,}75\, M_t^2} \tag{4.295}$$

unde M_i și M_t sînt momentele de încovoiere și răsucire în secțiunea periculoasă; indicii arată I — teoria σ_{max}; II — teoria ε_{max}; III — teoria τ_{max}; V — teoria τ_{oct}. Pentru secțiuni de formă oarecare:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_I &= 0{,}5\,\sigma_i + 0{,}5\,\sigma_{III}, \\ \sigma_{II} &= \frac{1-\mu}{2}\sigma_i + \frac{1+\mu}{2}\sigma_{III}, \\ \sigma_{III} &= \sqrt{\sigma_i^2 + 4\tau_t^2} \\ \sigma_V &= \sqrt{\sigma_i^2 + 3\tau_t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.296}$$

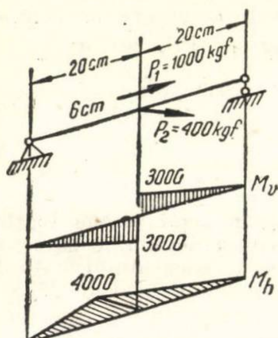


Fig. 4.87.

Aici σ_i și σ_t sînt tensiunea normală de încovoiere și tensiunea tangențială de răsucire în punctul periculos. De obicei se utilizează formulele M_V, σ_V. În cazul răsucirii cu întindere, se utilizează formulele (4.296) înlocuind pe σ_i prin $\sigma = \frac{N}{A}$. Se va calcula secțiunea circulară a unui arbore cotit, supus acțiunii a două forțe de 50 kgf,

aplicate în capetele bielei, a cărui poziţie de calcul este dată în fig. 4.87. $\sigma_a = 280$ kgf/cm². Momentul de calcul este:

$$M_V = \sqrt{500^2 + 0{,}75 \cdot 300^2} = 563 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Din formula (4.294), $W = 2$ cm³ şi $R = 1{,}35$ cm.

Bibliografie. Vezi capitolul 4.1.

4.9
Arcuri

§ 4.42. Arcul elicoidal

Diametrul firului arcului ($d = 2r$), comprimat cu forţa P, se găseşte cu formula:

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{5PR}{\tau_a}} \tag{4.297}$$

unde R este raza de înfăşurare; se poate face o verificare a tensiunii τ, cu relaţia:

$$\tau = \frac{2\,PR}{\pi r^3}\left(1 + \frac{r}{2R}\right) \leqslant \tau_a. \tag{4.298}$$

Săgeata arcului cu n spire este:

$$f = \frac{4\,PR^3 n}{Gr^4}. \tag{4.299}$$

§ 4.43. Arcul conic

Diametrul firului arcului se determină cu formula (4.297), unde R este raza maximă a conului, săgeata este

$$f = \frac{P\,(R^2 + R_1^2)\,(R + R_1)\,n}{Gr^4}, \tag{4.300}$$

unde R_1 este raza minimă a conului. Formula (4.300) este riguros valabilă numai pentru un arc cu pas constant.

Pentru arcuri cu unghi de înclinare constant săgeata f, obţinută din relaţia (4.300), trebuie înmulţită cu $\frac{2}{3} \cdot \frac{1 + c + c^2}{1 + c^2}$ unde $c = R_1 : R_2$.

Bibliografie.

1. Расчеты на прочность в машиностроении, под ред. С. Д. П о н о м а р е в а, т. 1, гл. XIII, Машгиз, 1956.

4.10
Vase cu pereţi groşi

§ 4.44. Calcule în regim elastic

În cazul acţiunii unei sarcini axial simetrice asupra unui *cilindru*, tensiunea tangenţială normală σ_t şi cea radială σ_r (fig. 4.88), se determină cu formula

$$\sigma_{t/r} = \frac{p_a - p_b \beta^2}{\beta^2 - 1} \pm \frac{(p_a - p_b) b^2}{r^2 (\beta^2 - 1)}; \qquad (4.301)$$

p_b şi p_a sînt presiunile exterioară şi interioară; $\beta = \frac{b}{a}$ tensiunea axială normală într-un vas cu funduri este:

$$\sigma_z = \frac{p_a - p_b \beta^2}{\beta^2 - 1}, \quad \beta = \frac{b}{a}. \qquad (4.302)$$

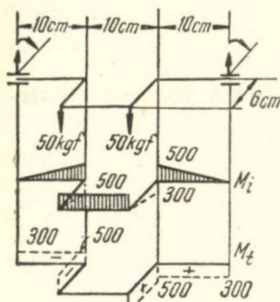


Fig. 4.88.

În cazul cilindrului cu pereţi subţiri, $\frac{a}{b} > 0{,}9$ formulele se simplifică:

$$\sigma_t = 2\sigma_z = \frac{p_a - p_b}{\delta} a, \qquad (4.303)$$

unde: $\delta = (b - a)$ este grosimea peretelui.

Deplasarea radială a unui punct situat la distanţa r de centru este:

$$u = \frac{r}{E(\beta^2 - 1)} \Big[(1 - \mu)(p_a - p_b \beta^2) + (1 + \mu) \frac{(p_a - p_b) b^2}{r^2} \Big] - \frac{\mu \delta_z \cdot r}{E}. \qquad (4.304)$$

La calculul de rezistenţă al tubului care suportă o presiune interioară, se utilizează următoarele formule, deduse pe baza uneia din teoriile de rezistenţă

II (ε_{max}), III (τ_{max}) sau V (τ_{oct}):

$$\sigma_{ech}^{II} = p_a \frac{1{,}3 \beta^2 + 0{,}4}{\beta^2 - 1}, \quad \sigma_{ech}^{III} = p_a \frac{2 \beta^2}{\beta^2 - 1},$$

$$\sigma_{ech}^{V} = p_a \frac{\beta^2 \sqrt{3}}{\beta^2 - 1}. \qquad (4.305)$$

Pentru tubul format din doi cilindri (tub fretat) dacă iniţial diferenţa razelor cilindrilor la suprafaţa de contact era $b_1 - a = \Delta$ (fig. 4.89), presiunea de fretaj este

$$p = \frac{E \cdot \Delta}{2b_1} \frac{(\beta_1^2 - 1)(\beta^2 - 1)}{(\beta_1^2\beta^2 - 1)}, \tag{4.306}$$

unde $\beta = b:a$; $\beta_1 = b_1 : a_1$; pentru a stabili tensiunile după determinarea lui p, fiecare cilindru se calculează cu formula (4.301): cilindrul exterior la acţiunea lui $p_a = p$, cel interior pentru $p_b = p$.

Pentru *vasul sferic cu pereţi groşi*:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= A + B, \\ \sigma_r &= A - 2B, \\ A &= \frac{p_a - p_b\beta^3}{\beta^3 - 1} \\ B &= \frac{(p_a - p_b)\, b^3}{2r^3(\beta^3 - 1)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.307}$$

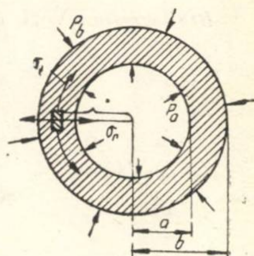


Fig. 4.89.

Deplasarea radială este

$$u = \frac{r}{E(\beta^3 - 1)}\left[(1 - 2\mu)(p_a - p_b\beta^3) + (1 + \mu)\frac{(p_a - p_b)\, b^3}{r^2}\right]. \tag{4.308}$$

Pentru sfera cu pereţi subţiri

$$\sigma_t = \frac{p_a - p_b}{2\delta} a. \tag{4.309}$$

§ 4.45. Calcule în stadiul plastic şi elasto-plastic

Atunci cînd cilindrul trece, pe toată grosimea sa, în stadiul plastic, tensiunile normale tangenţială σ_t şi radială σ_r sînt:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= k\sigma_c + \sigma_r, \\ \sigma_r &= -p_a + k\sigma_c \ln\frac{r}{a} = -p_b + k\sigma_c \ln\frac{b}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{4.310}$$

unde σ_c este limita de curgere, $k = 1$ pentru teoria a III-a de rezistenţă şi $k = 1,15$ pentru teoria a V-a. Dacă acţionează numai o presiune interioară p_a ($p_b = 0$), presiunea limită este:

$$p_{a,\,pl} = k\sigma_c \ln\beta. \tag{4.311}$$

Dacă trece în stare plastică numai o grosime c a cilindrului, unde $a < c < b$, atunci presiunea între zona elastică şi cea plastică se găseşte cu formula (fig. 4.90):

$$q = \sigma_c \cdot \frac{\beta_c^2 - 1}{2\beta_c^2}; \quad \beta_c = \frac{b}{c} \tag{4.312}$$

unde: σ_c este limita de curgere; după determinarea lui q, zona exterioară (cea elastică) se calculează cu relaţia (4.301), iar cea interioară (plastică) — cu relaţia (4.310).

Bibliografia. Vezi capitolul 4.1.

4.11
Solicitări dinamice

§ 4.46. Oscilaţiile sistemelor cu un singur grad de libertate

Ecuaţia diferenţială a oscilaţiilor mici fără amortizare şi integrala ei sînt:

$$v'' + \omega^2 v = \frac{P(t)}{m}; \tag{4.313}$$

$$v = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(t_1)\cdot \sin\omega(t - t_1)\,\mathrm{d}t_1 = v_0 \cos \omega t + \frac{v_0'}{\omega}\sin \omega t +$$

$$+ \frac{P(0)}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + \frac{P'(0)}{m\omega^3}(\omega t - \sin\omega t) + \ldots \tag{4.314}$$

unde: v_0, v_0', $P(0)$, $P'(0)$, ... sînt parametrii iniţiali: deplasarea, viteza, forţa exterioară şi derivata ei. Pulsaţia oscilaţiilor şi perioada T sînt legate prin formula:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{v_{st}^{(P)}}} = 2\pi f, \tag{4.315}$$

unde $c = \frac{1}{\delta}$ este constanta elastică a sistemului (forţa care produce o deplasare unitară) şi m masa oscilantă; $v_{st}^{(P)}$ este deplasarea statică a sistemului, datorită greutăţii $P = mg$; f este frecvenţa oscilaţiei, în Hz.

Soluţia (4.314) poate fi scrisă şi sub forma:[1])

$$v = \frac{1}{\omega^2 m}\left\{\left[P(t) - \frac{P''(t)}{\omega^2} + \frac{P^{(IV)}(t)}{\omega^4} - \dots\right] - \right.$$

$$\dots - \sin\omega t\left[P'(0) - \frac{P'''(0)}{\omega^3} + \dots\right] -$$

$$\left. \dots - \cos\omega t\left[P(0) - \frac{P''(0)}{\omega^2} + \dots\right]\right\} \quad (4.316)$$

în care n-au mai fost consideraţi primii doi termeni ai expresiei (4.314). Pentru unele cazuri particulare de acţiune a sarcinii $P(t)$ coeficienţii dinamici β sînt indicaţi în tabela 4.40. În cazul unui impuls puternic la care sarcina scade după fig. 4.91, coeficientul dinamic se găseşte cu formula

$$\left.\begin{aligned} \beta_{din} &= \alpha\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + A\cos\omega t + (B + D)\sin\omega t, \\ A &= 0{,}5\frac{S}{P}\omega^2\Delta\tau - \alpha, \quad B = \frac{\alpha}{\omega\tau}, \\ D &= \frac{S}{P}\omega, \quad S = P\Delta\tau. \end{aligned}\right\} \quad (4.317)$$

Maximul lui β_{din} are loc pentru

$$\omega t_{cr} = \arccos\frac{B + D}{R} + \arccos\frac{B}{R},$$

unde

$$R = \sqrt{A^2 + (B + D)^2}.$$

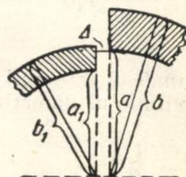


Fig. 4.90.

Pentru cazul oscilaţiilor mici de torsiune, formulele (4.313)—(4.316) rămîn valabile făcînd următoarele substituiri: masa m prin momentul de inerţie masic I, constanta elastică $c = \frac{P}{v_{st}^{(P)}}$ prin cea de răsucire $c_1 = \frac{M}{\varphi_{st}^{(M)}}$, depla-

[1]) *Charbonnier.* Mémorial de l'artillerie française, t.III.1924.

sarea liniară v prin cea unghiulară φ, forţa exterioară $P(t)$ prin cuplul exterior $M(t)$. În cazul prezenţei unor forţe de amortizare proporţionale cu viteza mişcării, coeficientul dinamic este

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\lambda^2\theta^2}{\pi^2\omega^2}}}, \tag{4.318}$$

Tabela 4.40. **Coeficienţii dinamici β**

Ecuaţia $P(t)$	Formula lui β
Impulsul $P\Delta t$	$\beta_{max} = \omega\Delta t = 2\pi\frac{\Delta t}{T}$, $\Delta t \ll T$
$P = \text{const}$	$(1 - \cos\omega t)_{max} = 2$
$tP'(0)$	$1 - \frac{\sin\omega t}{\omega t}$
$P \cos\theta t$, $T_1\theta = 2\pi$	$\frac{\cos\theta t - \cos\omega t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}$, pentru $\theta = \omega$ $\beta_{max} = \frac{\omega t}{2}$
$P \sin\theta t$, $T_1\theta = 2\pi$	$\frac{\sin\theta t - \frac{\theta}{\omega}\sin\omega t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}$, pentru $\theta = \omega$ $\beta_{max} = \frac{\omega t}{2}$

unde θ este pulsaţia forţei perturbatoare; λ este decrementul logaritmic al amortizării, egal cu 0,05—0,6 pentru poduri de cale ferată şi construcţii din beton armat, cu 0,02—0,30 pentru poduri de autostrăzi şi construcţii din lemn. Înlocuirea masei distribuite $\int_0^l q\,dx$ prin o masă concentrată, de greutate P_{red} se poate efectua cu formula:

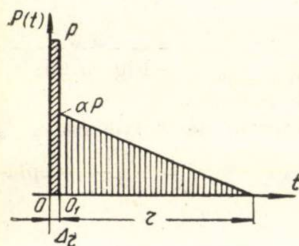


Fig. 4.91.

$$P_{red} = \frac{\int_0^l q v_x^2\,dx}{v_a^2}, \tag{4.319}$$

unde v_x şi v_a sînt deplasările (fig. 4.92) într-un punct arbitrar şi în punctul de reducere, datorită acţiunii forţei $P = 1$; o asemenea înlocuire permite utilizarea formulelor (4.313) – (4.317).

§ 4.47. Oscilaţiile sistemelor cu *n* grade de libertate

Frecvenţele proprii se găsesc din condiţia egalării cu zero a determinantului sistemului de *n* ecuaţii omogene pentru forţa de inerţie X:

$$X_1\delta_{k1}+X_2\delta_{k2}+\ldots+X_k\left(\delta_{kk}-\frac{1}{m_k\omega^2}\right)+$$

$$+\ldots+X_n\delta_{kn}=0 \qquad (4.320)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Fig. 4.92.

unde forţa $X_k = m_k\,\omega^2\,v_k$ este produsul masei m_k cu pătratul pulsaţiei, ω^2 şi cu amplitudinea deplasării v_k, iar δ_{kn} este deplasarea statică pe direcţia X_k datorită forţei $X_n = 1$. Determinarea frecvenţelor şi a formei oscilaţiilor se face mai bine prin aproximaţii succesive, cu ajutorul formulelor [1]

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m_1\bar{v}_1}}, \quad z_k = \bar{v}_k : \bar{v}_1; \qquad (4.321)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_1 &= z_1\delta_{11} + z_2\,\delta_{12}\frac{m_2}{m_1} + \ldots + z_n\frac{m_n}{m_1}\delta_{1n},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \bar{v}_k &= z_1\,\delta_{k1} + \ldots z_n\frac{m_n}{m_1}\delta_{kn}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.322)$$

Mărimile z_k se iau arbitrar la început, iar apoi se determină cu ajutorul relaţiei (4.321). După determinarea primei frecvenţe (şi a primei forme de vibraţie) trecerea la frecvenţele următoare trebuie să fie însoţită de respectarea condiţiei de ortogonalitate. Problema se poate rezolva atît analitic, cît şi grafo-analitic. Se va determina, de exemplu, frecvenţa oscilaţiilor unei console de secţiune variabilă, încărcată cu o sarcină uniform distribuită (fig. 4.93), ea consti-

---

[1] Vezi artic. »Динамика сооружений» în vol. II al lucrării «Техническогосправочника железнодорожника», pag. 183—196, 1950.

tuind aproximativ un sistem cu două grade de libertate. Masele concentrate în punctele de împărţire folosind formula (4.176), vor fi:

$$m_1 = 0{,}283\ q_0 l$$

$$m_2 = \frac{0{,}348\, q_0 l}{2}(2\cdot 1{,}75 + 0{,}36\cdot 1 + 0{,}36\cdot 2{,}67) = 0{,}84\ q_0 l.$$

$$m_3 = 0{,}572\ q_0 l.$$

Schema de calcul este indicată în fig. 4.94, *a*, unde $\frac{m_2}{m_1} = 2{,}96$; momentele corespunzătoare sînt:

$$M_2 = 1\cdot 0{,}5\ l;$$

$$M_3 = 1\cdot l + 2{,}96\ z_2\cdot 0{,}5\ l,$$

iar sarcinile fictive (fig. 4.94, *b*) $q_{f_2} = \frac{M_2}{2{,}5\, EI_1}$, $q_{f_3} = \frac{M_3}{5{,}33\, EI_1}$.

Trecerea la forţele fictive concentrate după formula (4.176) dă (fig. 4.94, *c*):

$$P_{f_3} = 0{,}174\ l\left(q_{f_3} + 0{,}36\ q_{f_2}\right) = \frac{0{,}174\ l^2}{EI_1}(0{,}260 + 0{,}278\ z_2)$$

$$P_{f_2} = \frac{0{,}174\ l^2}{EI_1}(0{,}467 + 0{,}1\ z_2).$$

Săgeţile sînt:

$$\bar{v}_2 = \frac{0{,}174\ l^3}{EI_1}(0{,}130 + 0{,}139\ z_2),$$

$$\bar{v}_1 = \frac{0{,}174\ l^3}{EI_1}(0{,}493 + 0{,}328\ z_2).$$

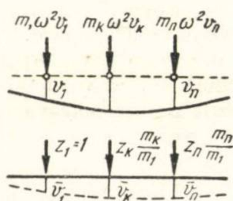


Fig. 4.93.

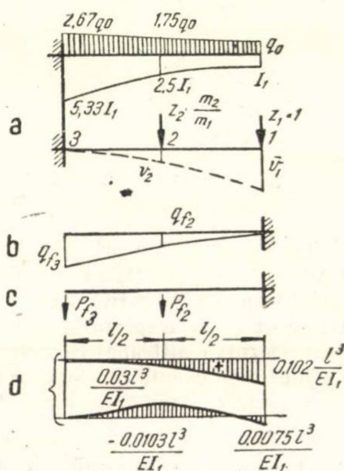


Fig. 4.94.

Utilizînd relaţia (4.321), găsim $z_2 = \bar{v}_2 : \bar{v}_1$; pentru primele două forme de oscilaţii rezultă: $z_2' = 0,29$; $z_2'' = -1,37$; după ordonatele $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ s-a desenat prima şi a doua formă de oscilaţie (fig. 4.94, *d*). Pulsaţiile calculate cu relaţia (4.321) sînt:

$$\omega_1 = \frac{5,9}{l^2}\sqrt{\frac{gEI_1}{q_0}}; \quad \omega_2 = \frac{21,7}{l^2}\sqrt{\frac{gEI_1}{q_0}}.$$

O aproximaţie mai bună s-ar fi obţinut prin divizarea grinzii în trei-patru porţiuni, cu respectarea aceleaşi succesiuni a operaţiilor.

§ 4.48. Solicitări prin şoc

Coeficientul dinamic, la ciocnirea unei greutăţi P cu un sistem elastic (a cărui greutate, redusă în locul ciocnirii, este G_{red}) este:

$$\beta_{din} = 1 - \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega y_{st}^{(P)}}\sin\omega t. \tag{4.323}$$

Maximul acestui coeficient, pentru $\operatorname{tg}\omega t = -\frac{v_0}{\omega y_{st}^{(P)}}$

$$\beta_{max} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{st}^{(P+G_{red})}}}, \tag{4.324}$$

unde h este înălţimea de cădere; dacă nu este dată înălţimea de cădere, ci viteza v' a şocului între greutatea P şi sistem, atunci $2h$ se înlocuieşte cu $\frac{(v')^2}{g}$. Mărimea G_{red} se ia din formula (4.319). Dacă greutatea P nu cade din afară pe sistem, ci se mişcă împreună cu el, iar mişcarea într-o secţiune oarecare a sistemului se opreşte brusc (de exemplu, frînarea cablului unui ascensor la mişcarea lui în jos), atunci

$$\beta_{max} = \sqrt{\frac{(v')^2}{gy_{st}^{(P+G_{red})}}} \tag{4.325}$$

Coeficientul dinamic la răsucirea prin şoc este

$$\beta_{max} = \frac{\varphi'}{\omega\varphi_{st}(M + M_{red})} \tag{4.326}$$

unde ω este pulsaţia mişcării de rotaţie, φ unghiul de rotaţie şi $\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$.

Bibliografie.

1. Vezi capitolul 4.1. 2. Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле, физматгиз, 1959.

Teoria mecanismelor şi maşinilor 5

Teoria mecanismelor şi maşinilor 5

Notaţii

A — distanţa între centrele roţilor [mm].
A_{ex} — suprafaţa în exces a diagramei forţelor (a momentelor forţelor) motoare şi de rezistenţă [mm²].
A_c — distanţa dintre centrele frezei şi roţii în tăiere [mm].
A_0 — distanţa dintre centrele roţilor tăiate fără deplasarea conturului iniţial [mm].
A_{0_c} — distanţa dintre centrele frezei şi roţii tăiate fără deplasarea frezei [mm].
a_B — acceleraţia punctului B [m/s²].
a_B^n — acceleraţia normală a punctului B [m/s²].
a_B^t — acceleraţia tangenţială a punctului B [m/s²].
$a_{BB_i}^c$ — acceleraţia Coriolis în mişcarea punctului B faţă de punctul B_i [m/s²].
$a_{BB_i}^r$ — acceleraţia relativă a punctului B faţă de punctul B_i [m/s²].
C — coeficientul care se ia pe baza tabelei 5.3, la determinarea viscozităţii absolute [kgf·s·°C³/m²].
C_{km} — cosinusul unghiului dintre direcţiile k şi m.
c — coeficientul rostului radial în angrenarea dinţată; coeficientul unghiular al dreptei, care înlocuieşte porţiunea de funcţionare a caracteristicii mecanice a electromotorului asincron [kgf·m·s].
D — diametrul cuzinetului lagărului [mm].
d — diametrul fusului arborelui [mm].
d_c — diametrul cilindrului de divizare al melcului [mm].
E — energia cinetică [kgf·m].
E_t — viscozitatea după Engler la temperatura de ungere $t°$
e — baza logaritmilor naturali; excentricitatea mecanismului cu camă cu tachet în mişcare de translaţie şi cu o rolă la extremitate [mm].
$\vec{e_i}$ — versorul vectorului $\vec{l_i}$.

$\dot{\vec{e}}_i$ — derivata întîi a versorului $\vec{e}_i$ în raport cu timpul.

$\ddot{\vec{e}}_i$ — derivata a doua a versorului $\vec{e}_i$ în raport cu timpul.

$\vec{e}'_i$ — versorul obţinut prin rotirea cu 90° a versorului $\vec{e}_i$ în sens pozitiv.

$\vec{e}''_i$ — versorul obţinut prin rotirea cu 90° a versorului $\vec{e}'_i$ sau cu 180° a versorului $\vec{e}_i$, în sens pozitiv.

F — forţa de frecare [kgf].

F_{km} — forţa de frecare a elementului k faţă de elementul m [kgf].

f — coeficientul de înălţime al capului dintelui.

h_i — braţul forţei P_i [m].

h_0 — rostul minim dintre fus şi cuzinet în condiţiile frecării hidrodinamice (μ).

I_v — momentul de inerţie al volantului [kgf · m · s²].

I_r — momentul de inerţie al masei reduse (momentul de inerţie redus) [kgf · m · s²].

I_x — momentul de inerţie al masei elementului faţă de axa Ox [kgf · m · s²].

I_{xy} — momentul centrifugal de inerţie al masei elementului faţă de axele Ox şi Oy [kgf · m · s²].

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — versorii axelor Ox, Oy, Oz în sistemul spaţial de coordonate.

i_c — raportul de transmitere de la freză la roata tăiată.

i_{km} — raportul de transmitere de la elementul k la elementul m.

i_{km}^H — raportul de transmitere de la roata k la roata m faţă de roata directoare H a mecanismului planetar.

k — numărul real de sateliţi ai mecanismului planetar; coeficient de siguranţă la determinarea momentului unui motor; coeficient de siguranţă la cuplaje în transmisiile de fricţiune; coeficient de transmisie a căldurii de la metal la aer [kgf · m/m² · °C]; braţul frecării de rostogolire [cm]; raportul dintre unghiul de rotire al manivelei unui patrulater articulat la cursa de ducere a balansierului şi unghiul de rotire al manivelei la cursa de înapoiere a balansierului; numărul de începuturi ale filetului melcului; numărul de fusuri ale elementului conducător al mecanismului cu cruce de Malta.

k_0 — numărul teoretic de sateliţi ai mecanismului planetar în condiţia de asamblare şi fără considerarea condiţiei de vecinătate.

k_1 — numărul de sateliţi ai mecanismului planetar, determinat în condiţia de vecinătate.

L — distanţa dintre centrele de rotaţie ale camei şi tachetului oscilant [mm].

l — lungimea tachetului oscilant al mecanismului cu came; lungimea fusului arborelui [mm].

l_{AB} — dimensiunea naturală a elementului AB [m]).
l_i — dimensiunea naturală a elementului i [m].
$\vec{l}_k \cdot \vec{l}_m$ — produsul scalar al vectorilor $\vec{l}_k$ şi $\vec{l}_m$.
$\vec{l}_k \times \vec{l}_m$ — produsul vectorial al vectorilor $\vec{l}_k$ şi $\vec{l}_m$.
$\dot{\vec{l}}_i$ — derivata întîi, a vectorului $\vec{l}_i$ în raport cu timpul.
$\ddot{\vec{l}}_i$ — derivata a doua a vectorului $\vec{l}_i$ în raport cu timpul.
M — numărul de grade de mobilitate ale lanţului cinematic.
M_m — momentul forţei motoare [kgf · m].
$M_{m\ med}$ — momentul motor mediu în intervalul de timp dat, sau de unghi de rotaţie al elementului redus [kgf · m].
M_{ik} — momentul cuplului de inerţie aplicat elementului k [kgf · m].
M_n — moment motor nominal [kgf · m].
M_r — momentul forţei reduse [kgf · m].
M_{ru} — momentul forţelor reduse datorit rezistenţelor utile [kgf · m].
$M_{r\ med}$ — momentul mediu al forţelor reduse datorit rezistenţelor utile pentru intervalul de timp dat sau de unghiul de rotire al elementului de reducere [kgf · m].
M_f — momentul forţelor reduse de frecare [kgf · m].
M_e — moment de echilibrare [kgf · m].
M_F — momentul forţei de frecare [kgf · m].
M_k — momentul forţei aplicate elementului k [kgf · m].
M_k^i — momentul ideal (în absenţa frecării) aplicat elementului k al mecanismului cu roţi dinţate [kgf · m].
M_{km} — momentul forţelor de frecare în cupla de rotaţie km [kgf ·m].
M_0 — momentul convenţional determinat la înlocuirea porţiunii de funcţionare a caracteristicii mecanice a electromotorului asincron [kgf · m].
M_x, M_y, M_z — proiecţiile vectorului momentului M pe axele Ox, Oy, Oz ale sistemului de coordonate.
m — masa elementului [kgf · s^2/m]; modulul unui angrenaj [mm].
m_r — masa redusă [kgf · s^2/m].
m_{ck} — masa contragreutăţii fixate pe un element [kgf · s^2/m].
m_{med} — modulul mediu al unui angrenaj conic măsurat pe cercul iniţial mediu al roţii dinţate conice [mm].
m_a — modulul axial de angrenare a roţii cu dinţi înclinaţi [mm].
m_i — masa elementului i [kgf · s^2/m].
m_n — modul de angrenare în planul normal pe flancul dintelui roţii cu dinţi înclinaţi, a melcului şi a roţii melcate [mm].
m_f — modul de angrenare în planul frontal al roţii cu dinţi înclinaţi [mm].

n — numărul de rotaţii ale elementului într-un minut; numărul de laturi mobile ale unui poligon vectorial plan închis.
P_m — forţă motoare [kgf].
P_{iX} — forţa de inerţie a unui punct material X [kgf].
P_i^n, P_i^t — forţele de inerţie, normală (centrifugă) şi tangenţială [kgf].
P_r — forţa redusă [kgf].
P_{rp} — forţa de rezistenţă utilă (productivă) [kgf].
P_r — forţa de rezistenţă [kgf].
P_e — forţa de echilibrare [kgf].
P_{km} — forţa de acţionare a elementului k asupra elementului m.
$P_{km}^x, P_{km}^y, P_{km}^z$ — proiecţiile vectorului forţei $\vec{P}_{km}$ pe axele Ox, Oy, Oz ale sistemului fix de coordonate.
p — încărcare specifică [kgf/cm²]; pasul de angrenare măsurat pe cercul de divizare [mm].
p_b — pasul de angrenare măsurat pe cercul de bază (mm).
p_pp_a — pasul de angrenare măsurat pe cercul aflat în planul axial al roţii cu dinţi înclinaţi [mm].
p_n — pasul de angrenare măsurat pe cercul aflat în planul normal pe flancul dinţilor roţii cu dinţi înclinaţi, a melcului şi a roţii înclinate [mm].
p_f — pasul de angrenare măsurat pe cercul aflat în planul frontal al roţii cu dinţi înclinaţi [mm].
Q — efortul circular al melcului, efortul axial al roţii melcate [kgf].
q — numărul de module în cilindrul divizor al melcului.
R_{ef} — raza cercului exterior al frezei [mm].
R_{eK} — raza cercului exterior al roţii dinţate k [mm].
R_0 — valoarea minimă a razei vectoare a profilului teoretic al camei [mm].
R_{ik} — raza cercului interior al roţii dinţate k [mm].
R_i — valoarea curentă a razei vectoare a profilului teoretic al camei [mm].
R'_i — valoarea curentă a razei vectoare a profilului de funcţionare al camei [mm].
r_{dm} — raza cercului de divizare al frezei [mm].
r_{dk} — raza cercului de divizare al roţii k [mm].
r_{ck} — raza cercului pe care se fixează masa m_{ck} a contragreutăţii [mm].
r_{0k} — raza cercului de bază al roţii k [mm].
r_{med} — raza medie a filetului elicoidal [mm].
r_k — raza cercului primitiv al roţii k [mm].
r_{km} — raza fusului cuplei de rotaţie km [mm].
r_{0k} — raza cercului de bază al roţii dinţate conice k pe suprafaţa sferică [mm].
r'_r — raza cercului de rostogolire al roţii conice k pe suprafaţa sferică [mm].

S_1 — tensiunea în părţile conducătoare a cablului sau a curelei [kgf].
S_2 — tensiunea în partea condusă a cablului sau a curelei [kgf].
s — spaţiul parcurs de punctul de reducere [m]; diferenţa dintre diametrele cuzinetului şi fusului [μ].
S_d — grosimea dintelui pe cercul de divizare al roţii dinţate [mm].
S_0 — grosimea dintelui pe cercul de bază al roţii dinţate [mm].
S_i — valoarea curentă a spaţiului parcurs de tachetul mecanismului cu camă [mm].
S_k — coordonata centrului de greutate al elementului k [mm].
T — intervalul de timp necesar unei rotaţii complete a elementului conducător al mecanismului cu cruce de Malta.
t — temperatura uleiului de ungere [°C].
t_m — intervalul de timp al mişcării crucii mecanismului de Malta [s].
t_r — intervalul de timp de repaos al crucii mecanismului cu cruce de Malta [s].
t_0 — temperatura mediului ambiant [°C].
$\vec{v}_r$ — viteza punctului de reducere [m/s].
$\vec{v}_B$ — viteza punctului B [m/s].
$\vec{v}_{BB_i}$ — viteza relativă a punctului B faţă de punctul B_i care în momentul considerat coincide cu punctul B [m/s].
W_m — lucrul mecanic al forţei motoare [kgf · m].
W_{ex} — lucrul mecanic în exces în timpul unui ciclu din mişcarea staţionară la elementele reduse [kgf · m].
W_R — lucrul mecanic al forţelor de rezistenţă [kgf · m].
X — numărul de tăieturi în crucea mecanismului de Malta.
$|\vec{X}|$ — modulul vectorului $\vec{X}$.
X_i, Y_i, Z_i — proiecţiile vectorului $\vec{l_i}$ pe axele Ox, Oy, Oz ale sistemului spaţial de coordonate.
$|x|$ — modulul mărimii algebrice x.
$\vec{x}_m$ — vectorul amplitudinii neechilibrării dinamice a elementelor în rotaţie.
x_m, y_m, z_m — proiecţiile versorului $\vec{e}_m$ pe axele Ox, Oy, Oz ale sistemului spaţial de coordonate.
$\dot{x}_m, \dot{y}_m, \dot{z}_m$ — derivatele întîi în raport cu timpul, ale versorului $\vec{e}_m$ pe axele Ox, Oy, Oz ale unui sistem spaţial de coordonate.

$\ddot{x}_m, \ddot{y}_m, \ddot{z}_m$ — derivatele de ordinul al doilea în raport cu timpul, ale proiecţiilor versorului $\vec{e}_m$ pe axele Ox, Oy, Oz ale unui sistem spaţial de coordonate.

$y(x)$ — mărimea variabilă y, care variază în funcţie de x.

z_f — numărul de dinţi la freză.

z_{lim} — numărul minim limită de dinţi al roţii dinţate la care este posibilă angrenarea în evolventă.

z_f — numărul fictiv de dinţi la roata cu dinţi oblici.

z_k — numărul de dinţi al roţii dinţate k.

α — unghiul de angrenare în secţiunea axială a şurubului melc sau a roţii melcate [rad, grd]; unghiul de angrenare [rad, grd]; unghiul de înfăşurare a cilindrului de către cablu sau al şaibei de către curea [rad, grd].

α_i — valoarea curentă a unghiului de înclinare al razei vectoare a profilului teoretic al camei sau a profilului de lucru al camei [rad, grd].

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — unghiurile de înclinare ale vectorului $\vec{l}_i$ faţă de axele Ox, Oy, Oz ale sistemului spaţial de coordonate [rad, grd].

α_m — unghiul de angrenare al maşinii [rad, grd].

α_n — unghiul de angrenare în secţiunea normală a filetului unui melc sau a dintelui unei roţi melcate [rad, grd].

α_r — unghiul dintre vectorul $\vec{P}_r$ al forţei reduse şi vectorul $\vec{v}_r$ al vitezei punctului de reducere [rad, grd].

α_0 — unghiul de angrenare al angrenajului iniţial [rad, grd].

β — unghiul de înclinare a dintelui unei roţi cu dinţi oblici [rad, grd]; unghiul de ridicare a filetului melcului [rad, grd].

γ — greutatea specifică a lichidului de ungere [g/cm³].

Δ — gradul total de neregularitate al regulatorului.

Δx — creşterea mărimii x sau corecţia introdusă pentru reducerea părţii din stînga a ecuaţiei la zero (unitatea de măsură a lui x).

δ — diametrul cercului, pe care se deplasează fusul în condiţiile frecării hidrodinamice [mm]; gradul de neuniformitate a mişcării elementului de reducere.

δ_r — gradul de neuniformitate a regulatorului.

δ_i — abaterea părţii din stînga a ecuaţiei de la zero.

δ_m — jumătatea unghiului de la vîrful conului primitiv al roţii m [rad, grd].

ε — gradul de insensibilitate al regulatorului.

ε — gradul de acoperire al angrenării; acceleraţia unghiulară [s^{-2}].

ε_s — gradul de acoperire al angrenării cu dinţi oblici.

η — coeficientul de viscozitate absolută a lichidului [kgf · s/m², poise]; randamentul mecanismului.

η_{H1} — randamentul transmiterii puterii de la axul planetar H la roata 1 a mecanismului planetar.
η_{km} — randamentul mecanismului cu roţi dinţate la transmiterea puterii de la roata k la roata m.
μ_{1H} — randamentul transmiterii puterii de la roata 1 la axul planetar H al mecanismului planetar.
θ — unghiul egal cu involuta unghiului α [rad, grd].
δ — unghiul de presiune a forţei [rad, grd].
λ — unghiul între două fuse vecine ale elementului conducător al mecanismului cu cruce de Malta [rad, grd].
μ — coeficientul de frecare de alunecare.
μ_h — coeficientul de frecare hidrodinamică.
η_0 — coeficient convenţional al frecării de alunecare a lagărului de rostogolire, raportat la suprafaţa fusului arborelui.
μ' — coeficient convenţional al frecării de alunecare la suprafaţa penei.
ξ — coeficientul de deplasare al conturului iniţial.
ρ — raza de curbură a curbei [mm].
ρ_i — valoarea curentă a razei de curbură a profilului teoretic al camei [mm].
ρ_k — raza desfăşurării conului suplimentar al roţii conice k [mm].
ρ — valoarea curentă a razei de curbură a profilului de lucru al camei [mm].
σ_k — unghiul de înclinare al vectorului forţei $\vec{P}_k$ faţă de axa Ox a sistemului fix de coordonate [rad, grd].
φ — unghiul de rotaţie al elementului de reducere [rad, grd]; unghiul de frecare de alunecare [rad, grd]
φ_i — unghiul de înclinare a laturii i a poligonului vectorial plan închis faţă de axa Ox a sistemului fix de coordonate [rad, grd];
φ_1 — unghiul de rotaţie al elementului director al mecanismului cu cruce de Malta într-o perioadă a mişcării crucii [rad, grd].
φ_2 — unghiul de rotaţie a crucii mecanismului de Malta în timpul perioadei sale de mişcare [rad, grd].
φ_{1i} — valoarea curentă a unghiului de rotaţie a camei [rad, grd].
φ_{2i} — valoarea curentă a unghiului de rotaţie a tachetului oscilant al mecanismului cu camă [rad, grd].
φ' — unghiul convenţional de frecare a suprafeţei penei [rad, grd].
φ'_k — derivata întîi a unghiului φ_k în raport cu unghiul φ_1.
φ''_k — derivata a doua a unghiului φ_k în raport cu unghiul φ_1.
ψ — coeficientul de pierdere al mecanismului; rostul relativ dintre fus şi cuzinet.
ψ_H — coeficientul de pierdere al mecanismului planetar în mişcarea inversă faţă de roata conducătoare H.
χ — deplasarea absolută a conturului iniţial [mm].
ω — viteza unghiulară [s^{-1}].
ω_n — viteza unghiulară nominală [s^{-1}].
ω_r — viteza unghiulară a regulatorului [s^{-1}].
ω_{med} — viteza unghiulară medie [s^{-1}].
ω_{km} — viteza unghiulară relativă a elementelor k şi m [s^{-1}].

5.1
Structura mecanismelor

§ 5.1. Mecanism. Cuple cinematice. Lanț cinematic

Mecanismul este un sistem realizat artificial din elemente materiale legate între ele în scopul realizării unei mișcări determinate. *Piesa* este partea separată indivizibilă a mecanismului. *Elementul* este constituit dintr-una sau mai multe piese rigid legate. *Cupla cinematică* este o asamblare mobilă de două elemente care se găsesc în contact direct. În *cupla inferioară*, contactul se realizează pe o suprafață, în *cupla superioară* de-a lungul unei linii sau într-un punct.

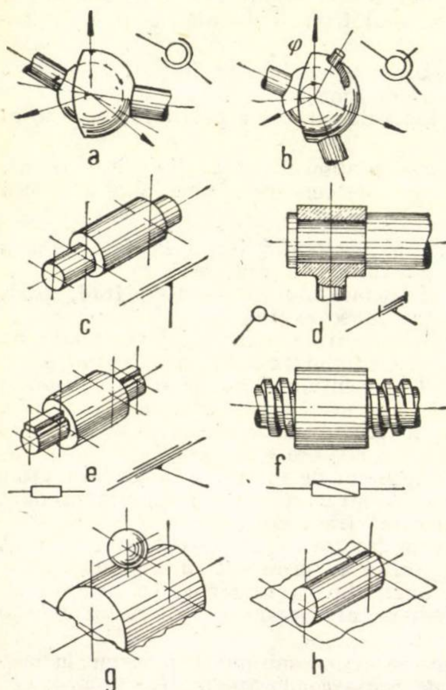


Fig. 5.1.

Poziția elementului în spațiu se determină prin șase parametri numiți *parametri de poziție* ai elementului și anume: prin cele trei coordonate ale unui punct oarecare al elementului și prin cele trei unghiuri ale lui Euler, sau prin trei coordonate ale unui punct oarecare al elementului, prin două unghiuri de înclinare, față de axele sistemului rectangular de coordonate, ale dreptei legate de element și trecînd printr-un punct dat și prin unghiul de rotire al elementului față de acea dreaptă. Un element al cuplei cinematice condiționează, în sistemul altui element, unii dintre parametri indicați. În fig. 5.1 sînt arătate unele cuple cinematice spațiale mai des utilizate *a)* sferică, *b)* sferică cu deget, *c)* cilindrică, *d)* de rotație, *e)* de translație, *f)* elicoidală, *g)* cu contact într-un punct, *h)* cu contactul după o dreaptă.

În cupla cinematică, asamblarea (legarea) a două elemente în mişcare asigură invariabilitatea parametrilor de poziţie ai unui element faţă de sistemul de referinţă al celuilalt (fig. 5.1).

Lanţul cinematic este un sistem de elemente, legate între ele prin cuple cinematice (fig. 5.2...5.4). Batiul este elementul unei cuple cinematice care se consideră ca fix.

Lanţul cinematic apare legat prin condiţia contactului direct al elementelor care intră în cuple cinematice. Numărul de condiţii de legătură impuse unui lanţ cinematic considerat în ansamblul său este egal în general cu suma condiţiilor de legătură ale tuturor cuplelor sale cinematice. Formula structurală generală a lanţului cinematic este

$$M = 6n - 5c_5 - 4c_4 - 3c_3 - 2c_2 - c_1, \qquad (5.1)$$

unde M este numărul parametrilor de poziţie nelegaţi (independenţi) ai lanţului cinematic (numărul gradelor de mobilitate), n numărul de elemente mobile, iar c_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ numărul de cuple cinematice cu i condiţii de legătură.

În cazuri particulare, anumite combinaţii de cuple cinematice impun legături suplimentare şi ca urmare a acestui fapt este necesară deseori utilizarea unor formule de formă specială [1], dintre care se



Fig. 5.2.

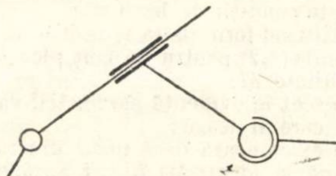


Fig. 5.3.

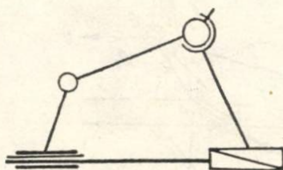


Fig. 5.4.

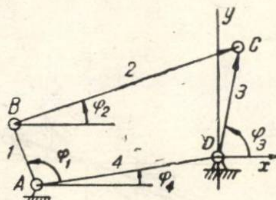


Fig. 5.5.

indică doar formula pentru lanţuri cinematice plane, ale căror elemente se pot mişca numai paralel cu un plan

$$M = 3n - 2c_5 - c_4. \qquad (5.2)$$

Pentru determinarea poziţiilor elementelor unui lanţ cinematic este indicată folosirea schemei reprezentată printr-un poligon în

vederea determinării expresiilor matematice, care leagă parametrii de poziţie ai laturilor poligonului. Asemenea relaţii de bază sînt *ecuaţiile de închidere* ale diferitelor contururi, care compun poligonul. Considerînd laturile poligonului ca vectori, acestora li se dau direcţii şi, ca atare, pentru o latură care iese dintr-un punct fix este recomandabil să se indice o direcţie aleasă astfel, încît originea vectorului să coincidă cu punctul fix. Înconjurînd fiecare contur al schemei într-un sens arbitrar ales, se compun ecuaţiile de închidere, în care vectorii, îndreptaţi în sens invers sensului de înconjurare, obţin semnul minus (—). În afara ecuaţiilor de închidere, trebuie compuse relaţiile care leagă parametrii de poziţie ale diferitelor cuple cinematice. Numărul total de ecuaţii şi relaţii compuse în acest mod determină numărul de condiţii, care leagă schema cinematică.

Dacă se calculează numărul total de parametri variabili de poziţie ai laturilor poligonului şi se scade din el numărul de condiţii de legătură, se obţine numărul de grade de mobilitate ale lanţului cinematic dat. După o cercetare de acest fel vor fi pregătite relaţiile necesare pentru rezolvarea problemelor de analiză cinematică ale lanţului dat.

Metoda generală de studiu prealabil a lanţului cinematic dat este următoarea:

1) se determină numărul de elemente mobile şi de cuple cinematice cu diferite condiţii de legătură;

2) utilizînd formula (5.1) pentru un lanţ spaţial de formă generală sau formula (5.2) pentru un lanţ plan, se determină numărul gradelor de mobilitate M;

3) se scot în evidenţă parametrii variabili de poziţie şi se compun relaţiile care îi leagă;

4) se examinează dacă unele din relaţiile puse în evidenţă nu se transformă în identităţi (fig. 5.5...5.9).

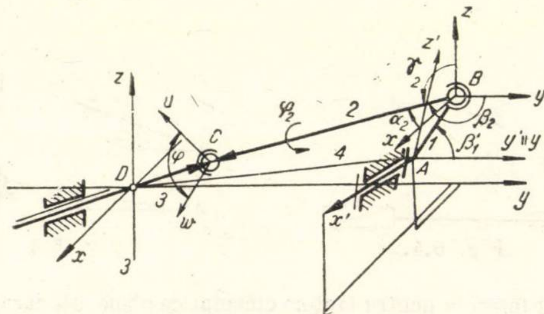


Fig. 5.6.

În fiecare lanţ cinematic, utilizat ca mecanism, totdeauna avem $M \geqslant 1$ (cel mai des $M = 1$). Dacă M parametri variabili se leagă de la început prin dependenţe de timp stabilite, se poate obţine miş-

carea căutată a tuturor elementelor lanţului. În acest caz lanţul cinematic va executa rolul de mecanism.

Fig. 5.5. $n = 3$, $c_5 = 4$, $M = 1$. Parametrii variabili sînt: φ_1, φ_2, φ_3. Ecuaţia de închidere: $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$ (două condiţii de legătură).

Fig. 5.6, $n = 3$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$, $c_5 = 2$, $M = 1$. Parametrii variabili sînt: β'_1, α_2, β_2, γ_2, φ_2, l_3. Condiţiile de legătură sînt $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$, $\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1$ şi $\varphi = \text{const}$.

Fig. 5.7.

Fig. 5.8.

Fig. 5.9.

Fig. 5.7, $n = 5$, $c_5 = 7$, $M = 1$. Parametrii variabili sînt φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, l_6. Condiţiile de legătură sînt $l_1 + l_2 = l_3 + l_6$ şi $l_3 + l_4 = l_5$.

Fig. 5.8, $n = 9$, $c_4=1$, $c_5=12$, $M=2$. Caracterul nedeterminat al rotaţiei rolei *2* nu influenţează asupra mişcării altor elemente (grad de libertate de prisos).

Fig. 5.9. $AB \neq CD \neq EF$. Elementele *1*, *3* şi *4* au mişcări identice. Unul din elementele *1* sau *3* este pasiv.

§ 5.2. Proprietăţi structurale ale mecanismelor plane. Formarea mecanismelor plane după Assur

Schema mecanismului plan reprezintă un poligon plan închis, ale cărui laturi îşi pot schimba în general poziţia lor relativă, iar unele din ele — şi lungimile lor. Cel mai simplu este mecanismul cu două elemente, compus dintr-un element fix şi un element mobil (fig. 5.10).

Mecanismul plan de orice complexitate este compus din două elemente, unul fix numit *batiu* şi unul mobil numit *conducător*, cu legea de mişcare dată, la care se adaugă grupele assurice, compuse fiecare dintr-un număr par de elemente în asamblarea (legarea) cărora intră cuple cinematice cu cinci condiţii de legătură fiecare (c_5), iar numărul de cuple trebuie să fie egal cu o dată şi jumătate numărul de elemente $\left(c_5 = \frac{3n}{2}\right)$. Cea mai simplă grupă denumită cu *două antrenoare* (braţe, biele) este compusă din două elemente şi trei cuple cinematice ($c_5 = 3$) (dioda). Prin legarea unei grupe cu două antrenoare (braţe, biele) la un element conducător şi la un batiu, se obţine un mecanism cu patru elemente, a cărui schemă are un singur contur vectorial închis, legat printr-o singură *ecuaţie vectorială de închidere* (fig. 5.11).

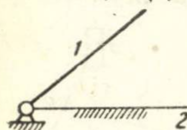


Fig. 5.10.

Metoda suprapunerii, utilizată de Assur pentru formarea mecanismelor plane prin legarea la un mecanism cu patru elemente a unui al doilea grup cu două antrenoare, permite obţinerea mecanismului cu şase elemente, a cărui schemă este compusă din două contururi închise (fig. 5.12).

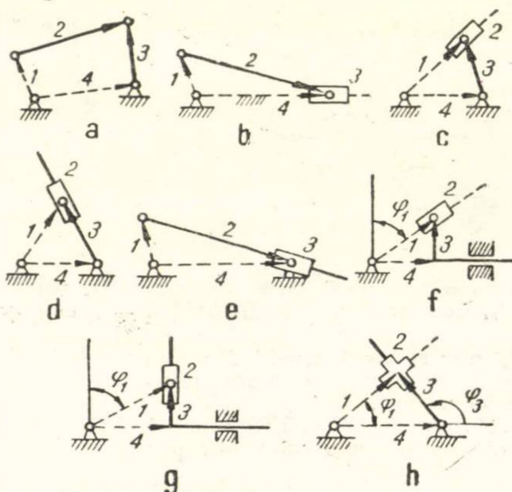


Fig. 5.11.

Prin adăugarea la un mecanism cu şase elemente a încă unui grup cu două antrenoare se obţine un mecanism cu opt elemente (fig. 5.13) şi aşa mai departe.

Rezolvarea problemelor de analiză cinematică a mecanismelor indicate se efectuează cu ajutorul ecuaţiilor de închidere în ordine

Ecuaţia (5.4) se rezolvă prin înmulţirea scalară o dată cu versorul $\vec{j}$ şi a doua oară cu versorul $\vec{i}$.

3. Fig. 5.19. Dîndu-se valorile lui φ_1, l_1 şi l_4 să se determine φ_3 şi l_3. Prin metoda numerică avem ecuaţia

$$l_1\vec{e}_1 = l_4\vec{i} + l_3\vec{e}_3, \tag{5.5}$$

care după izolarea lui $l_3\vec{e}_3$ se rezolvă prin ridicarea la pătrat, scalar. Unghiul φ_3 se determină fie prin înmulţirea scalară a lui (5.5) cu versorul $\vec{i}$, fie cu versorul $\vec{j}$.

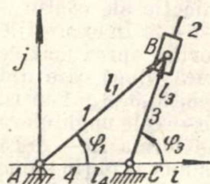


Fig. 5.19.

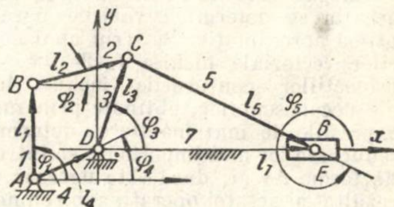


Fig. 5.20.

4. Fig. 5.20. Dîndu-se valorile lui $\varphi_1, \varphi_4, l_1, l_2, l_3, l_4$ şi l_5 să se determine φ_2, φ_3, φ_5 şi l_7.

Pentru început trebuie rezolvat patrulaterul *ABCDA*, după care se rezolvă triunghiul *DCED*.

Dacă schema mecanismului constă din cîteva poligoane care se rezolvă simultan, atunci prin metoda grafică se utilizează fie metoda locurilor geometrice fie metoda şabloanelor. Prin metoda numerică se utilizează metoda corecţiilor liniare.

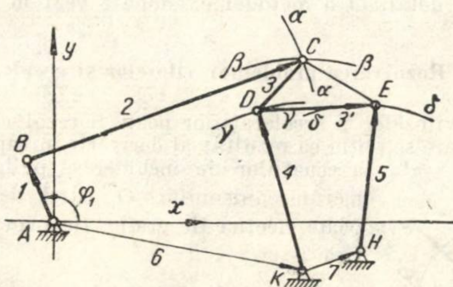


Fig. 5.21.

5. Fig. 5.21. Dîndu-se unghiul φ_1, lungimile tuturor laturilor şi unghiurile de înclinare ale laturilor *6* şi *7* să se determine unghiurile de înclinare ale laturilor *BC*, *CD*, *KD* şi *HE* ($\delta_1, \delta_2, \delta_3$ şi δ_4).

Metoda locurilor geometrice. Se desfac elementele în dreptul articulației *2—3*. Se desenează traiectoria relativă a punctului *C* care este un arc de cerc în *B* și rază *BC*. Se desenează apoi traiectoria relativă $\beta - \beta$ a punctului *C*, de pe elementul *3*, care aparține patrulaterului *KDEH*.

Intersecția celor două traiectorii determină poziția adevărată a punctului *C* și cu aceasta se determină poziția tuturor elementelor.

Metoda șabloanelor. Din hîrtie groasă se taie un șablon care reprezintă triunghiul *DCE*. Pozițiile punctelor *C*,*D* și *E* se pot determina dacă se așază șablonul cu vîrfurile sale în arcele de cerc $\alpha - \alpha$, $\gamma - \gamma$ și $\delta - \delta$, cu centrele în *B* respectiv *K* și *H*.

Metoda analitică. La început problema se rezolvă grafic; prin aceasta se determină valorile parametrilor căutați ($\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$) în prima aproximație. Se scriu apoi ecuațiile de proiecție ale contururilor vectoriale închise *1—2—3—4—6* și *4—3′—5—7*. În expresiile proiecțiilor contururile închise înlocuiesc valorile aproximative ale necunoscutelor, obținute prin metoda geometrică, după care din expresiile de mai înainte se determină mărimile $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$. Pentru reducerea lor mai importantă se introduc corecțiile — cele unghiulare de forma $\Delta\delta$ și, dacă este necesar, cele liniare de forma Δl — și ca rezultat al acestei operații sub semnele cosinus și sinus se obțin sume de forma $(\delta + \Delta\delta)$, iar în locul lui l se obține $(l + \Delta l)$. Din ecuațiile obținute în modul indicat se determină valorile corecțiilor amintite, reprezentînd în prealabil mărimile $\cos(\delta + \Delta\delta)$ și $\sin(\delta + \Delta\delta)$ în modul următor:

$$\cos(\delta + \Delta\delta) \approx \cos\delta - \sin\delta\Delta\delta, \quad \sin(\delta + \Delta\delta) \approx \sin\delta + \cos\delta\Delta\delta. \qquad (5.6)$$

După descompunerea cosinusului și sinusului sumelor prin metoda indicată, ecuațiile trigonometrice se transformă în ecuații algebrice liniare, a căror rezolvare nu prezintă dificultăți. Prin aplicarea repetată a metodei indicate, problema pozițiilor elementelor mecanismului poate fi rezolvată cu orice grad de precizie dinainte dat.

Expunerea detaliată a metodei examinate vezi în [6].

§ 5.4. Rezolvarea problemei vitezelor și accelerațiilor

Problema vitezelor și accelerațiilor poate fi rezolvată cu ajutorul unor ecuații care se obțin ca rezultat al derivării în raport cu timpul a ecuațiilor de închidere a poligoanelor schemei mecanismului. O astfel de rezolvare se poate efectua fie grafic, fie prin metoda analitică.

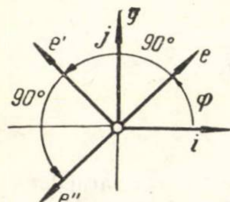


Fig. 5.22.

Derivata în raport cu timpul a versorului $\vec{e}$.

Versorul $\vec{e}$ se reprezintă astfel (fig. 5.22):

$$\vec{e} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi. \qquad (5.7)$$

Derivata întîi în raport cu timpul este

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = (-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi)\omega = \omega\vec{e}', \tag{5.8}$$

unde $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ este viteza unghiulară a versorului $\vec{e}$, iar $\vec{e}'$ este un versor obţinut prin rotirea versorului $\vec{e}$ cu 90° în sens pozitiv.

Derivata a doua în raport cu timpul este

$$\frac{d^2\vec{e}}{dt^2} = (-\vec{i}\cos\varphi - \vec{j}\sin\varphi)\,\omega^2 + (-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi)\varepsilon = \omega^2\vec{e}'' + \varepsilon\vec{e}', \tag{5.9}$$

unde $\vec{e}''$ este un versor obţinut prin rotirea versorului $\vec{e}'$ în sens pozitiv cu 90° sau printr-o rotaţie analogă a versorului $\vec{e}$ cu 180°, iar $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ este acceleraţia unghiulară a versorului $\vec{e}$.

Exemple. **1.** Dîndu-se valorile parametrilor variabili şi constanţi ai schemei mecanismului (fig. 5.23, *a*), viteza unghiulară ω_1 şi acceleraţia ε_1 ale elementului *1*, să se determine legile de mişcare ale tuturor elementelor conduse.

Ecuaţiile de închidere ale poligoanelor *ABCDA* şi *DCED* sînt

$$l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2 = l_4\vec{e}_4 + l_3\vec{e}_3, \quad l_3\vec{e}_3 + l_5\vec{e}_5 = l_7\vec{i}. \tag{5.10}$$

Ca rezultat al derivării în raport cu timpul a ultimelor ecuaţii obţinem

$$l_1\omega_1\vec{e}_1' + l_2\omega_2\vec{e}_2' = l_3\omega_3\vec{e}_3', \quad \vec{v}_B + \vec{v}_{CB} = \vec{v}_C, \tag{5.11}$$

$$l_3\omega_3\vec{e}_3' + l_5\omega_5\vec{e}_5' = \dot{l}_7\vec{i}, \quad \vec{v}_C + \vec{v}_{EC} = \vec{v}_E, \tag{5.12}$$

unde ω_2, ω_3 şi ω_5 sînt vitezele unghiulare ale elementelor *2*, *3* şi *5*, $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ şi $\vec{e}_3'$ versorii vitezelor liniare, $\vec{v}_B$ al vitezei absolute al punctului *B*, $\vec{v}_{CB}$ al vitezei relative a punctului *C* faţă de punctul *B*, $\vec{v}_C$ al vitezei absolute a punctului *C*, $\vec{e}_5'$ versorul vitezei liniare a punctului *E* dată de punctul *C*, $\dot{\vec{l}}_7$ viteza variaţiei lungimii vectorului $\vec{l}_7$ care determină viteza punctului *E*.

Metoda grafică de rezolvare a problemei propuse prevede construirea planului vitezelor (fig. 5.23, *b*). Rezolvarea trebuie condusă în următoarea ordine: 1) se determină mărimea $l_1\omega_1$ a vectorului $\vec{v}_B$; 2) se dă scara $k_v \left[\frac{\text{m/s}}{\text{mm}}\right]$ a planului vitezelor şi se determină lungimea segmentului *Pb*, după care se execută construcţia lui; 3) în conformitate cu direcţiile versorilor $\vec{e}_2'$ şi $\vec{e}_3'$ se duc dreptele $bc \perp BC$ şi $pc \perp DC$,

la intersecţia cărora se obţine punctul c, care determină poziţia vîrfurilor vectorilor $\overline{bc}$ şi $\overline{pc}$ ai vitezelor $\vec{v}_{CB}$ şi $\vec{v}_C$; 4) în conformitate cu liniile de acţiune ale versorilor $\vec{e}_5'$ şi $\vec{i}$ se duc dreptele $ce \perp CE$ şi $pe \parallel DE$, al căror punct de intersecţie determină poziţia vîrfurilor vectorilor $\overline{ce}$ şi $\overline{pe}$ ai vitezelor $\vec{v}_{EC}$ şi $\vec{v}_E$.

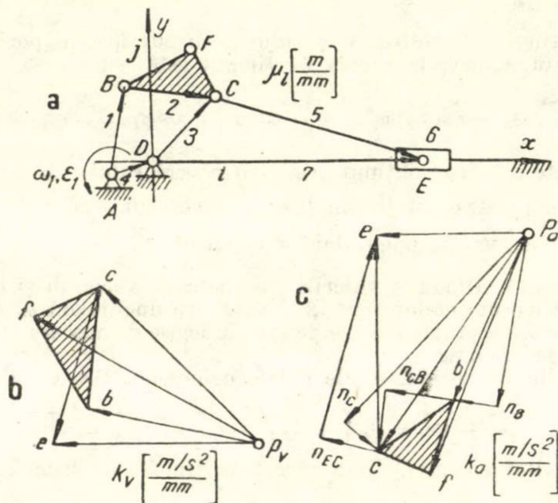


Fig. 5.23.

În cazul metodei analitice, pentru determinarea mărimii ω_2 trebuie înmulţită scalar ecuaţia (5.11) cu versorul $\vec{e}_3$, datorită cărui fapt termenul din partea dreaptă se anulează şi se obţine o ecuaţie liniară cu o singură necunoscută ω_2. Mărimea ω_3 se determină prin înmulţirea scalară a ecuaţiei (5.11) cu versorul $\vec{e}_2$.

Pentru rezolvarea problemei acceleraţiilor, derivăm în raport cu timpul ecuaţiile (5.11) şi (5.12).

Avem

$$\left.\begin{aligned} l_1\omega_1^2\vec{e}_1'' + l_1\varepsilon_1\vec{e}_1' + l_2\omega_2^2\vec{e}_2'' + l_2\varepsilon_2\vec{e}_1' &= l_3\omega_3^2\vec{e}_3'' + l_3\varepsilon_3\vec{e}_3', \\ \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^t + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t &= \vec{a}_{CD}^n + \vec{a}_{CD}^t, \end{aligned}\right\} \quad (5.13)$$

$$\left.\begin{aligned} l_3\omega_3^2\vec{e}_3'' + l_3\varepsilon_3\vec{e}_3' + l_5\omega_5^2\vec{e}_5'' &= \vec{\ddot{l}}_7 i, \\ \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^t + \vec{a}_{EC}^n + \vec{a}_{EC}^t &= \vec{a}_E, \end{aligned}\right\} \quad (5.14)$$

unde versorii $\vec{e}''_1$, $\vec{e}''_2$ şi $\vec{e}''_3$ determină direcţiile vectorilor $\vec{a}^n_B$, $\vec{a}^n_{CB}$ şi $\vec{a}^n_C$ ai acceleraţiilor normale a punctului B, a punctului C faţă de B şi a punctului C, ε_2,ε_3 şi ε_5 sînt acceleraţiile unghiulare ale elementelor *2*, *3* şi *5*, versorii $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$ şi $\vec{e}'_3$ determină liniile de acţiune al vectorilor $\vec{a}^t_B$, $\vec{a}^t_{CB}$ şi $\vec{a}^t_C$ ai acceleraţiilor tangenţiale a punctului B, a punctului C faţă de punctul B şi a punctului C, versorii $\vec{e}''_5$ şi $\vec{i}$ stabilesc direcţia vectorului acceleraţiei normale $\vec{a}^n_{EC}$ şi respectiv direcţia acceleraţiei absolute a_E, versorul $\vec{e}'_5$ este direcţia vectorului $\vec{a}^t_{EC}$ al acceleraţiei tangenţiale a punctului E faţă de punctul C.

Scara $k_a \left[\frac{\text{m/s}^2}{\text{mm}}\right]$ a planului acceleraţiilor (fig. 5.23,*c*) se calculează din mărimea $l_1\omega_1^2$ şi din lungimea aleasă a segmentului $P_a n_B$. După calculul mărimilor acceleraţiilor normale se execută construirea planului acceleraţiilor conform ecuaţiilor (5.13) şi (5.14).

Prin metoda analitică, folosind aceleaşi ecuaţii, se pot determina mărimile ε_2, ε_3, ε_5 şi $\ddot{\vec{l}}_7$. Pentru determinarea lui ε_2 trebuie înmulţită scalar ecuaţia (5.13) cu versorul $\vec{e}_2$; iar pentru determinarea lui ε_3 cu versorul $\vec{e}_2$; pentru determinarea lui ε_5 şi $\ddot{l}_7$ trebuie efectuată succesiv înmulţirea scalară a ecuaţiei (5.14) cu versorii $\vec{j}$ respectiv $\vec{e}_5$.

Proprietatea de asemănare directă a planelor vitezelor şi acceleraţiilor cu planul figurii în mişcare directă a elementului. Poligoanele formate de vectorii vitezelor şi acceleraţiilor relative ale unor puncte din planul elementului sînt direct asemenea figurii în mişcare a elementului respectiv. Prin asemănare directă se înţelege succesiunea analogă a vîrfurilor la înconjurare în acelaşi sens a perimetrelor lor. Proprietatea de asemănare se utilizează la determinarea grafică a vitezei şi acceleraţiei oricărui punct din planul elementului respectiv folosind planele de viteze şi acceleraţii. În fig. 5.23 este indicat cum se determină viteza $\vec{v}_F$ şi acceleraţia $\vec{a}_F$ ale punctului F care aparţine elementului *2*. Aici triunghiurile BFC şi bfc sînt direct asemenea, parcurgerea punctelor BFC respectiv bfc se face în acelaşi sens cu ambele plane (sensul acelor de ceasornic).

2. Dîndu-se parametrii constanţi şi variabili ai schemei mecanismului (fig. 5.24,*a*), viteza unghiulară ω_1 şi acceleraţia unghiulară ε_1 ale elementului *1*, să se determine viteza unghiulară ω_3 şi acceleraţia unghiulară ε_3 ale elementului *3*.

Ecuaţia de închidere este

$$l_1\vec{e}_1 = l_4\vec{j} + l_3\vec{e}_3. \tag{5.15}$$

Ecuaţia vitezelor este

$$l_1\omega_1\vec{e}'_1 = \dot{l}_3\vec{e}_3 + l_3\omega_3\vec{e}'_3, \qquad \vec{v}_B = \vec{v}_{BB_3} + \vec{v}_{B_3}, \Big\} \tag{5.16}$$

unde $\vec{v}_{BB_3} = \dot{l}_3 \vec{e}_3$ este viteza relativă a punctului B, aparţinînd glisierei 2, faţă de punctul B_3, din planul elementului care în momentul considerat coincide cu 3 punctul B, iar $\vec{v}_{B_3} = l_3 \omega_3 \vec{e}_3'$ este viteza absolută a punctului B.

Direcţiile vectorilor vitezelor se stabilesc prin direcţiile versorilor, care intră în ecuaţia (5.16). Planul vitezelor mecanismului examinat este reprezentat în fig. 5.24. *b*.

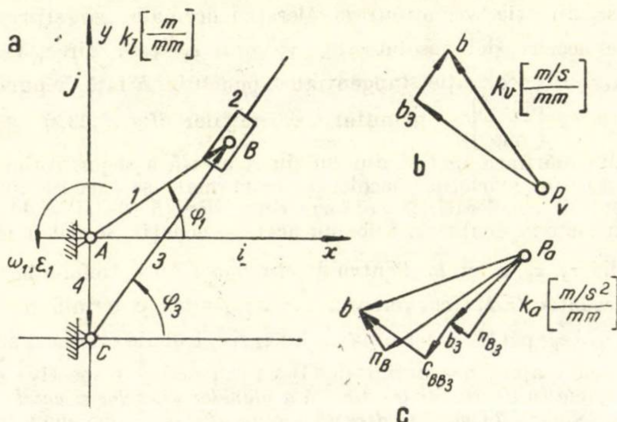


Fig. 5.24.

În cazul metodei analitice, (5.16) trebuie înmulţită scalar la început cu versorul $\vec{e}_3'$, prin aceasta determinîndu-se viteza unghiulară şi pe urmă cu versorul $\vec{e}_3$, ceea ce dă posibilitatea determinării vitezei $\vec{v}_{BB_3}$.

Ecuaţiile acceleraţiilor sînt

$$\left.\begin{aligned} l\omega_1^2 \vec{e}_1'' + l_1\varepsilon_1 \vec{e}_1' &= \ddot{l}_3 \vec{e}_3 + 2\dot{l}_3\, \omega_3 \vec{e}_3' + l_3\omega_3^2 \vec{e}_3'' + l_3 \varepsilon_3 \vec{e}_3' \\ \vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,t} &= \vec{a}_{BB_3}^{\,r} + \vec{a}_{BB_3}^{\,c} + \vec{a}_{B_3}^{\,n} + \vec{a}_{B_3}^{\,t}, \end{aligned}\right\} \quad (5.17)$$

unde $\vec{a}_{BB_3}^{\,r} = \ddot{l}_3 \vec{e}_3$ este acceleraţia relativă a punctului B faţă de punctul B_3, iar $\vec{a}_{BB_3}^{\,c} = 2\dot{l}_3\, \omega_3 \vec{e}_3'$ este acceleraţia Coriolis a punctului B, al cărei vector este situat perpendicular pe CB şi este îndreptat conform semnelor lui $\dot{l}_3$ şi ω_3. În cazul dat direcţia vectorului $\vec{a}_{BB_3}^{\,c}$ se stabileşte prin rotaţia pozitivă a versorului $\vec{e}_3$ cu 90°, deoarece $\dot{l}_3$ şi ω_3 sînt pozitive. Ghidîndu-ne după planul vitezelor, direcţia vectorului acceleraţiei Coriolis poate fi stabilită prin rotirea cu 90° a vecto-

rului vitezei relative a glisierei faţă de culisă (fig. 5.24,*b* vectorul $\overline{b_3b}$) în sensul de rotaţie ω_3 a culisei. Direcţia vectorului lui $\vec{a}^n_{B_3}$ şi linia de acţiune a vectorului $\vec{a}^t_{B_3}$ sînt determinate de versorii $\vec{e}''_3$ şi $\vec{e}'_3$.

După calculul mărimilor $\vec{a}^c_{BB_3}$ şi $\vec{a}^n_{B_3}$ se poate construi planul acceleraţiilor (fig. 5.24,*c*). Construcţia trebuie efectuată astfel ca vîrful vectorului $\vec{a}^c_{BB_3}$ să coincidă cu vîrful vectorului $\vec{a}^t_B$, iar vectorul $\vec{a}^n_{B_3}$ să pornească din P_a (polul acceleraţiilor).

Rezolvarea scalară a ecuaţiei (5.17) se poate efectua prin înmulţirea scalară a acesteia consecutiv cu versorii $\vec{e}'_3$ şi $\vec{e}_3$, permiţînd astfel determinarea mărimilor necunoscute ε_3 şi $\ddot{l}_3$.

3. Dîndu-se parametrii constanţi şi variabili ai schemei mecanismului (fig. 5.25), şi viteza unghiulară constantă ω_1 a elementului *1*, să se determine viteza $\vec{v}_E$ şi acceleraţia $\vec{a}_E$ ale punctului *E*.

În cazul examinat poligoanele schemei pot fi rezolvate numai simultan.

Ecuaţiile de închidere ale poligoanelor *ABCDA* şi *DCEFAD* sînt

$$l_1\vec{e}_1 - l_{CB}\vec{e}_3 - l_4\vec{e}_4 - l_5\vec{e}_5 = 0, \tag{5.18}$$

$$l_4\vec{e}_4 + l_{CE}\vec{e}_3 - l_7\vec{j} - l_6\vec{i} + l_5\vec{e}_5 = 0. \tag{5.19}$$

Ecuaţiile vitezelor sînt

$$\left.\begin{aligned} &l_1\omega_1\vec{e}'_1 - \dot{l}_{CB}\vec{e}_3 - l_{CB}\,\omega_3\vec{e}'_3 - l_4\,\omega_4\,\vec{e}'_4 = 0,\\ &\vec{v}_B - \vec{v}_{BB_3} - \vec{v}_{B_3C} - \vec{v}_C = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

$$\left.\begin{aligned} &l_4\omega_4\vec{e}'_4 + l_{CE}\omega_3\vec{e}'_3 - \dot{l}_6\vec{i} = 0,\\ &\vec{v}_C + \vec{v}_{EC} - \vec{v}_E = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

În ecuaţiile de mai înainte avem următoarele necunoscute: $\dot{l}_{CB}$, ω_3, ω_4 şi $\dot{l}_6$, în fiecare din aceste ecuaţii fiind cîte trei necunoscute, de aceea rezolvarea directă, prin metoda grafică, a problemei examinate nu este posibilă.

Pentru rezolvare folosim metoda punctelor singulare ale lui Assur. În ecuaţia (5.18) înlocuim vectorul $l_{CB}\vec{e}_3$ prin doi vectori componenţi $l_{BS}\vec{e}'_3$ şi $l_{CS}\vec{e}_4$ (fig. 5.25). Avem

$$l_{CB}\vec{e}_3 = l_{BS}\vec{e}'_3 + l_{CS}\vec{e}_4. \tag{5.22}$$

Considerînd că punctul S aparţine elementului 3, derivăm în raport cu timpul ultima egalitate. Avem

$$\dot{l}_{CB}\vec{e}_3 + l_{CB}\omega_3\vec{e}_3' = l_{BS}\omega_3\vec{e}_3'' + l_{CS}\omega_3\vec{e}_4' = - l_{BS}\omega_3\vec{e}_3 + + l_{CS}\omega_3\vec{e}_4'. \quad (5.23)$$

Acum ecuaţia (5.20) poate fi înlocuită cu următoarea:

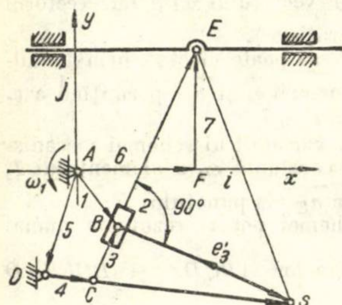


Fig. 5.25.

$$\left.\begin{aligned} & l_1\omega_1\vec{e}_1' + l_{BS}\omega_3\vec{e}_3 - (l_4\omega_4 + \\ & + l_{CS}\omega_3)\vec{e}_4' = 0, \\ & \vec{v}_B + \vec{v}_{SB} = \vec{v}_C + \\ & + \vec{v}_{SC} = \vec{v}_S, \end{aligned}\right\} \quad (5.24)$$

adică astfel se poate determina viteza $\vec{v}_S$ a punctului S, care aparţine elementului 3.

După aceasta se determină viteza $\vec{v}_E$ a punctului E pe baza ecuaţiei

$$\vec{v}_E = \vec{v}_S + \vec{v}_{ES}. \quad (5.25)$$

Mai departe se pot determina mărimile vitezelor celorlalte puncte ale mecanismului studiat.

Pentru determinarea acceleraţiilor derivăm în raport cu timpul ecuaţiile (5.20) şi (5.21). Avem

$$\left.\begin{aligned} & l_1\omega_1^2\vec{e}_1'' - \ddot{l}_{CB}\vec{e}_3 - 2\dot{l}_{CB}\omega_3\vec{e}_3' - l_{CB}\omega_3^2\vec{e}_3'' - l_{CB}\varepsilon_3\vec{e}_3' - \\ & - l_4\omega_4^2\vec{e}_4'' - l_4\varepsilon_4\vec{e}_4' = 0, \\ & \vec{a}_B^n - \vec{a}_{BB_3}^r - \vec{a}_{BB_3}^c - \vec{a}_{B_3C}^n - \vec{a}_{B_3C}^t - \vec{a}_C^n - \vec{a}_C^t = 0, \end{aligned}\right\} \quad (5.26)$$

$$\left.\begin{aligned} & l_4\omega_4^2\vec{e}_4'' + l_4\varepsilon_4\vec{e}_4' + l_{CE}\omega_3^2\vec{e}_3'' + l_{CE}\varepsilon_3\vec{e}_3' - \ddot{l}_6\vec{i} = 0, \\ & \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^t + \vec{a}_{EC}^n + \vec{a}_{EC}^t - \vec{a}_E = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5.27)$$

Utilizînd metoda punctelor singulare, derivăm în raport cu timpul ecuaţia (5.23). Avem

$$\ddot{l}_{CB}\vec{e}_3 + 2\dot{l}_{CB}\omega_3\vec{e}_3' + l_{CB}\omega_3^2\vec{e}_3'' + l_{CB}\varepsilon_3\vec{e}_3' = = - l_{BS}\omega_3^2\vec{e}_3' - l_{BS}\varepsilon_3\vec{e}_3 + l_{CS}\omega_3^2\vec{e}_4'' + l_{CS}\varepsilon_3\vec{e}_4'. \quad (5.28)$$

Acum ecuaţia (5.26) poate fi scrisă astfel:

$$\left.\begin{aligned} l_1\omega_1^2\vec{e}_1'' + l_{BS}\omega_3^2\vec{e}_3' + l_{BS}\varepsilon_3\vec{e}_3 - (l_4\omega_4^2 - l_{CS}\omega_3^2)\vec{e}_4'' - \\ - (l_4\varepsilon_4 - l_{CS}\varepsilon_3)\vec{e}_4' = 0 \\ \vec{a}_B + \vec{a}_{SB}^n + \vec{a}_{SB}^t = (\overline{a_G^n + a_{SG}^n}) + (\overline{a_G^t + a_{SG}^t}). \end{aligned}\right\} \quad (5.29)$$

Ca şi mai înainte, ultima ecuaţie poate fi folosită pentru determinarea acceleraţiei punctului S şi apoi rezolvarea în continuare a problemei se face la fel ca la cea precedentă.

Rezolvarea aceleiaşi probleme prin metoda analitică se poate realiza prin înmulţirea scalară a ecuaţiilor (5.20), (5.26) şi (5.21), (5.27) respectiv cu versorii $\vec{e}_3'$ şi $\vec{j}$, după care se obţin cîte două ecuaţii algebrice liniare cu necunoscutele ω_3 şi ω_4 şi respectiv cu ε_3 şi ε_4.

5.3

Studiul cinematic al mecanismelor cu roţi cu fricţiune şi dinţate

§ 5.5. Mecanisme obişnuite cu roţi cu fricţiune şi dinţate [1]

Legea fundamentală a angrenării. Normala *nn* dusă prin punctul de tangenţă a două elemente în contact împarte linia centrelor în părţi invers proporţionale cu vitezele lor unghiulare. Punctul P, care împarte linia centrelor în părţi invers proporţionale cu vitezele unghiulare ale elementelor, se numeşte *centru instantaneu de rotaţie corespunzător mişcării relative a elementelor*. Locurile geometrice $\alpha_1\alpha_1$ şi $\alpha_2\alpha_2$ ale centrelor instantanee de rotaţie corespunzătoare mişcării relative a elementelor, care sînt centroidele mişcării relative, se numesc curbe primitive (fig. 5.26).

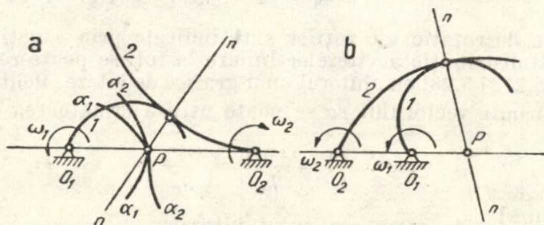


Fig. 5.26.

Raportul i_{km} al vitezelor unghiulare ω_k şi ω_m ale elementelor k şi m se numeşte *raport de transmitere*. Avem

$$\vec{i}_{km} = \frac{\omega_k}{\omega_m} \text{ sau } \vec{i}_{mk} = \frac{\omega_m}{\omega_k}. \tag{5.30}$$

Consecinţă a legii fundamentale a angrenării. Dacă normalele duse prin punctele consecutive de contact a două elemente trec prin acelaşi punct al liniei centrelor, atunci raportul de transmitere rămîne constant. De această proprietate se bucură mecanismele dinţate, compuse din roţi circulare. Curbele primitive în acest caz sînt cercuri care se numesc de asemenea *primitive* (fig. 5.27).

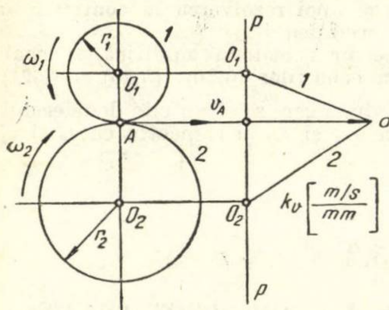


Fig. 5.27.

Mecanismele care satisfac consecinţa de mai înainte se utilizează sau sub forma unor discuri rotunde în contact (transmisii prin frecare), sau sub forma de roţi dinţate (angrenaje). Mecanismul obişnuit de fricţiune sau dinţat, *într-o singură treaptă*, se numeşte *mecanism cu roţi în contact*, cu două axe fixe (fig. 5.27...5.29).

Rapoartele de transmitere ale mecanismelor dinţate şi cu fricţiune. Notaţii convenţionale: r_k este raza cercului primitiv al roţii k, iar z_k este numărul de dinţi al roţii k.

Fig. 5.27. $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad v_A = pa \cdot k_v.$

Fig. 5.28. $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}.$

Fig. 5.29. $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}.$

Sensurile de rotaţie ale roţilor sînt indicate prin săgeţi.

Legea de distribuţie a vitezelor liniare la roţi se poate reprezenta grafic (fig. 5.27 şi 5.28) cu ajutorul unor grafice de viteze. Pentru determinarea mărimii vectorului $\overline{pa}$ se poate utiliza următoarea egalitate

$$pa = \frac{v_A}{k_v} = \frac{\omega_1 r_1}{k_v} = \frac{\omega_2 r_2}{k_v}, \tag{5.31}$$

unde $k_v \left[\frac{\text{m/s}}{\text{mm}}\right]$ este scara graficului vitezelor.

Mecanisme cu roţi dinţate obişnuite cu mai multe trepte. Se numeşte *mecanism obişnuit cu mai multe trepte* un mecanism care posedă mai multe axe fixe de rotaţie. Se numeşte *treaptă a mecanismului* o parte a lui, dispusă între două axe fixe cît mai apropiate. Raportul de transmitere al unui mecanism cu mai multe trepte este egal cu produsul

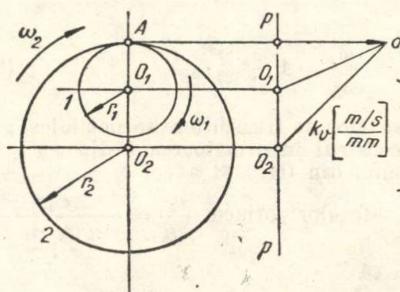


Fig. 5.28.

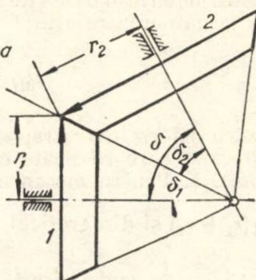


Fig. 5.29.

rapoartelor de transmitere ale treptelor sale. În fig. 5.30 este indicată schema unei transmisii dinţate cu două trepte. Tot acolo sînt reprezentate graficele vitezelor liniare ale roţilor. Mecanismul din fig. 5.30 la care axele geometrice ale roţilor *1* şi *3* sînt confundate, se numeşte *monoaxial sau coaxial*. Mecanismul cu roţi dinţate a cărui roată condusă se roteşte mai încet decît cea conducătoare, se numeşte *reductor*. Pentru mecanismul din fig. 5.30 avem

$$i_{13} = i_{12} \cdot i_{23} = = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_{2'}} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_{2'}}.$$

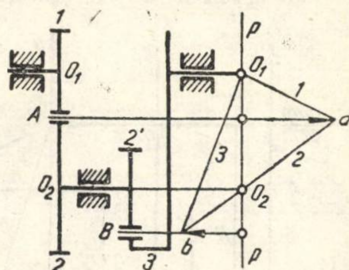


Fig. 5.30.

§ 5.6. Mecanisme diferenţiale şi planetare

Mecanismul cu roţi cu fricţiune sau dinţate, care posedă axe şi role cu axe în mişcare de rotaţie, se numeşte *diferenţial*. Dacă una din roţile centrale ale acestui mecanism este fixă, atunci el se numeşte *planetar* (fig. 5.31). Raportul de transmitere al mecanismului planetar este

$$i_{1H} = 1 - i_{13}^{H}, \tag{5.32}$$

unde i_{1H} este raportul de transmitere de la elementul *1* la axul braţului portsatelit H, iar i_{13}^{H} este raportul de transmitere de la roata *1* la roata *3* cînd axul braţului portsatelit H este considerat fix.

Pentru mecanismul din fig. 5.31 avem

$$i_{1H} = 1 - i_{12}^{H} \cdot i_{23}^{H} = 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}.$$

Pentru determinarea vitezei unghiulare ω_2 a *satelitului 2* se poate utiliza următoarea relaţie:

$$i_{2H} = \frac{\omega_2}{\omega_H} = 1 - i_{23}^{H}. \tag{5.33}$$

Pentru determinarea rapoartelor de transmitere se pot folosi graficul vitezelor care se poate construi în următoarea ordine: pa, O_1a, O_2a, pb, O_1b. Pentru mecanismul din fig. 5.31 avem $v_1 = \omega_1 r_1$, $v_H = \omega_H (r_1 + r_2)$ şi din graficul vitezelor obţinem $\frac{v_1}{v_H} = \frac{\omega_1 r_1}{\omega_H (r_1 + r_2)} = \frac{r_2 + r_{2'}}{r_{2'}}$, de unde rezultă că

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{(r_1 + r_2)(r_2 + r_{2'})}{r_1 r_{2'}}.$$

În mod corespunzător pentru i_{2H} avem $\frac{v_2}{v_H} = \frac{\omega_2 (r_2 + r_{2'})}{\omega_H (r_1 + r_2)} = \frac{r_2 + r_{2'}}{r_{2'}}$.

Graficele vitezelor arată că vitezele unghiulare ω_2 şi ω_H sînt îndreptate în sensuri diferite şi de aceea semnul raportului de transmitere trebuie să fie negativ. Avem $i_{2H} = -\frac{r_1 + r_2}{r_{2'}}$.

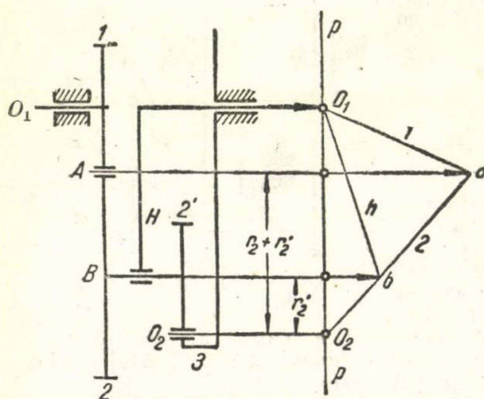


Fig. 5.31.

Pentru precizarea mişcării mecanismului diferenţial, în care toate elementele au posibilitatea de a se roti, trebuie să fie date vitezele unghiulare a două din trei elemente.

Raportul între ω_1, ω_3 şi ω_H este

$$i_{13}^{H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \tag{5.34}$$

Mecanismele planetar şi cel diferenţial examinate sînt cu o singură treaptă, deoarece au numai cîte două axe fixe. Pentru mărirea raportului de transmitere, la un mecanism cu o singură treaptă se pot lega una sau cîteva trepte ale mecanismului obişnuit sau planetar.

Mecanism diferenţial închis. Un astfel de mecanism la care din trei elemente mobile două sînt legate printr-o legătură suplimentară care stabileşte între ele un anumit raport de transmisie.

Să examinăm ca exemplu un mecanism de troliu, a cărui schemă este reprezentată în fig. 5.32. Se dă $z_1 = 24$, $z_2 = 52$, $z_{2'} = 21$,

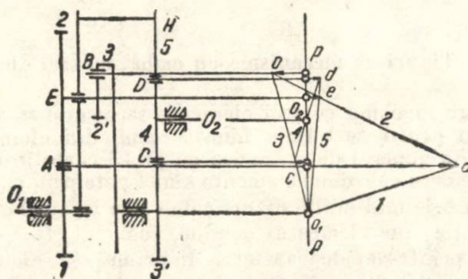


Fig. 5.32.

$z_3 = 78$, $z_{3'} = 18$, $z_4 = 30$, $z_5 = 78$. Se cere determinarea raportului de transmitere i_{15}.

Pentru rezolvare se scriu următoarele ecuaţii:

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}, \qquad i_{35} = i_{34} i_{45} = -\frac{z_5}{z_{3'}}.$$

Împărţim numărătorul şi numitorul primei din egalităţile arătate cu ω_5. Avem

$$i_{13}^H = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_5} - 1}{\frac{\omega_3}{\omega_5} - 1} = \frac{i_{15} - 1}{i_{35} - 1},$$

de unde $i_{15} = i_{13}^H (i_{35} - 1) + 1$, sau

$$i_{15} = i_{12}^H i_{23}^H (i_{34} i_{45} - 1) + 1 = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}\left(-\frac{z_4 z_5}{z_{3'} z_4} - 1\right) + 1.$$

După înlocuirea cu valorile numerice obţinem

$$i_{15} = -\frac{52 \cdot 78}{24 \cdot 21}\left(-\frac{78}{18} - 1\right) + 1 = 43{,}8.$$

5.4

Studiul cinematic al mecanismelor plane cu camă și al mecanismelor de Malta [1, 7, 10, 12]

§ 5.7. Tipuri de mecanisme cu camă, cu trei elemente

Mecanismul cu camă cu trei elemente se compune din elementul conducător cu profil curbiliniu numit *camă*, din elementul condus numit *tachet* (în general de asemenea cu profil curbiliniu) și dintr-un element fix de care cele două elemente sînt legate prin cuple inferioare (fig. 5.33). În cele mai multe cazuri cama este legată la bază printr-o cuplă de rotație, iar elementul condus, tachetul, fie printr-o cuplă de rotație, fie printr-una de translație. În primul caz, elementul condus se numește *tachet oscilant*, în al doilea — *tachet*.

În mecanismele cu role se deosebește *profilul practic* sau propriu-zis al camei, pe care se rostogolește rola, și cel *teoretic* (fig. 5.33,*a*), echidistant față de profilul practic și trecînd prin centrul de rotație al rolei. Profilul practic se poate construi după cel teoretic ca înfășurătoare a diferitelor poziții ale rolei.

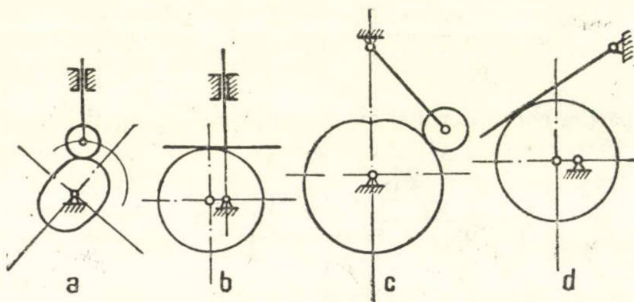


Fig. 5.33.

Raza vectoare a profilului camei se dă de obicei într-o tabelă de valori a mărimii ei și a valorii unghiului de înclinare față de o direcție determinată, rigid legată de camă.

Pentru studiul cinematic al unui mecanism cu camă este necesară cunoașterea poziției și mărimii razei de curbură pentru fiecare punct al profilului camei. Grafic raza de curbură se poate determina prin construirea unui cerc ce trece prin trei puncte date. Profilul camei se

împarte în porţiuni mici, pe fiecare din ele se însemnă trei puncte prin care se duc cercuri.

Pentru rezolvarea numerică a aceleiaşi probleme se poate folosi metoda următoare: se dă profilul camei din tabela de valori a razei vectoare ρ în funcţie de unghiul de înclinare α al razei vectoare faţă de o direcţie dată aleasă anterior şi rigid legată de camă. Alegînd trei puncte i, k şi m, situate aproape unul de altul, se determină poziţia centrului O_k al cercului care trece prin ele (fig. 5.34). Notînd coordonatele punctelor prin x şi y afectaţi de indicii respectivi, avem următorul sistem de ecuaţii:

$$\left.\begin{aligned}(x_i - x_{Ok})^2 + (y_i - y_{Ok})^2 &= r_k^2,\\ (x_k - x_{Ok})^2 + (y_k - y_{Ok})^2 &= r_k^2,\\ (x_m - x_{Ok})^2 + (y_m - y_{Ok})^2 &= r_k^2.\end{aligned}\right\} \quad (5.35)$$

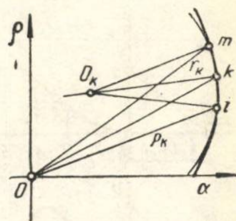


Fig. 5.34.

Analog se determină poziţia centrelor de curbură şi a celorlalte puncte ale profilului camei.

§ 5.8. Studiul cinematic al mecanismelor cu came

Metoda derivării grafice. Se construieşte mai întîi diagrama deplasării tachetului (elementul condus) în funcţie de unghiul de rotaţie al camei sau de timp. Se derivează apoi în raport cu timpul mărimile care reprezentate grafic au dus la diagrama de mai înainte; mărimile derivate ne dau diagrama de variaţie a vitezei elementului condus (tachetul) în funcţie de timp; a doua derivare permite obţinerea diagramei de variaţie a acceleraţiei în funcţie de timp.

Exemplu. Se cere construirea diagramelor $s = s(t)$, $v = v(t)$ şi $a = a(t)$ pentru elementul *2* al mecanismului cu camă (fig. 5.35), în cazul cînd cama se roteşte cu o viteză unghiulară constantă ω_1.

Deplasările elementului *2* se pot determina prin *metoda inversării mişcării*, care constă în faptul că întregului sistem examinat i se imprimă o mişcare cu viteza unghiulară $-\omega_1$ şi din această cauză cama rămîne imobilă, iar tachetul *2*, prin mişcarea suplimentară, se roteşte şi ocupă faţă de camă aceleaşi poziţii relative, care se obţin ca rezultat

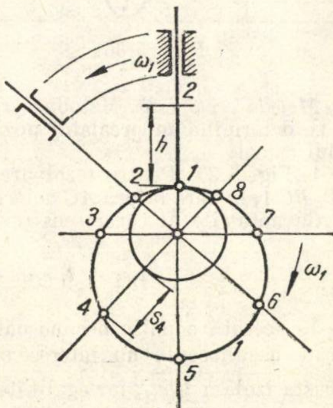


Fig. 5.35.

al mişcării reale (fig. 5.35). Desenul executat în fig. 5.35 permite construirea la scara k_s [m/mm] a diagramei $s = s(t)$ (fig. 5.36, *a*) şi cu ajutorul ei se poate construi diagrama $v = v(t)$. În acest scop este utilă folosirea metodei secantelor. Pentru a determina derivata întîia într-un punct oarecare *A* (fig. 5.36, *a*), trebuie luate de o parte şi alta a punctului mici segmente egale *Aa* şi *Aa'* astfel ca arcul *aa'* să fie ca formă, apropiat de o dreaptă. După aceea, prin punctele *a* şi *a'* se duce o dreaptă. Tangenta unghiului de înclinare a acestei drepte cu axa absciselor este proporţională cu valoarea primei derivate în punctul *A*. Alegînd pe axa absciselor punctul *O* la distanţa *k* [mm], ducem prin el o dreaptă paralelă cu dreapta *aa'*. Segmentul *1 — a* poate fi considerat ca ordonata vitezei tachetului *2* la scara

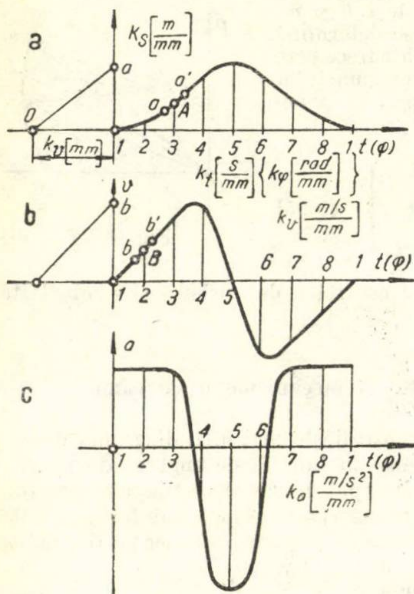


Fig. 5.36.

$$k_v = \frac{k_s}{k \cdot k_t}\left[\frac{\text{m/s}}{\text{mm}}\right]. \quad (5.36)$$

După ce obţinem prin metoda descrisă cîteva ordonate, se poate construi diagrama $v = v(t)$, reprezentată în fig. 5.36, *b*.

Diagrama $a = a(t)$ (fig. 5.36,*c*) poate fi construită în mod analog după diagrama $v = v(t)$.

Metoda vectorială. Metoda vectorială poate fi folosită numai după ce se determină în prealabil poziţiile centrelor de curbură ale profilului camei.

1. Fig. 5.37. Pentru rezolvare se poate utiliza poligonul vectorial AO_kBCA, în care latura *AC* determină poziţia căutată a elementului *2*. Cu notaţiile al căror sens rezultă din cele de mai înainte, avem

$$l_1\vec{e}_1 + l_{1'}\vec{e}_{1'} - l_{2'}\vec{e}_{2'} - l_2\vec{e}_2 = 0. \quad (5.37)$$

În această ecuaţie necunoscute sînt l_2 şi versorul $\vec{e}_1$. A doua din aceste necunoscute nu interesează, de aceea o eliminăm şi pentru aceasta izolăm $l_{1'}\vec{e}_{1'}$, iar egalitatea astfel obţinută se ridică la pătrat. Prin transformări corespunzătoare se obţine o ecuaţie de gradul al doilea cu necunoscuta l_2.

2. Fig. 5.38. Ecuaţia de închidere are forma

$$l_1\vec{e}_1 + l_{1'}\vec{j} - l_{2'}\vec{i} - l_2\vec{j} = 0. \tag{5.38}$$

Pentru determinarea necunoscutei l_2, care dă poziţia elementului 2, se înmulţeşte ecuaţia 5.38 scalar cu versorul $\vec{j}$.

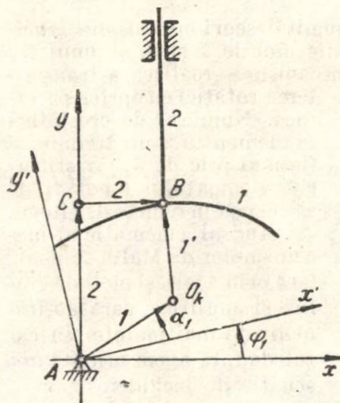


Fig. 5.37.

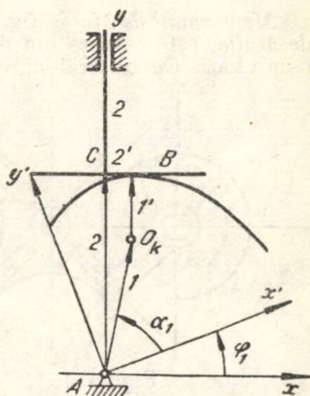


Fig. 5.38.

Fig. 5.39. Utilizăm următoarea ecuaţie de închidere a poligonului vectorial AO_kO_mCA

$$l_1\vec{e}_1 + l_{1'}\vec{e}_{1'} - l_2\vec{e}_2 - l_3\vec{e}_3 = 0. \tag{5.39}$$

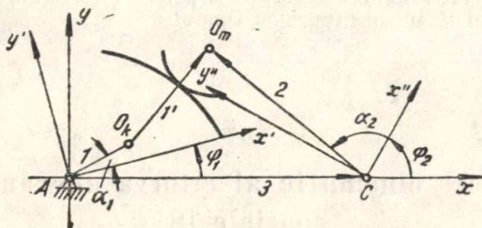


Fig. 5.39.

Pentru determinarea necunoscutei φ_2 izolăm al doilea termen din partea stîngă a ecuaţiei (5.39), după aceea se ridică ecuaţia obţinută la pătrat scalar.

Prin metode analoge se pot determina poziţiile şi ale altor mecanisme cu camă.

Problema vitezelor şi acceleraţiilor poate fi rezolvată prin derivarea în raport cu timpul a ecuaţiilor corespunzătoare de închidere. Cu ajutorul lor sau se pot construi planele vitezelor şi acceleraţiilor, sau aceste ecuaţii se pot rezolva prin metode numerice.

§ 5.9. Mecanisme cu cruce de Malta (mecanisme de Malta)

Mecanismul de Malta (fig. 5.40), denumit deseori *mecanismul crucii de Malta*, este compus din două elemente mobile *1* şi *2*, şi unul fix numit bază. Cu ajutorul unui astfel de mecanism se realizează transmiterea rotaţiei cu opriri periodice. Numărul de crestături în elementul *2* nu trebuie să fie mai mic de *3*, iar ştifturile elementului *1* pot fi de asemenea în număr de cîteva.

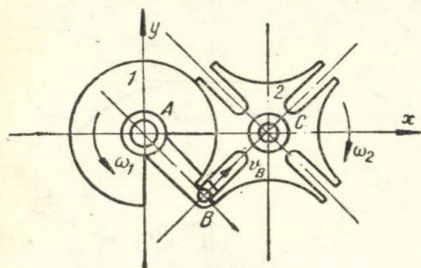


Fig. 5.40.

Studiul cinematic al mecanismelor de Malta se poate face prin aceleaşi metode grafice şi analitice, care au fost utilizate mai înainte. În cazul de faţă avem următoarea ecuaţie de închidere

$$l_{AB}\vec{e}_{AB} - l_{CB}\vec{e}_{CB} - l_{AC}\vec{i} = 0, \tag{5.40}$$

care după izolarea termenului al doilea se rezolvă prin ridicarea la pătrat, ceea ce permite determinarea lui l_{CB}. După aceasta mărimea φ_{CB} poate fi determinată prin înmulţirea scalară a lui (5.40) cu versorul $\vec{i}$ sau cu $\vec{j}$.

Problema vitezelor şi acceleraţiilor poate fi rezolvată prin diferenţierea ecuaţiei (5.40) în raport cu timpul.

5.5
Studiul cinematic al cîtorva mecanisme spaţiale [8]

§ 5.10. Relaţiile de bază din geometria analitică (fig. 5.41)

$$\begin{aligned}\vec{l}_i &= l_i\vec{e}_i = l_i(\vec{i}x_i + \vec{j}y_i + \vec{k}z_i) = \vec{i}X_i + \vec{j}Y_i + \vec{k}Z_i = \\ &= l_i(\vec{i}\cos\alpha_i + \vec{j}\cos\beta_i + \vec{k}\cos\gamma_i)\end{aligned} \tag{5.41}$$

unde

$\vec{l_i}$ este un vector, l_i şi $\vec{e_i}$ valoarea sa algebrică şi versorul său, $\vec{i}, \vec{j}$ şi $\vec{k}$ versorii axelor de coordonate, x_i, y_i, z_i proiecţiile versorului $\vec{e_i}$ pe axele de coordonate, X_i, Y_i, Z_i, proiecțiile vectorului l_i pe axele de coordonate, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ unghiurile de înclinare ale vectorului $\vec{l_i}$ față de axele de coordonate.

$$X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = l_i^2, \qquad x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1. \qquad (5.42)$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1, \qquad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0. \qquad (5.43)$$

$$\cos\alpha_i = \vec{e_i}\cdot\vec{i}, \qquad \cos\beta_i = \vec{e_i}\cdot\vec{j}, \qquad \cos\gamma_i = \vec{e_i}\cdot\vec{k}, \qquad (5.44)$$

$$\cos(\vec{e_p}, \vec{e_q}) = \vec{e_p}\cdot\vec{e_q} = x_p\, x_q + y_p\, y_q + z_p\, z_q. \qquad (5.45)$$

$$\vec{e_t}\sin(\vec{e_p}, \vec{e_q}) = \vec{e_p}\cdot\vec{e_q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \end{vmatrix}, \qquad (5.46)$$

unde $\vec{e_t}$ este un versor perpendicular pe versorii $\vec{e_p}$ şi $\vec{e_q}$. Determinantul se dezvoltă după elementele primului rînd

$$\left.\begin{aligned} &\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0, \quad \vec{i}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{i} = \vec{k}, \\ &\vec{j}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{j} = \vec{i}, \quad \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{i} = -\vec{j}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.47)$$

Direcţia vectorului *l* în sistemul $Oxyz$ este dată de versorul

$$\vec{e} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \qquad (5.48)$$

şi în alt sistem $O'x'y'z'$ — în mod analog, de versorul

$$\vec{e} = \vec{i'}x' + \vec{j'}y' + \vec{k'}z', \qquad (5.49)$$

unde cu semnul ′ (prim) sînt notaţi versorii axelor celui de al doilea sistem de coordonate şi proiecţiile versorului în acest sistem.

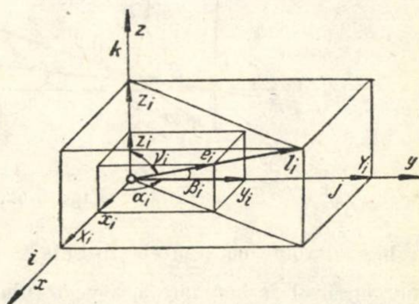


Fig. 5.41.

Legătura între proiecțiile versorilor în diferitele sisteme de coordonate este

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\vec{i'}\cdot\vec{i} + y'\vec{j'}\cdot\vec{i} + z'\vec{k'}\cdot\vec{i},\\ y &= x'\vec{i'}\cdot\vec{j} + y'\vec{j'}\cdot\vec{j} + z'\vec{k'}\cdot\vec{j},\\ z &= x'\vec{i'}\cdot\vec{k} + y'\vec{j'}\cdot\vec{k} + z'\vec{k'}\cdot\vec{k},\end{aligned}\right\} \qquad (5.50)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\vec{i}\cdot\vec{i'} + y\vec{j}\cdot\vec{i'} + z\vec{k}\cdot\vec{i'},\\ y' &= x\vec{i}\cdot\vec{j'} + y\vec{j}\cdot\vec{j'} + z\vec{k}\cdot\vec{j'},\\ z' &= x\vec{i}\cdot\vec{k'} + y\vec{j}\cdot\vec{k'} + z\vec{k}\cdot\vec{k'}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.51)$$

Derivînd a doua egalitate (5.42) în raport cu un argument oarecare, de exemplu în raport cu timpul, se obține

$$\vec{e}_i\cdot\dot{\vec{e}}_i = x_i\cdot\dot{x}_i + y_i\cdot\dot{y}_i + z_i\cdot\dot{z}_i = 0, \qquad (5.52)$$

unde cu puncte sînt notate primele derivate în raport cu timpul. A doua derivare în raport cu timpul dă

$$\dot{\vec{e}}_i\cdot\dot{\vec{e}}_i + \vec{e}_i\cdot\ddot{\vec{e}}_i = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 + x_i\ddot{x}_i + y_i\ddot{y}_i + z_i\ddot{z}_i = 0. \qquad (5.53)$$

§ 5.11. Mecanismul bielă-manivelă

În poligonul $OABCO$ (fig. 5.42) următorii parametri sînt constanți l_1, l_2, l_4, unghiurile α_3, β_3 și γ_3 de înclinare a barei *3*, unghiurile α_4, β_4 și γ_4 de înclinare a bazei (în fig. 5.42 nu sînt indicate). Pentru rezolvarea

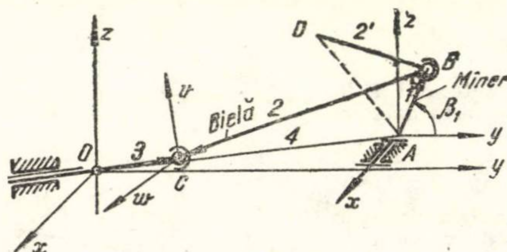


Fig. 5.42.

problemei toate constantele trebuie să fie date. Parametrii variabili sînt: unghiul de înclinare β_1 a vectorului $\vec{l}_1$ față de axa Ay, unghiurile α_2, β_2 și γ_2 de înclinare a vectorului $\vec{l}_2$ față de axele de coordonate,

valoarea algebrică a vectorului $\vec{l}_3$. Parametrii indicaţi sînt legaţi atît prin ecuaţia de închidere a poligonului $OABCO$

$$l_4 \vec{e}_4 + l_1 \vec{e}_1 + l_2 \vec{e}_2 = l_3 \vec{e}_3, \tag{5.54}$$

care poate fi desfăcută în trei ecuaţii de proiecţii pe axele de coordonate, cît şi prin egalitatea

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1, \tag{5.55}$$

unde $\vec{e}_2$, x_2, y_2, z_2 sînt versorul vectorului $\vec{l}_2$ şi proiecţiile versorului pe axele de coordonate.

Dacă unul din parametrii variabili, de exemplu β_1 este dat, problema determinării poziţiei elementelor poate fi rezolvată. Pentru rezolvare ridicăm ecuaţia (5.54) la pătrat după care se poate determina necunoscuta l_3. În sfîrşit, unghiurile α_2, β_2 şi γ_2 se pot determina cu ajutorul ecuaţiei (5.54). Rezolvarea problemei vitezelor se efectuează prin derivarea în raport cu timpul a ecuaţiilor (5.54) şi (5.55). În acest caz avem

$$l_1 \dot{\vec{e}}_1 + l_2 \dot{\vec{e}}_2 = \dot{l}_3 \vec{e}_3, \tag{5.56}$$

$$\vec{e}_2 \cdot \dot{\vec{e}}_2 = x_2 \dot{x}_2 + y_2 \dot{y}_2 + z_2 \dot{z}_2 = 0. \tag{5.57}$$

În ecuaţia (5.56) necunoscute sînt mărimile $\dot{\vec{e}}_2$ şi $\dot{\vec{l}}_3$, ultima fiind viteza glisierei. Pentru determinarea lui $\dot{\vec{l}}_3$ se înmulţeşte scalar ecuaţia (5.56) cu versorul e_2.

Avem

$$l_1 \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2 + l_2 \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_2 = \dot{l}_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2. \tag{5.58}$$

Deoarece (fig. 5.42)

$$\vec{e}_1 = \vec{j} \cos \beta_1 + \vec{k} \sin \beta_1, \tag{5.59}$$

atunci derivînd-o în raport cu timpul, obţinem

$$\dot{\vec{e}}_1 = \omega_1(-\vec{j} \sin \beta_1 + \vec{k} \cos \beta_1), \tag{5.60}$$

unde ω_1 este viteza unghiulară dată a elementului *1*, considerată constantă.

$$\dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2 = (-\vec{j} \sin \beta_1 + \vec{k} \cos \beta_1)(\vec{i} x_2 + \vec{j} y_2 + \vec{k} z_2)\, \omega_1 =$$
$$= (-y_2 \sin \beta_1 + z_2 \cos \beta_1)\, \omega_1, \tag{5.61}$$

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 = x_3 x_2 + y_3 y_2 + z_3 z_2. \tag{5.62}$$

Mărimea $\dot{\vec{l}}_3$ a vitezei glisierei se poate determina acum din relaţia

$$\dot{\vec{l}}_3 = l_1 \frac{\dot{\vec{e}}_1 \vec{e}_2}{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2}, \tag{5.63}$$

după ce din ecuaţia (5.56) se determină direct derivata $\dot{\vec{e}}_2$ a versorului $\vec{e}_2$. Proiecţiile derivatei se obţin după proiectarea acestei ecuaţii pe cele trei axe de coordonate.

Pentru rezolvarea problemei acceleraţiilor, derivăm ecuaţiile (5.56) şi (5.57) în raport cu timpul. Avem:

$$l_1 \ddot{\vec{e}}_1 + l_2 \ddot{\vec{e}}_2 = \ddot{l}_3 \vec{e}_3, \tag{5.64}$$

$$\dot{\vec{e}}_2 \cdot \dot{\vec{e}}_2 + \vec{e}_2 \cdot \ddot{\vec{e}}_2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 + x_2 \ddot{x}_2 + y_2 \ddot{y}_2 + z_2 \ddot{z}_2 = 0. \tag{5.65}$$

Pentru rezolvarea lui (5.64) se înmulţeşte această ecuaţie scalar cu versorul $\vec{e}_2$. În acest caz obţinem

$$l_1 \ddot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2 - l_2 \dot{\vec{e}}_2 \cdot \dot{\vec{e}}_2 = \ddot{l}_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2. \tag{5.66}$$

Produsele scalare ale versorilor care intră în (5.66), se calculează la fel ca şi în cazul problemei vitezelor.

Acceleraţia $\ddot{\vec{l}}_3$ a glisierei se obţine pe baza lui (5.64) în forma următoare

$$\ddot{\vec{l}}_3 = l_1 \frac{\vec{e}_2 \cdot \ddot{\vec{e}}_1}{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2} - l_2 \frac{\dot{\vec{e}}_2 \cdot \dot{\vec{e}}_2}{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2}. \tag{5.67}$$

Proiecţiile derivatei a doua $\ddot{\vec{e}}_2$ a versorului $\vec{e}_2$ se pot obţine prin proiectarea ecuaţiei (5.64) pe cele trei axe de coordonate.

Pentru determinarea legii de mişcare spaţială a bielei *2* (fig. 5.42) este necesar să se indice date suplimentare, care se stabilesc de către cupla cinematică sferică cu bolţ (cep). În fig. 5.42 este indicată legătura formată de biela *2* cu bara *3*, care intră una cu alta în forma unei cuple sferice cu bolţ. Aici, bolţul *u* este legat rigid pe glisiera *3*, iar axa *Cw*, perpendiculară pe planul canalului în care se mişcă bolţul, este rigid legată de biela *2*. Axa *u* trebuie dată în sistemul elementului *3*, iar axa *Cw* în sistemul bielei *2*. Conform fig. 5.42, bara *3*, care este legată cu batiul printr-o cuplă de translaţie, nu are posibilitatea de a se roti în jurul axului propriu şi ca urmare bolţul *u* poate efectua numai o mişcare de translaţie rectilinie.

Introducem următoarele notaţii pentru cosinusurile unghiurilor: 1) cosinusul unghiului dintre *u* şi *Oz* se notează cu c_{uz}. 2) cosinusul unghiului dintre *u* şi *OC* se notează cu c_{u3}, 3) între *w* şi *u* cosinusul este egal cu zero, 4) între *w* şi *BC* cosinusul se notează cu c_{w2}.

Utilizînd ecuaţia (5.45), se poate scrie

$$\vec{e}_u \cdot \vec{k} = c_{uz}, \quad \vec{e}_u \cdot \vec{e}_3 = c_{u3}, \quad \vec{e}_u \cdot \vec{e}_u = 1, \tag{5.68}$$

sau sub formă de ecuaţii de proiecţii pot fi reprezentate astfel

$$z_u = c_{uz}, \quad x_3 x_u + y_3 y_u + z_3 z_u = c_{u3}, \quad x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1. \tag{5.69}$$

Din ultimele ecuaţii se determină mărimile x_u, y_u şi z_u ale proiecţiilor versorului $\vec{e}_u$.

Pentru determinarea versorului $\vec{e}_w$ se pot folosi următoarele ecuaţii

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_w = 0, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_w = c_{w2}, \quad \vec{e}_w \cdot \vec{e}_w = 1, \tag{5.70}$$

care se pot scrie sub formă de ecuaţii de proiecţii analog cu cele anterioare.

Acum avem posibilitatea de a trece la determinarea poziţiei oricărui punct D (fig. 5.42) dat în sistemul bielei 2 de lungime l_2 a segmentului BD şi de unghiurile lui de înclinaţie faţă de axele BC şi w. Notînd cosinusurile unghiurilor indicate prin $c_{2'2}$ şi $c_{2'w}$, utilizăm pentru determinarea versorului $\vec{e}_2$ următoarele ecuaţii:

$$\vec{e}_{2'} \cdot \vec{e}_2 = c_{2'2}, \quad \vec{e}_{2'} \cdot \vec{e}_w = c_{2'w} \quad \vec{e}_{2'} \cdot \vec{e}_{2'} = 1, \tag{5.71}$$

care se rezolvă la fel ca şi cele precedente.

În sfîrşit, din ecuaţia de închidere a triunghiului $ABDA$ se poate determina raza vectoare a punctului D, care stabileşte poziţia lui. Determinarea vitezei şi acceleraţiei punctului D se obţine prin derivarea succesivă în raport cu timpul a ecuaţiilor examinate.

§ 5.12. Mecanismul manivelă-balansier

Fig. 5.43. Parametrii constanţi sînt: $l_1, l_2, l_3, l_4, \alpha_4, \beta_4, \gamma_4$, unghiurile $\alpha_{x'}, \beta_{x'}, \gamma_{x'}$, de înclinare a axei Ax' de rotaţie a manivelei 1 faţă de axele de coordonate ale sistemului $Oxyz$, unghiurile α_x, β_x, γ_x de înclinare a axei de rotaţie a balansierului 3, faţă de axele aceluiaşi sistem de coordonate (aici $\alpha_x = 0°$, $\beta_x = \gamma_x = 90°$). Parametrii variabili sînt β_1'; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ şi β_3. Vom considera parametrul β_1' dat. Necunoscute sînt unghiurile $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ şi unghiul β_3. Pentru rezolvare scriem ecuaţia de închidere a poligonului $ABCDA$.

$$l_1 \vec{e}_1 + l_2 \vec{e}_2 - l_3 \vec{e}_3 + l_4 \vec{e}_4 = 0. \tag{5.72}$$

În sistemul $Ax'y'z'$ versorul $\vec{e}_1$ se exprimă astfel

$$\vec{e}_1 = \vec{i}' \cdot 0 + \vec{j}' y_1' + \vec{k}' z_1', \tag{5.73}$$

unde: $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ şi $\vec{k}'$ sînt versorii axelor de coordonate ale sistemului $Ax'y'z'$, care se exprimă în modul următor:

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\alpha_{x'} + \vec{k}\sin\alpha_{x'}, \vec{j}' = \vec{j}, \vec{k}' = -\vec{i}\sin\alpha_{x'} + \vec{k}\cos\alpha_{x'}. \quad (5.74)$$

În sistemul de bază versorii $\vec{e}_1$ şi $\vec{e}_3$ pot fi exprimaţi astfel

$$\vec{e}_1 = -\vec{i}\sin\alpha_{x'}\sin\beta_1' + \vec{j}\cos\beta_1' + \vec{k}\cos\alpha_{x'}, \cos\beta_1', \quad (5.75)$$

$$\vec{e}_3 = \vec{j}\cos\beta_3 + \vec{k}\sin\beta_3. \quad (5.76)$$

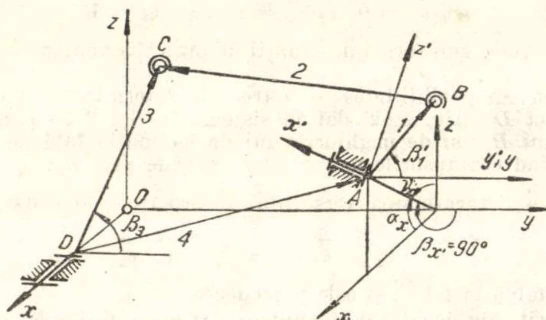


Fig. 5.43.

Pentru determinarea versorului necunoscut $\vec{e}_3$, după izolarea termenului $l_2\vec{e}_2$, ecuaţia (5.72) trebuie ridicată la pătrat. Ca rezultat al unor transformări cunoscute se obţine o ecuaţie, din care se determină unghiul căutat β_3. Prin calcule ulterioare se determină mărimile α_2, β_2 şi γ_2 din ecuaţia (5.72).

Rezolvarea problemei vitezelor şi acceleraţiilor se efectuează după derivarea în raport cu timpul a ecuaţiilor indicate mai înainte. Soluţia ecuaţiilor obţinute prin metoda indicată se găseşte prin metodele expuse în paragraful anterior.

Determinarea legii de mişcare a bielei este analogă cu cea descrisă pentru cazul mecanismului bielă-manivelă. Deoarece prin metodele expuse se pot obţine vitezele şi acceleraţiile oricăror puncte ale mecanismului, se poate stabili legea de mişcare şi a unor elemente suplimentare, legate de mecanismul examinat. Prin urmare, prin metodele descrise se pot rezolva problemele studiului cinematic al mecanismelor spaţiale complexe.

5.6
Teoria angrenării roţilor dinţate [1,4,5]

§ 5.13. Construirea unui profil conjugat cu un profil dat

Condiţia pe care trebuie să o satisfacă profilele dinţilor unui angrenaj cu raport de transmitere constant este: normala comună, dusă prin punctul de contact la profilele a doi dinţi (în orice poziţie a lor) trebuie să treacă prin acelaşi punct de pe linia centrelor (*polul de angrenare*, sau centrul instantaneu în mişcarea relativă a elementelor). Locul geometric al centrelor instantanee ale mişcării relative este *cercul de rulare*.

Problemă. Dîndu-se profilul dintelui unei roţi să se construiască profilul conjugat al dintelui celeilalte roţi (satisfăcînd condiţia de mai înainte):

Rezolvare. 1) Determinarea poziţiei polului de angrenare (fig. 5.44). Sînt date A, i_{12}, şi forma profilului $1-2$. Pentru determinarea lui r_1 şi r_2 avem

$$\frac{r_2}{r_1} = i_{12}, r_1 + r_2 = A. \quad (5.77)$$

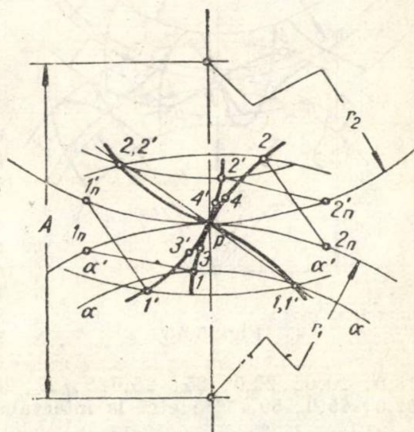


Fig. 5.44

2) Determinarea formei profilului conjugat. Luînd pe profilul dat punctul 1, determinăm poziţia punctului $1'$ al profilului conjugat căutat, în care 1 şi $1'$ intră în contact (în angrenare). Punctele care intră în contact se numesc *conjugate*. Ducem normala $1-1_n$ în punctul 1. Deoarece normalele $1-1_n$ şi $1'-1_n'$ în momentul cînd punctele intră în contact trebuie să treacă prin P_2 atunci locul de întîlnire al lui 1 cu $1'$ se găseşte la intersecţia arcului $\alpha - \alpha$ şi a arcului descris din polul P cu raza $1-1_n$. Extremitatea $1_n'$ a normalei $1'-1_n'$ a punctului căutat în poziţia iniţială se găseşte la o distanţă $P1_n'$ măsurată pe cercul primitiv de rază r_2 egală cu distanţa $P1_n'$ pe cercul primitiv de rază r_1. Însăşi punctul $1'$ este aşezat la intersecţia arcului $\alpha' - \alpha'$ cu arcul dus din punctul $1_n'$ ca centru şi cu raza $1_n'-1'$, egală cu 1_n-1.

În acelaşi mod se determină şi poziţiile punctelor căutate *2'*,*3'*,*4'* ş.a.m.d. Înfăşurînd cu o curbă continuă toate punctele găsite, obţinem forma profilului conjugat căutat *1'—2'*.

Parametrii de bază ai unui angrenaj. Dimensiunile profilurilor sînt practic limitate ca număr şi de aceea elementele, numite *roţi dinţate*, se prevăd cu cîteva profiluri (*dinţi*) care permit menţinerea rotaţiei continui.

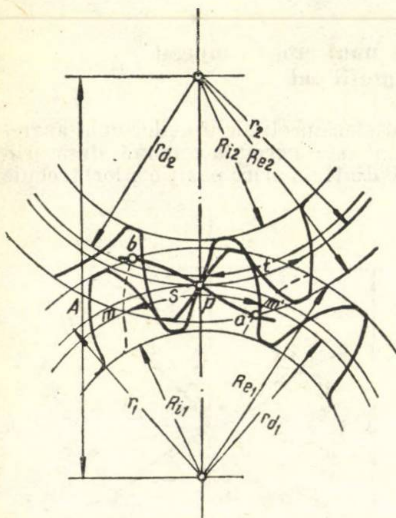


Fig. 5.45.

Pasul angrenării dinţate (pasul circular) este distanţa dintre două puncte analoge ale două profiluri vecine (dinţi) măsurată pe un cerc oarecare (fig. 5.45). Avem

$$\left.\begin{aligned} zp &= 2\pi R \\ R &= \frac{p\cdot z}{2\pi} = \frac{z}{2}m \end{aligned}\right\} \qquad (5.78)$$

unde raportul dintre mărimea pasului şi numărul π se numeşte *modulul* angrenării.

Mărimi standardizate ale modulelor (STAS 822-51). Module în mm: 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,00; 1,25; 1,50; 1,75; 2,00; 2,25; 2,50; 3,00; 3,50; 4,00; 4,50; 5,00; 5,5; 6,0; 6,5; 7,0; 8,0; 9,0; 10,0; 11,0; 12,0; 14,0; 16,0; 18,0; 20,0; 22,0; 25; 26,0**; 27; 28,0**; 30,0; 33,0; 36,0; 39,0; 42,0; 45,0; 50,0***; etc. la intervalul de 5 mm.

Cercul de divizare este cercul a cărui rază r_d este egală cu jumătatea produsului dintre numărul de dinţi şi mărimea modulului standardizat

$$r_d = \frac{z}{2} m. \qquad (5.79)$$

Locul geometric al punctelor de contact a două profiluri de dinţi se numeşte *linia de angrenare* (linia *aPb* în fig. 5.45). *Arcul de angrenare* este arcul cu care se roteşte roata de către o pereche de dinţi în contact (arcul *mm'* în fig. 5.45). *Gradul de acoperire* ε este raportul dintre arcul de angrenare şi pasul de angrenare.

§ 5.14. Angrenarea în evolventă

Evolventa unui cerc (fig. 5.46) este curba descrisă de un punct al unei drepte care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc denumit *cerc de bază*. Dreapta care se rostogoleşte se numeşte *dreaptă genera-*

toare. Forma evolventei depinde exclusiv de mărimea razei cercului de bază. Evolventa este o curbă limitată dintr-o parte. Punctul inițial este punctul M_0 așezat pe cercul de bază (fig. 5.46). Raza de curbură ρ a evolventei în punctul M este segmentul AM de la punctul de tangență A pînă la punctul M. Arcul M_0A al cercului de bază este egal cu raza de curbură AM. Evolventele aceluiași cerc de bază sînt echidistante.

Relațiile de bază care caracterizează o evolventă sînt (fig. 5.46)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AM}{r_0} = \frac{M_0A}{r_0} = \theta + \alpha; \ \operatorname{inv}\alpha = \theta = \operatorname{tg}\alpha - \alpha, \quad (5.80)$$

unde unghiul θ se numește *involuta unghiului* α (inv α). Involuta este funcție de evolventa a cărei tabelă de valori este dată mai departe.

Fig. 5.46.

Mărimea razei-vectoare R a evolventei se determină în funcție de unghiul dat α și de raza cercului de bază în modul următor

$$R = \frac{r_0}{\cos\alpha}. \quad (5.81)$$

Linia de angrenare a evolventei este tangenta comună nn la cele două cercuri de bază (fig. 5.47). Lungimea de angrenare în evolventă

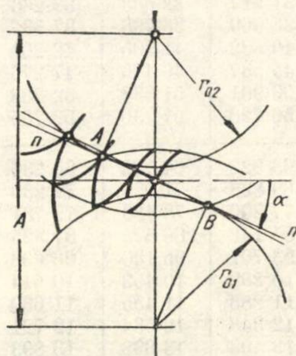


Fig. 5.47.

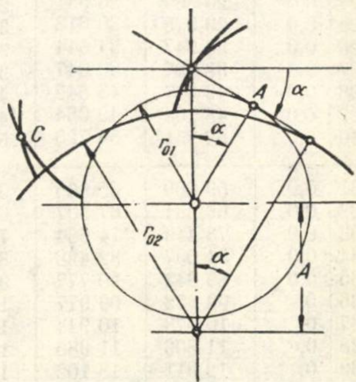


Fig. 5.48.

Tabela 5.1. Valorile lui $\theta = \text{inv}\,\alpha$.

α°	Ordinea	0°	10	20	30	40	50
1	0,000	00 177	00 281	00 420	00 598	00 821	01 092
2	0,000	01 418	01 804	02 253	02 771	03 364	04 035
3	0,000	04 790	05 634	06 573	07 610	08 751	10 000
4	0,000	11 364	12 847	14 453	16 189	18 059	20 067
5	0,000	22 220	24 522	26 978	29 594	32 394	35 324
6	0,00	03 845	04 175	04 524	04 892	05 280	05 687
7	0,00	06 115	06 564	07 035	07 528	08 044	08 582
8	0,00	09 145	09 732	10 343	10 980	11 643	12 332
9	0,00	13 048	13 792	14 563	15 363	16 193	17 051
10	0,00	17 941	18 860	19 812	20 795	21 810	22 859
11	0,00	23 941	25 057	26 208	27 394	28 616	29 875
12	0,00	31 171	32 504	33 875	35 285	36 735	38 224
13	0,00	39 754	41 325	42 938	44 593	46 291	48 033
14	0,00	49 819	51 650	53 526	55 448	57 417	59 434
15	0,00	61 498	63 611	65 773	67 985	70 248	79 561
16	0,0	07 493	07 735	07 982	08 234	08 492	08 756
17	0,0	09 025	09 299	09 580	09 866	10 158	10 456
18	0,0	10 760	11 071	11 387	11 709	12 038	11 373
19	0,0	12 715	13 063	13 418	13 779	14 148	14 523
20	0,0	14 904	15 293	15 689	16 092	16 502	16 920
21	0,0	17 345	17 777	18 217	18 665	19 120	19 583
22	0,0	20 054	20 533	21 019	21 514	22 018	22 529
23	0,0	23 048	23 577	24 114	24 660	25 214	25 778
24	0,0	26 350	26 931	27 521	28 121	28 729	29 348
25	0,0	29 975	30 613	31 260	31 917	32 583	33 260
26	0,0	33 947	34 644	35 352	36 069	36 798	37 537
27	0,0	38 287	39 047	39 819	40 602	41 395	42 201
28	0,0	43 017	43 845	44 685	45 537	46 400	47 276
29	0,0	48 164	49 064	49 976	50 901	51 838	52 788
30	0,0	53 751	54 728	55 717	56 720	57 736	58 765
31	0,0	59 809	60 865	61 937	63 022	64 122	65 236
32	0,0	66 364	67 507	68 665	69 838	71 026	72 230
33	0,0	73 449	74 684	75 934	77 200	78 483	79 781
34	0,0	81 097	82 428	83 777	85 142	86 525	87 925
35	0,0	89 342	90 777	92 230	93 701	95 190	96 698
36	0,	09 822	09 977	10 133	10 292	10 452	10 614
37	0,	10 778	10 944	11 113	11 283	11 455	11 630
38	0,	11 806	11 985	12 165	12 348	12 534	12 721
39	0,	12 911	13 102	13 297	13 493	13 692	13 893
40	0,	14 097	14 303	14 511	14 722	14 936	15 152

Tabela 5.1 (*continuare*)

α°	Ordinea	0°	10	20	30	40	50
41	0,	15 370	15 591	15 815	16 041	16 270	16 502
42	0,	16 737	16 974	17 214	17 457	17 702	17 951
43	0,	18 202	18 457	18 714	18 975	19 238	19 505
44	0,	19 774	20 047	20 323	20 603	20 885	21 171
45	0,	21 460	21 753	22 049	22 348	22 651	22 958
46	0,	23 268	23 582	23 899	24 220	24 545	24 874
47	0,	25 206	25 543	25 883	26 228	26 576	26 929
48	0,	27 285	27 646	28 012	28 381	28 755	29 133
49	0,	29 516	29 903	30 295	30 691	31 092	31 498

este limitată. Limitele ei sînt punctele A și B. Dincolo de aceste limite angrenarea este posibilă, dar ea nu satisface legea de bază: normala comună nu trece prin polul de angrenare. Punctele A și B sînt picioarele perpendicularelor coborîte din centrele cercurilor de bază pe linia de angrenare. Cercurile duse prin punctele A și B taie pe profile punctele limită ale porțiunilor de evolventă, care satisfac legea fundamentală.

Unghiul de angrenare este unghiul de înclinare al liniei de angrenare în evolventă față de perpendiculara la linia centrelor. Distanța A dintre centre se poate determina în funcție de valorile date ale lui r_{01} și r_{02} și a unghiului de angrenare. Avem

$$A = \frac{r_{01} + r_{02}}{\cos \alpha}. \tag{5.82}$$

Angrenarea examinată mai înainte se numește *exterioară*. Angrenarea interioară se obține atunci cînd o roată este așezată în interiorul alteia (fig. 5.48). Linia de angrenare în cazul angrenării interioare a roților are numai un singur punct limită (punctul A în fig. 5.48). În dreapta punctului indicat angrenarea este imposibilă. În cazul diferenței mici între r_{01} și r_{02} este posibilă intersecția evolventelor chiar pe porțiunea de funcționare a liniei de angrenare (poziția C în fig. 5.48). Acest fenomen se numește *interferență* (subțiere).

Distanța dintre centre este

$$A = \frac{r_{02} - r_{01}}{\cos \alpha}. \tag{5.83}$$

Dacă raza cercului de bază a unei roți se mărește, raza de curbură a evolventei corespunzătoare acestui cerc de bază va crește și, la limită, atît cercul de bază cît și evolventa se transformă în drepte.

§ 5.15. Angrenarea cremalierei cu roata dinţată

Cremaliera, după a cărei schemă se execută scula de tăiat dinţi, este o placă dreaptă cu dinţi trapezoidali (fig. 5.49). Unghiul α_0 de înclinare a feţei laterale a trapezului este egal, conform standardelor sovietice, cu 20°. Partea dintelui dispusă deasupra liniei mediane *mm* sau *dreapta de modul*, se numeşte *cap*, iar porţiunea aşezată dedesubt — *picior*.

Înălţimea porţiunii drepte a profilului capului, exprimată în module, se determină prin produsul dintre modul şi *coeficientul de înălţime f*, egal cu 1 pentru un dinte normal şi cu 0,8 pentru unul scurtat. Înălţimea porţiunii rectilinii a profilului piciorului se execută de aceeaşi înălţime. Înălţimea părţilor rotunjite ale capului şi piciorului dintelui este egală cu *cm*, unde $c = 0{,}25$ pentru un dinte normal şi $c = 0{,}3$ pentru un dinte scurtat.

Mărimile pasurilor cremalierei la distanţe diferite de dreapta modulelor (liniei mediane) sînt egale, însă grosimea dintelui şi lăţimea depresiunii sînt în general diferite şi numai la nivelul dreptei modulelor (liniei mediane) aceste dimensiuni sînt egale.

Forma profilului dintelui roţii, conjugat cu profilul dat al dintelui cremalierei, depinde de poziţia lor relativă. În fig. 5.50 sînt indicate poziţiile relative posibile ale cremalierei şi roţii.

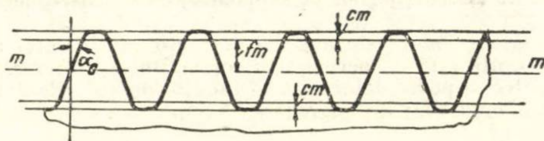


Fig. 5.49.

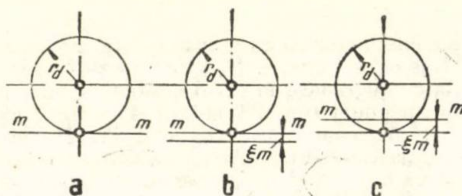


Fig. 5.50.

Deplasarea profilului iniţial al cremalierei este deplasarea dreptei modulelor (liniei mediane) faţă de tangenta la cercul de divizare al roţii (fig. 5.50). *Coeficientul de deplasare* ξ este deplasarea exprimată în module; *deplasarea absolută* χ este deplasarea în mm. Avem

$$\xi = \frac{\chi}{m}. \tag{5.84}$$

Angrenarea profilului inițial al cremalierei cu o roată pentru $\xi = 0$. În fig. 5.51 este indicat un profil inițial în forma unei drepte înclinate cu capetele rotunjite. Se cere să se determine forma profilului dintelui roții.

Pentru rezolvare folosim metoda expusă în § 5.13. Punctul *1* al profilului inițial se alege în mijlocul vîrfului acestuia. Normala în acest punct este perpendiculară pe dreapta modulelor (linia mediană) *mm*, în punctul 1_n astfel că la mișcarea profilului inițial această normală se deplasează paralel cu linia *OP* și în momentul tangenței punctelor *1* și 1_1 al profilului dat și inițial ea coincide cu linia *CP* (1_n ajunge în *P*). Pentru găsirea poziției punctului căutat 1_1 se ia pe arcul de cerc de rază *OP* o lungime $P1_2$ egală cu $P1_n$, măsurată pe dreapta modulelor (linia mediană). Din punctul l_2 astfel obținut cu o rază egală cu normala $1-1_n$ se intersectează cercul de raza *OC*; această intersecție determină poziția punctului căutat 1_1. Determinarea poziției altor puncte $2_1, 3_1, 4_1$... se face analog.

În fig. 5.51, pentru $\xi = 0$, raportul dimensiunilor profilului inițial al roții și al cremalierei sînt astfel alese încît punctul extrem al liniei de angrenare în evolventă coincide cu punctul *A*. Dincolo de punctul *A* angrenarea în evolventă este imposibilă. În cazul dat avem relația limită între dimensiunile roții și ale profilului inițial, la care este încă posibilă angrenarea în evolventă.

Numărul minim de dinți z_{min}, la care este încă posibilă angrenarea în evolventă este egal cu

$$z_{min} = \frac{2f}{\sin^2 \alpha_0}. \quad (5.85)$$

Pentru $\alpha_0 = 20°$ și $f = 1$ avem

$$z_{min} = 17. \quad (5.86)$$

Raza cercului interior este egală cu

$$R_i = m\frac{z - f - c}{2}. \quad (5.87)$$

Raza cercului exterior R_e se obține prin prelucrarea la strung și nu depinde de profilul inițial.

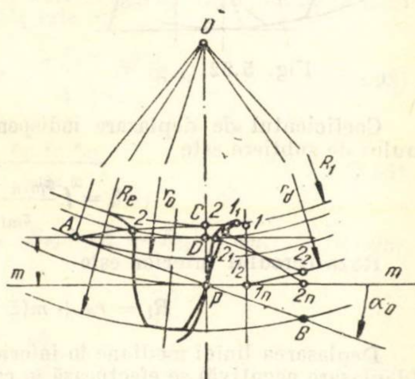


Fig. 5.51.

În fig. 5.52 este arătată o roată cu un număr mic de dinți. Traiectoria extremității porțiunii rectilinii a profilului inițial al cremalierei intersectează linia *PA* de angrenare în stînga punctului *A* (punctul *a* în fig. 5.52). Porțiunea *DD'* a părții rectilinii a profilului inițial nu participă la formarea profilului în evolventă. În acest caz porțiunea de profil care nu este evolventă, are piciorul dintelui subțire și o parte a profilului în formă de evolventă este tăiată. În ase-

Freza este o roată cu dinţi, aceştia posedînd margini tăietoare. Parametrii de bază ai frezei sînt (fig. 5.55, *a*)

$$R_{ed} = m\left(\frac{z_f}{2} + f + c\right). \tag{5.99}$$

Grosimea dintelui frezei pe cercul de divizare este

$$s_d = \frac{\pi m}{2}. \tag{5.100}$$

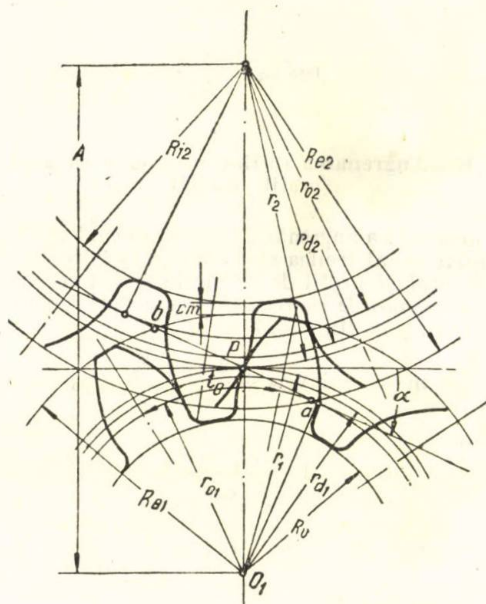


Fig. 5.54.

Numărul minim de dinţi ai roţii la tăierea ei fără deplasarea frezei (numărul z_f de dinţi ai frezei este mai mare decît numărul z de dinţi ai roţii) este

$$z_{min} = \frac{2(z_f + 2f)\sin(\alpha_{ed} - \alpha_0)}{\sin 2\alpha_0}, \tag{5.101}$$

unde

$$\alpha_{ed} = \arccos\frac{z_f \cos\alpha_0}{z_f + 2f}. \tag{5.102}$$

Pentru $\alpha_0 = 20°$ şi $f = 1$

$$z_{min} = 3{,}11\,(z_f + 2)\,\sin(\alpha_{ed} - 20°). \qquad (5.103)$$

Atunci cînd numărul de dinţi ai roţii este mai mic decît z_{min}, se execută frezarea cu deplasarea frezei. Distanţa A_m între centre la maşină la frezarea cu deplasare (fig. 5.55,*b*) este

$$A_m = A_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_m}, \qquad (5.104)$$

unde unghiul de angrenare α_m al maşinii se determină din egalitatea

$$\alpha_m = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha_{ed}}{\cos \alpha_{ed} + \dfrac{z \cos \alpha_0}{z_f + 2f}}. \qquad (5.105)$$

Grosimea s_d a dintelui pe cercul de divizare al roţii este

$$s_d = m\,[0{,}5\pi + (z_f + z)(\operatorname{inv} \alpha_e - \operatorname{inv} \alpha_0)]. \qquad (5.106)$$

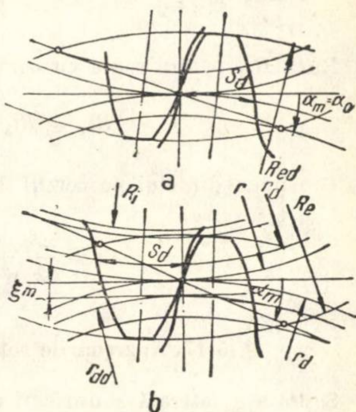


Fig. 5.55.

În fig. 5.56 este arătată angrenarea interioară a două roţi cu toţi parametrii ei fundamentali. Pentru o asemenea angrenare, unghiul de angrenare la montaj este

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{inv} \alpha_0 - \frac{2(\xi_2 - \xi_1)}{z_2 - z_1} \operatorname{tg} \alpha_0, \qquad (5.107)$$

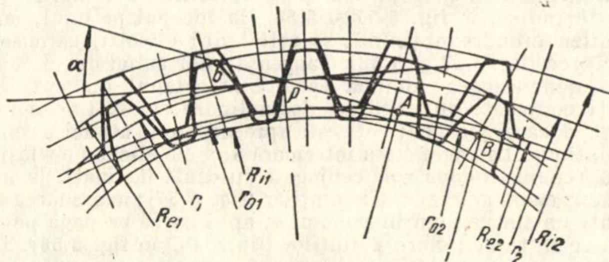


Fig. 5.56.

distanța dintre centre este

$$A = A_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}, \quad (5.108)$$

unde A_0 este distanța dintre centre pentru $\xi = 0$.

Razele R_{i_2} și R_{e_2} pentru roata cu dinți interiori sînt

$$R_{i_2} = m\left(\frac{z}{2} + f + \xi + c\right), \quad R_{e_2} = A + R_{i_1} + cm. \quad (5.109)$$

Raza R_{e_1} pentru roata cu dinți exteriori este

$$R_{e_1} = R_{i_2} - A - cm. \quad (5.110)$$

Grosimea dintelui pe cercul de divizare este

$$s_d = \frac{\pi m}{2} - 2m\,\xi\,\mathrm{tg}\,\alpha_0. \quad (5.111)$$

§ 5.17. Angrenările roților cu dinți înclinați

Suprafața laterală a dintelui unei roți cu dinți înclinați se formează ca înfășurată a dreptei AA (fig. 5.57), legată cu planul dintelui care se rostogolește pe cilindrul de bază. Suprafața laterală a dintelui se obține curbată. Această suprafață se numește *elicoid desfășurabil*. Suprafața acestui elicoid se intersectează cu orice suprafață cilindrică care are aceeași axă ca și roata, după o elice. Unghiul β_0 dintre tangenta la elicea dintelui pe cilindrul de bază și axul roții se numește *unghiul de înclinare al dintelui pe cilindrul de bază*.

Suprafețele conjugate a două roți cu dinți oblici se formează prin rostogolirea planului tangent comun la doi cilindri de bază Q_1 și Q_2 (Q_2 nu este indicat în fig. 5.57 și 5.58), la început pe unul, iar apoi pe al doilea cilindru obținîndu-se astfel doi elicoizi, care se înfășoară reciproc (fig. 5.57 și 5.58). Tangența unor astfel de elicoizi are loc după generatoarea comună așezată în planul tangent comun. Două roți conjugate au unghiuri de înclinare egale. La angrenarea exterioară dacă elicea unei roți este spre dreapta, atunci a celeilalte este spre stînga. La angrenarea interioară ambele elice au același sens.

La angrenarea a două roți conjugate cu dinți înclinați, la început intră în angrenare extremitățile dinților (fig. 5.57); angrenarea începe numai într-un singur plan în punctul a, apoi ea se propagă pe o lungime din ce în ce mai mare a dinților (linia PC în fig. 5.58). Ieșirea din angrenare se face treptat, astfel că dinții ies din angrenare cu celelalte extremități ale lor în punctul b'.

Parametrii roţii cu dinţi înclinaţi (fig. 5.59). *Pasul normal* p_n şi *modulul normal* m_n se măsoară în secţiunea normală. Pasul p_f şi modulul m_f măsurate în planul frontal (perpendicular pe axa roţii), se numesc *frontali* sau *aparenţi*. În sfîrşit, în planul axei roţii se măsoară *pasul axial* p_a şi *modulul axial* m_a. Legătura dintre parametrii de mai înainte este dată de următoarele relaţii

$$m_f = \frac{m_n}{\cos\beta}, \quad m_a = \frac{m_n}{\sin\beta}. \tag{5.112}$$

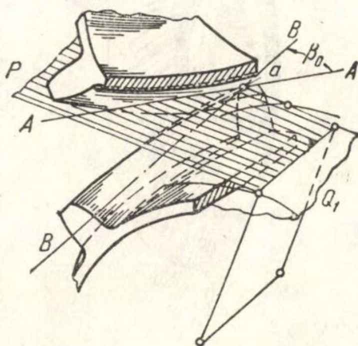


Fig. 5.57.

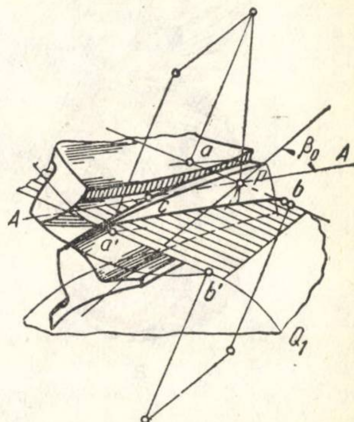


Fig. 5.58.

Raza cercului de divizare este

$$r_d = \frac{z}{2} m_f = \frac{m_n z}{2\cos\beta\, d}. \tag{5.113}$$

Înălţimile capului şi piciorului dintelui se stabilesc în funcţie de modulul din secţiunea normală.

Gradul de acoperire este egal cu

$$\varepsilon_f = \varepsilon + \frac{b\,\mathrm{tg}\,\beta}{p_f}, \tag{5.114}$$

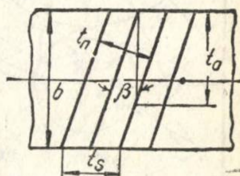


Fig. 5.59.

unde ε_f este gradul de acoperire al angrenării cu dinţi înclinaţi, iar ε este gradul de acoperire al profilurilor dinţilor în planul frontal.

§ 5.17 a. Angrenarea dinţată a lui M.L. Novikov

În angrenarea dinţată a lui M.L. Novikov, contactul geometric are loc într-un punct. În timpul mişcării roţilor punctul de contact se deplasează pe linia de angrenare, care este paralelă cu axele roţilor. Dinţii roţilor de transmisie au forma unui elicoid cu profilurile laterale din planurile perpendiculare pe axele roţilor, în forma unor arce de cerc.

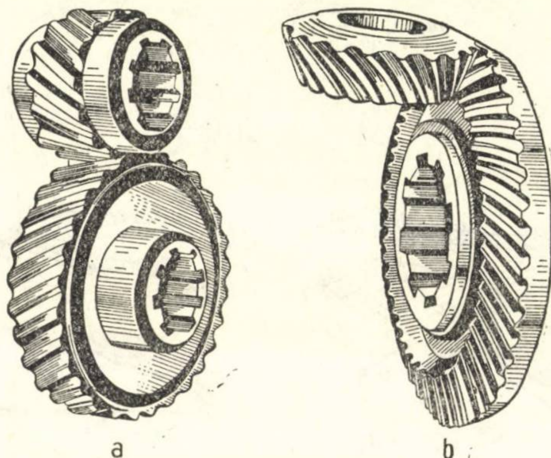


Fig. 5.60.

Angrenarea se poate efectua la roţi ale căror axe sînt paralele, concurente sau încrucişate (neparalele şi neconcurente). În fig. 5.60, *a* este indicat modul general de angrenare a roţilor cu axe paralele, iar în fig. 5.60, *b*—cu axele roţilor curente.

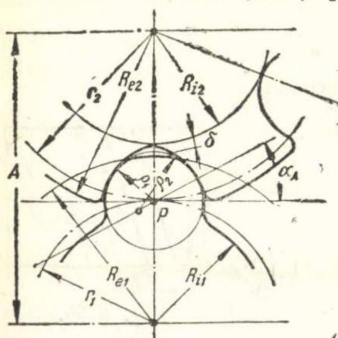


Fig. 5.61.

Razele r_1 şi r_2 ale cercurilor de rulare ale roţilor (fig. 5.61) se calculează cu (5.77).

Dinţii sînt convecşi pe o roată şi concavi pe cealaltă. Unul din parametrii de bază ai angrenării este mărimea deplasării liniei de angrenare faţă de axa instantanee de rotaţie relativă P. În funcţie de mărimea puterii transmise trebuie luat

$$l = (0{,}05 \div 0{,}20)\, r_1. \qquad (5.115)$$

Razele profilurilor de lucru sînt

$$\rho_1 = l;\ \rho_2 = l(1 + k_2), \qquad (k_2 = 0{,}03 \div 0{,}10). \qquad (5.116)$$

Raza cercului exterior al roţii cu dinţi convecşi este

$$R_{e_1} = r_1 + (1 - k_e)l; \quad (k_e = 0,1 \div 0,2).$$

Arcele profilelor de lucru ale dinţilor convecşi se duc de la cercul de rulare pînă la cercul exterior. Centrul unei jumătăţi a profilului de lucru al dintelui concav se aşază pe o parte a unghiului α de presiune, la o distanţă de punctul P egală cu

$$\rho_2 - \rho_1 = (0,03 \div 0,10)\, \rho_1,$$

unde ρ_2 este raza profilului de lucru al dintelui concav. A doua jumătate a profilului de lucru al dintelui concav este simetrică cu prima.

Unghiul de presiune trebuie luat egal cu $\alpha_p = 25 \div 30°$.

Raza cercului exterior al roţii cu dinţi concavi este

$$R_{e_2} = r_2 + h, \quad h = (0,1 \div 0,2)\, l.$$

Raza cercului interior al roţii cu dinţi convecşi este

$$R_{i_1} = r_1 - h - \delta,$$

unde δ este rostul radial, aproximativ egal cu $\delta = lk_e$.

Raza cercului interior al roţii cu dinţi concavi este

$$R_{i_2} = A - R_e - \delta.$$

În teoria angrenării a lui Novikov se introduce noţiunea de *acoperire auxiliară*, al cărei grad de acoperire se ia egal cu

$$\varepsilon A = b/p_a \geqslant 1,2,$$

unde b este lărgimea înconjurării, iar p_a este pasul axial. Pasul elicei dintelui se recomandă a se lua în limitele $\beta = 10° \div 30°$.

Dinţii roţilor Novikov au o însemnată rezistenţă şi stabilitate la uzură. Încărcarea pe care o suportă este de două-trei ori mai mare decît cea pe care o suportă dinţii roţilor cu angrenare în evolventă de dimensiuni egale cu roţile lui Novikov. Datorită acestui fapt mecanismele cu roţi Novikov încep să fie larg utilizate în practică.

§ 5.18. Angrenarea dinţată conică

Angrenarea conică se utilizează în cazul cînd axele roţilor sînt concurente. Din punct de vedere teoretic, angrenarea conică este o angrenare sferică, adică profilurile dinţilor ei trebuie să fie dispuse pe o suprafaţă sferică, de rază OA (fig. 5.62). Conurile primitive ale unei astfel de angrenări taie segmentele sferice, ale căror baze sînt tangente în punctul A. Dacă măsurătorile se fac numai pe această suprafaţă sferică, bazele segmentelor sferice trebuie determinate prin razele sferice r_1' şi r_2'.

Astfel de baze se numesc *cercuri primitive*, care sînt totodată bazele conurilor primitive, al căror vîrf comun este așezat în punctul O.

Pentru construirea profilurilor sferice ale dinților trebuie dus cercul OA sub unghiul sferic de 90° față de arcul $O_1' O_2'$, se duce pe sfera de rază OA arcul AB care face cu tangenta la cercul OA unghiul sferic de angrenare α. Coborînd din punctele O_1' și O_2' perpendiculare sferice pe acest din urmă arc (în fig. 5.62 este reprezentată numai o

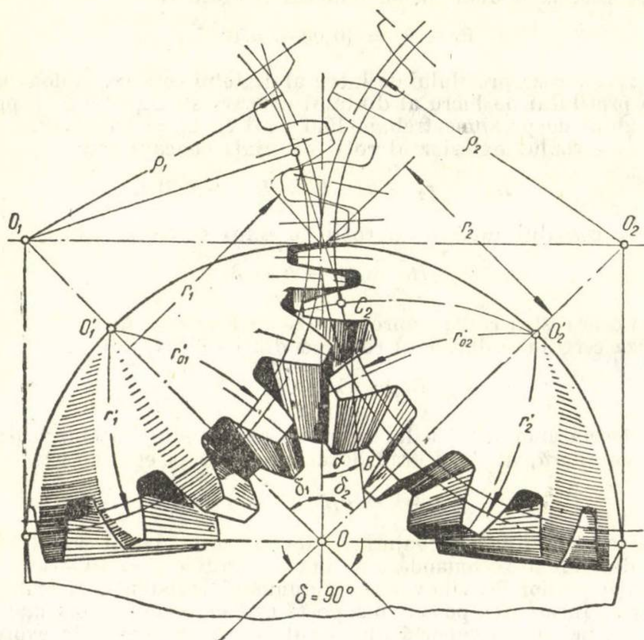


Fig. 5.62.

perpendiculară $O_2' C_2$), se descriu apoi cercurile de bază, ale căror raze sferice sînt egale cu r_{O1}' și r_{O2}'. Pe aceste cercuri trebuie rostogolit fără alunecare arcul AB pentru a obține profilurile dinților, care au forma de evolvente sferice. Dacă toate punctele profilurilor construite se unesc cu centrul O, vor fi obținuți dinți cu secțiuni care se micșorează treptat spre vîrful O. În practică se recomandă executarea lungimii dintelui egală aproximativ cu 1/3 din lungimea generatoarei OA.

Pentru calculul la rezistență al dinților, roțile conice se înlocuiesc cu roți convenționale cilindrice. Profilurile dinților fiecărei roți se așază pe zone sferice (fig. 5.62). Zonele sferice se înlocuiesc cu zone conice tangente la ele, cu vîrfurile în O_1 și O_2. Aceste conuri numite

complementare, se desfăşoară pe un plan, pe care se construiesc apoi profilurile dinţilor. Razele desfăşurărilor conurilor complementare se pot determina cu formulele

$$\rho_1 = \frac{r_1}{\cos \delta_1}, \quad \rho_2 = \frac{r_2}{\cos \delta_2}. \tag{5.117}$$

§ 5.19. Angrenajul cu şurub melc şi roată melcată

Acest angrenaj se foloseşte în majoritatea cazurilor pentru roţi cu axele încrucişate sub unghiuri de 90° şi la mari rapoarte de transmitere. În acest caz unul din elemente are forma unei elice numită *melc* (şurub melc), iar al doilea are forma unei roţi cu dinţi înclinaţi, numită *roată melcată* (fig. 5.63). Şurubul melc este un cilindru cu filet trapezoidal. Legătura între parametrii de bază ai şurubului melc — diametrul d_1 al cilindrului primitiv, pasul s al filetului şi unghiul β de înclinare a filetului pe acelaşi cilindru — se stabileşte cu relaţia următoare:

$$s = \pi d_1 \operatorname{tg} \beta. \tag{5.118}$$

Legătura între pasul elicei şi pasul filetului cu mai multe începuturi este

$$s = kp, \tag{5.119}$$

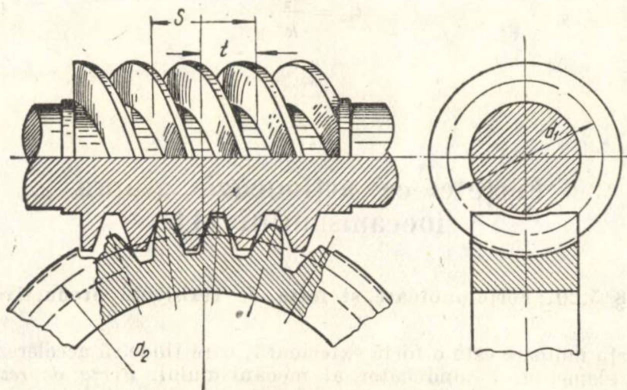


Fig. 5.63.

unde k este numărul de începuturi al elicei, iar p este pasul elicei cu mai multe începuturi.

Suprafaţa laterală a profilului şurubului melc (elicei) se descrie sau pe o suprafaţă *Arhimede*, sau pe una în *evolventă elicoidală*. Suprafaţa elicoidală a lui Arhimede se obţine dacă dreptei care o generează

i se pune condiția ca în orice poziție să intersecteze axa cilindrului. În acest caz intersecția planului perpendicular pe axa cilindrului dă spirala lui Arhimede. Dacă dreapta indicată va fi tot timpul tangentă la o elice, se formează o suprafață evolventă elicoidală. Intersecția unei astfel de suprafețe cu un plan perpendicular pe axa cilindrului dă evolventa unui cerc.

Pentru filetul unui șurub melc sînt trei suprafețe fundamentale cilindrice.

1) Suprafața modulului standardizat, numită suprafață *divizoare*. Pentru modulul dat pasul filetului este $p = \pi m$, iar diametrul cilindrului de divizare este

$$d_{d_1} = \frac{kt}{\pi \operatorname{tg} \beta} = \frac{km}{\operatorname{tg} \beta} = qm \quad (q = 8 \div 13). \tag{5.120}$$

2) diametrul cilindrului exterior și

3) diametrul cilindrului interior al șurubului melc, care se determină analog cu cilindrii respectivi ai unei roți cu dinți drepți.

Diametrul cercului de divizare al roții melcate este

$$d_{d_2} = z_2 m (z_2 \text{ — numărul dinților roții}). \tag{5.121}$$

Înălțimea dintelui roții melcate se execută la fel ca și a unei roți dințate obișnuite. Raportul de transmitere al angrenajului șurub melc — roată melcată este

$$i_{12} = \frac{z_2}{k}. \tag{5.122}$$

5.7

Forțele ce acționează asupra mecanismului [1]

§ 5.20. Forțe motoare și forțe de rezistență productivă

Forța motoare este o forță exterioară, care tinde să accelereze mișcarea elementului conducător al mecanismului. *Forța de rezistență* este o forță, care tinde să încetinească mișcarea elementului conducător. *Forța de rezistență productivă (forță de rezistență utilă)* este o forță exterioară, care apare la executarea procesului tehnologic și pentru a cărei învingere se cheltuiește un lucru mecanic necesar pentru producerea de fabricate, pentru deplasarea corpurilor sau pentru schimbarea stării unor corpuri lichide sau gazoase.

Motorul este o mașină în care o formă sau alta a energiei se transformă în energie mecanică, aceasta efectuînd lucrul mecanic necesar.

Mașina de lucru sau unealta este o mașină, cu ajutorul căreia se produce schimbarea proprietăților, a stării, a formei și a poziției materialului de prelucrat sau a fabricatului. *Mecanismul executant* este o instalație destinată producerii numai a mișcărilor utile (aparate de măsură și control, aparate pentru deplasarea unor organe dintr-o poziție în alta, instalații de calcul și de rezolvare, ceasornice etc.).

Caracteristica mecanică a motorului sau a mașinii de lucru este funcția care leagă parametrul de forță de unul sau de mai mulți parametri cinematici (spațiu, viteză, accelerație, timp).

Caracteristica mecanică la mecanismul cu greutăți este forța invariabilă, care acționează; la mecanismul cu arc — legătura liniar crescătoare între forță și deplasarea acesteia. Caracteristicile mecanice ale electromagneților sînt dependențe mai complicate ale forței de spațiu sau ale momentului unui cuplu de forțe de unghiul de rotire.

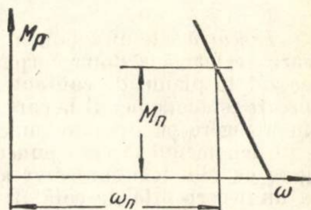


Fig. 5.64.

Fig. 5.64. Caracteristica mecanică a electromotorului de curent continuu cu excitația în paralel (M_n este cuplul nominal la viteza unghiulară nominală ω_n).

Fig. 5.65. Caracteristica mecanică a electromotorului de curent continuu cu excitație în serie.

Fig. 5.66. Caracteristica mecanică a motorului asincron de curent trifazic (ω_s este viteza unghiulară sincronă sau viteza unghiulară a mersului ideal în gol, M_n este cuplul nominal la viteza unghiulară nominală ω_n, M_{max} este cuplul maxim sau de răsturnare, M_p este cuplul inițial la pornire).

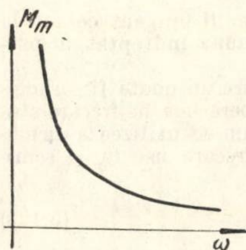


Fig. 5.65.

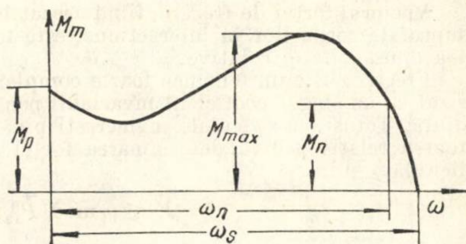


Fig. 5.66.

Din punct de vedere al proprietăților mecanice, mașinile se împart în cinci grupe: 1) forțele utile sînt constante (mașini de ridicat, laminoare, strunguri, mașini de fabricat hîrtie și altele), 2) rezistențele depind de viteză (ventilatoare, aspiratoare de fum, pompe centrifuge, centrifuge, elice și altele), 3) forțele de rezistență utilă depind de

parcurs (compresoare cu piston şi pompe, foarfeci pentru tăierea metalelor, vagoane basculante, ascensoare de mină, benzi rulante, prese cu manivele şi altele), 4) forţele de rezistenţă utilă depind de parcurs şi viteze (maşini de transportat rapide), 5) forţele de rezistenţă depind de timp (spărgătoare de pietre, mori sferice, maşini de frămîntat cocă şi altele).

§ 5.21. Frecarea

Frecarea este un fenomen, la care apare forţa de rezistenţă la deplasarea relativă a două corpuri în contact (vectorul acestei forţe este aşezat în planul de contact al corpurilor respective). ***Frecarea de alunecare*** este fenomenul la care aceleaşi puncte ale unui corp trec succesiv în atingere cu diferite puncte ale altui corp. ***Frecarea de rostogolire*** este fenomenul la care punctele succesive ale unui corp intră în atingere cu punctele succesive ale altui corp [axa instantanee de rotaţie a unui corp faţă de celălalt trece prin punctul (punctele) de contact al unuia din corpurile indicate]. ***Frecarea de pivot*** este fenomenul la care punctele aşezate în planul de tangenţă a două corpuri descriu cercuri concentrice cu centrul aşezat pe axa de pivotare.

Frecarea curată apare pe suprafeţele curăţate de pojghiţe adsorbite sau de compuşi chimici. ***Frecarea uscată*** apare în absenţa ungerii şi a impurităţilor între suprafeţe. ***Frecarea limită*** se obţine atunci cînd suprafeţele sînt despărţite printr-un strat de lubrifiant de grosime neînsemnată (nu mai mare de 0,1 microni). ***Frecarea lichidă*** este un fenomen, la care suprafeţele sînt complet separate printr-un strat de lubrifiant. ***Frecarea semiuscată*** este o frecare mixtă, în acelaşi timp uscată şi limită. ***Frecarea semilichidă*** este în acelaşi timp lichidă şi limită sau lichidă şi uscată.

Vectorul forţei de frecare, fiind aşezat în planul tangent comun la suprafaţa corpurilor în interacţiune, este totdeauna îndreptat în partea opusă vitezei relative.

Frecarea este un fenomen foarte complex, care nu poate fi caracterizat cu un singur coeficient invariabil pentru perechea în frecare studiată. Totuşi, în calculele inginereşti pînă acum se utilizează următoarea relaţie pentru determinarea forţei de frecare uscată şi semilichidă

$$F \leqslant \mu \bmod \vec{P}_{12}^{n}, \tag{5.123}$$

unde F este forţa de frecare, $\vec{P}_{12}^{n}$ forţa normală care apasă elementul 1 pe elementul 2, μ *coeficientul de frecare* (fig. 5.67).

Valorile coeficientului μ sînt nu numai foarte deosebite pentru diferite combinaţii de materiale, care se freacă, ci ele depind într-o măsură însemnată de starea suprafeţelor, care se freacă (gradul de rugozitate, suprafeţe curate sau unse, durata contactului fix prealabil şi altele). Pentru a deplasa un corp fix din loc este necesară o forţă mai mare decît cea necesară pentru menţinerea mişcării rectilinii uniforme.

Unghiul de frecare este unghiul φ de înclinare a rezultantei forţelor de reacţiune faţă de normală (fig. 5.67). *Conul de frecare* este locul

geometric al poziţiilor posibile ale vectorului-rezultantei forţelor de reacţiune.

Legătura dintre φ şi μ este

$$\operatorname{tg} \varphi = \mu. \tag{5.124}$$

Dacă corpul *1* se găseşte sub acţiunea a cîtorva forţe, care se reduc la o rezultantă P_{12} (fig. 5.68), atunci pentru $\alpha > \varphi$ se observă o

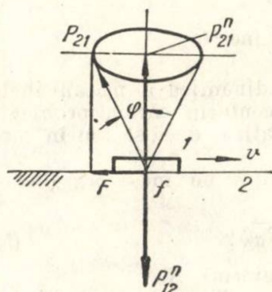


Fig. 5.67.

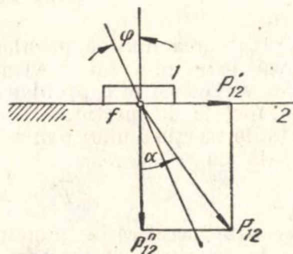


Fig. 5.68.

mişcare accelerată, pentru $\alpha = \varphi$ — o mişcare uniformă, iar pentru $\alpha < \varphi$ — o mişcare încetinită. În ultimul caz suprafaţa se numeşte de *autofrînare*.

La frecarea lichidă suprafeţele în frecare sînt complet separate printr-un strat de lubrifiant. În acest caz se obţine fenomenul de alunecare a unei suprafeţe de lichid faţă de cealaltă. Condiţia necesară a frecării lichide este: aderenţa lichidului de suprafeţele în frecare trebuie să fie mai mare decît aderenţa straturilor de lichid între ele. Pentru metale se utilizează ca lubrifiant uleiurile vegetale şi animale. *Coeficientul de frecare lichidă* este în general o funcţie de viteză relativă de alunecare, de presiunea specifică pe suprafeţele în frecare şi *de viscozitatea absolută* a lichidului.

Unitatea absolută de viscozitate, poise-ul (η[kgf·s/m²]), este viscozitatea la care, pentru deplasarea suprafeţei de 1 m² cu viteza de 1 m/s faţă de o altă suprafaţă separată de prima printr-un strat de lichid este necesară o forţă egală cu 1 kgf.

Condiţiile necesare pentru înlocuirea frecării semilichide cu una lichidă sînt: a) lichidul, care ocupă spaţiul dintre suprafeţele care alunecă, trebuie să se păstreze în acest spaţiu; b) presiunea interioară în lubrifiant trebuie să echilibreze sarcina exterioară (de natura unei forţe), care apasă una pe alta suprafeţele care alunecă; c) lichidul trebuie să separe complet suprafeţele care alunecă; d) grosimea stratului de lichid între suprafeţele care alunecă trebuie să fie mai mare decît suma înălţimilor părţilor celor mai ieşite în afară ale suprafeţelor rugoase care alunecă.

Forța de frecare la rostogolire se determină cu formula

$$F_K = \frac{k}{R} P_n, \tag{5.125}$$

unde k (cm) este *brațul frecării de rostogolire*, R raza corpului rotund care se rostogolește, P_n forța normală ce apasă corpul care se rostogolește pe suprafață.

§ 5.22. Forțe de inerție

La rezolvarea multor probleme de dinamică a mecanismelor se utilizează principiul lui d'Alembert, conform căruia problema de dinamică se reduce la o problemă de statică, dacă se iau în considerație și forțele de inerție.

Forța de inerție a unui punct material X de masă m_X (kgf·s²/m) este egală cu

$$\vec{P}_{iX} = -m_X \vec{a}_X, \tag{5.126}$$

unde $\vec{a}_X$ este accelerația punctului material X.

Forțele de inerție în mișcarea plan-paralelă a unui element, care are planul de simetrie paralel mișcării, se reduc la un vector rezultant $\vec{P}_i$ și la un moment rezultant $\vec{M}_i$ egale cu

$$\vec{P}_i = -m\vec{a}_s, \quad M_i = -\varepsilon J_s, \tag{5.127}$$

unde m este masa elementului, $\vec{a}_s$ accelerația centrului său de greutate, ε accelerația unghiulară a elementului, J_s (kg·m·s²) momentul de inerție al elementului față de axa care trece prin centrul lui de greutate.

În mișcarea de translație a elementului $\varepsilon = 0$, de aceea și $M_i = 0$.

În mișcarea de rotație (fig. 5.69) avem

$$\vec{P}_i = \vec{P}_i^n + \vec{P}_i^t = -m\vec{a}_s^n - m\vec{a}_s^t, \tag{5.128}$$

unde $\vec{P}_i^n$ este forța normală (centrifugă) de inerție; $\vec{P}_i^t$ forța tangențială de inerție; $\vec{a}_s^n$ și $\vec{a}_s^t$ sînt componentele normală și tangențială a accelerației $\vec{a}_s$ a centrului de greutate al elementului.

Momentul rezultant se determină în acest caz cu a doua relație (5.127). În cazul reducerii la o singură forță (5.128), $\vec{P}_i$ trece prin centrul de oscilație K, așezat la o distanță de centrul de rotație dată de

$$l_{OK} = l_{OS} + \frac{J_s}{m l_{OS}}. \tag{5.129}$$

Cînd elementul nu posedă un plan de simetrie, paralel mișcării, vectorul rezultant și momentul rezultant al forțelor de inerție ale punctelor materiale pot fi de asemenea determinate, însă pentru aceasta

trebuie date mărimile momentelor centrifugale de inerţie ale maselor elementului.

Dacă forţele de inerţie ale punctelor materiale ale elementului sînt reduse la punctul O (fig. 5.70), avem vectorul rezultant

$$\vec{P}_i = -m\vec{a}_s, \tag{5.130}$$

momentul rezultant

$$\vec{M}_i = \vec{i}(-\omega^2 J_{yz} + \varepsilon J_{xz}) + \vec{j}(\omega^2 J_{xz} + \varepsilon J_{yz}) - \vec{k}\varepsilon J_z, \tag{5.131}$$

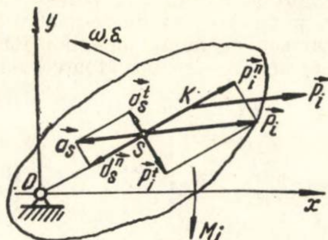


Fig. 5.69.

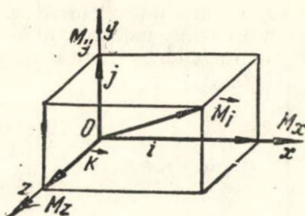


Fig. 5.70.

unde J_{xz} şi J_{yz} sînt momentele centrifugale de inerţie ale elementului în raport cu axele Ox, Oz şi Oy, Oz, iar J_z momentul de inerţie faţă de axa Oz.

Dacă determinarea momentelor centrifugale de inerţie ale elementului este dificilă, atunci pentru evaluarea aproximativă a forţelor de inerţie se poate împărţi în mod convenţional elementul în părţi separate, care posedă planuri de simetrie, iar pentru fiecare din ele trebuie determinat vectorul rezultant şi momentul rezultant, după care se pot apoi reduce la o singură forţă şi la un singur cuplu.

5.8

Studiul mişcării unui agregat de maşină [1]

§ 5.23. Reducerea forţelor şi maselor

La studiul mişcării unui agregat este necesară rezolvarea următoarelor probleme de bază: 1) determinarea legilor de mişcare a elementelor mecanismului după legile date de variaţie a forţelor exterioare aplicate mecanismului; 2) determinarea mărimii momentului de inerţie al volantului destinat limitării oscilaţiilor periodice ale vitezei

mişcării staţionare a mecanismului; 3) determinarea parametrilor de bază ai schemei de reglare a oscilaţiilor neperiodice ale vitezelor elementelor, care apar ca rezultat al condiţiilor variabile de lucru ale agregatului.

Toate problemele indicate se rezolvă prin metoda reducerii tuturor forţelor aplicate mecanismului şi a tuturor maselor elementelor la un singur element — la elementul de reducere. Prin aceasta problema dinamicii unui sistem complex se înlocuieşte cu problema mişcării unui singur element al său.

Forţa redusă este o forţă convenţională, aplicată unui punct ales al elementului numit ***punct de reducere*** şi căreia i se pune condiţia ca lucrul ei mecanic elementar sau puterea ei să fie respectiv egale cu suma lucrului mecanic elementar sau cu suma puterilor forţelor date. Mărimea forţei reduse se poate deduce din următoarea relaţie:

$$P_{red} - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^{i=n} M_i \omega_i}{v_{red} \cos \alpha_{red}} = 0; \qquad (5.132)$$

unde $i = 1, 2, \ldots, n$ sînt numerele elementelor mecanismului, α_i este unghiul între vectorii forţei $\vec{P_i}$ şi al vitezei $\vec{v_i}$ a punctului de aplicare a forţei $\vec{P_i}$, M_i şi ω_i sînt momentul cuplului de forţe aplicate elementului i şi viteza unghiulară a elementului, α_r este unghiul între vectorul forţei reduse $\vec{P}_{red}$ şi al vitezei $\vec{v}_r$ a punctului de reducere în care este aplicată forţa $\vec{P}_{red}$. Semnele termenilor primei sume sînt determinate de semnele cosinusurilor, iar semnele termenilor celei de a doua sume se obţin pozitive, dacă M_i şi ω_i sînt de acelaşi sens, dacă sînt de sensuri contrare, semnele trebuie luate negative.

Dacă forţele se reduc la un element în rotaţie (manivelă) atunci pentru determinarea momentului M_{red} al forţei reduse se poate utiliza următoarea relaţie:

$$M_{red} - \frac{P_{red} v_{red} \cos \alpha_{red}}{\omega_{red}} = 0, \qquad (5.133)$$

unde ω_{red} este viteza unghiulară a elementului de reducere.

Forţa de echilibrare $\vec{P}_e$ este forţa aplicată elementului de reducere şi care învinge rezistenţa forţelor aplicate mecanismului. Lucrul mecanic elementar al forţei de echilibrare este egal cu suma lucrului mecanic elementar al forţelor aplicate mecanismului, $\vec{P}_e = -\vec{P}_{red}$.

Momentul de echilibrare M_e este momentul forţei de echilibrare.

Teorema lui Jukovski. Dacă toate forţele care sînt aplicate mecanismului, inclusiv forţele de inerţie şi cea de echilibrare, se mută paralel cu ele însăşi în punctele omoloage ale planului vitezelor rotit

cu 90° suma momentelor tuturor acestor forţe astfel plasate faţă de polul planului va fi egală cu zero, adică

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i h_i = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n), \qquad (5.134)$$

unde: h_i este lungimea perpendicularei coborîte din polul planului pe linia de acţiune a forţei $\vec{P}_i$; planul rotit al vitezelor este figura planului obişnuit al vitezelor, rotită în orice sens cu 90°. Din ecuaţia (5.134), în care intră şi forţa de echilibrare necunoscută, se poate determina mărimea acesteia.

Masa redusă m_{red} este masa convenţională, concentrată în elementul de reducere, a cărei energie cinetică este egală cu suma energiilor cinetice ale maselor elementelor mecanismului:

$$m_{red} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i v_{Si}^2 + \sum_{i=1}^{i=n} J_i \omega_i^2}{v_{red}^2} \quad (i = 1, 2, ... n) \qquad (5.135)$$

În cazul cînd elementul de reducere are mişcare de rotaţie, momentul de inerţie al masei sale este egal cu:

$$J_{red} = \frac{m_{red} v_{red}^2}{\omega_{red}^2}. \qquad (5.136)$$

§ 5.24. Ecuaţia diferenţială de mişcare a elementului de reducere

Ecuaţia generală diferenţială de mişcare a elementului de reducere este

$$M_m \, d\varphi + M_r \, d\varphi = dE \quad \text{sau} \quad P_m \, ds + P_r \, ds = dE, \qquad (5.137)$$

unde M_m şi P_m sînt momentul motor redus, respectiv forţa motoare redusă, φ şi s unghiul de rotaţie al elementului, respectiv drumul punctului de reducere, M_r şi P_r momentul rezistent redus, respectiv forţa rezistentă redusă, E energia cinetică a momentelor de inerţie reduse şi a maselor reduse. Toate mărimile care intră în (5.137) sînt algebrice şi ele pot fi atît pozitive cît şi negative.

Se disting *mişcarea staţionară* sau permanentă şi *mişcarea nestaţionară* sau nepermanentă a agregatului maşinii. În cazul mişcării staţionare, parametrii cinematici şi cei dinamici ai agregatului variază după legi periodice. Tot după o lege periodică variază şi viteza elementului de reducere. Perioada de variaţie a parametrilor cinematici şi dinamici se numeşte deseori ciclu.

Deoarece în timpul mişcării permanente parametrii cinematici cît şi cei dinamici de la sfîrşitul ciclului sînt egali cu cei de la începutul

ciclului, atunci în acest interval de timp variaţia energiei cinetice este egală cu zero şi de aceea

$$\int_{2\pi k}^{2\pi m} M_m \, d\varphi + \int_{2\pi k}^{2\pi m} M_c \, d\varphi = 0, \tag{5.138}$$

unde k şi m sînt numere întregi, iar $2\pi\,(m - k)$ determină mărimea unghiului de rotaţie a elementului de reducere, corespunzător unui ciclu.

Dacă elementului de reducere i se aplică, în afara forţelor de rezistenţă utilă şi forţe de frecare, atunci

$$M_r = M_{ru} + M_{rf}, \tag{5.139}$$

unde M_{ru} este momentul redus al forţelor de rezistenţă utilă, iar M_{rf} este momentul redus al forţelor de frecare.

Conform celor de mai înainte se poate scrie

$$W_m + W_{ru} + W_{rf} = 0, \tag{5.140}$$

unde

$$W_m = \int_{2\pi k}^{2\pi m} M_m \, d\varphi; \; W_{ru} = \int_{2\pi k}^{2\pi m} M_{ru} \, d\varphi; \; W_{rf} = \int_{2\pi k}^{2\pi m} M_{rf} \, d\varphi. \tag{5.141}$$

Randamentul agregatului maşinii şi *coeficientul de pierderi* sînt

$$\eta = \frac{W_{ru}}{W_m}, \; \psi = \frac{W_{rf}}{W_m} = 1 - \eta. \tag{5.142}$$

Regimul nestaţionar de lucru al unui agregat se caracterizează prin variaţia neperiodică a parametrilor cinematici şi dinamici.

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale (5.137). Problemele de bază în legătură cu mişcarea unui agregat conform cu condiţiile date sînt:

1) $M_m = M_m(\varphi), \; M_r = M_r(\varphi), \; J_{red} = J_{red}(\varphi),$

2) $M_m = M_m(\omega), \; M_r = M_r(\varphi), \; J_{red} = J_{red}(\varphi),$

3) $M_m = M_m(\omega), \; M_r = M_r(\omega), \; J_r = \text{const},$

4) $M_m = M_m(\omega), \; M_r = M_r(t), \; J_{red} = \text{const}.$

Conform cu datele problemei, la rezolvare se cere determinarea legilor de variaţie a vitezei unghiulare (*caracteristica de viteze*) a elementului de reducere în funcţie sau de unghiul ei de rotaţie, sau în funcţie de timp şi, afară de aceasta, este necesar de asemenea să se determine *caracteristica de încărcare* a motorului $[M_m = M_m(\varphi)$ sau $M_m = M_m(t)]$. În majoritatea cazurilor datele iniţiale sînt puse la dispoziţie sub formă de diagrame.

Problemele 1 şi 2 se pot rezolva pe baza condiţiilor iniţiale date în următoarea ordine generală. În intervalul dintre φ_1 şi φ_k se admite

o creştere $\Delta E = E_k - E_i$ a energiei cinetice. Pe baza relaţiei (5.137) rezultă

$$\Delta E = E_k - E_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} (M_m + M_r)\,d\varphi. \tag{5.143}$$

Pentru ω_k în poziţia k avem

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2E_k}{I_{red}(\varphi_k)}}. \tag{5.144}$$

Rezolvînd problema propusă, se poate obţine la sfîrşit funcţia $\omega = \omega(\varphi)$. Dacă funcţia iniţială a momentului a fost dată sub forma $M_m = M_m(\omega)$, se poate acum determina legea variaţiei sale în funcţie de φ.

În cazul cînd se cere obţinerea funcţiei $\omega = \omega(t)$ trebuie utilizată ecuaţia

$$t_k - t_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} \frac{1}{\omega}\,d\varphi. \tag{5.145}$$

Pentru rezolvarea acestei ecuaţii este necesară obţinerea în prealabil a relaţiei $\frac{1}{\omega} = f(\varphi)$ din $\omega = \omega(\varphi)$. Rezolvînd ecuaţia (5.145), obţinem $\varphi = \varphi(t)$ şi apoi, avînd $\omega = \omega(\varphi)$, se determină şi $\omega = \omega(t)$.

Determinarea lui ΔE cu ajutorul egalităţii (5.143). Se reprezintă (5.143) în următoarea formă:

$$\Delta E = E_k - E_i = (M_{m_{med}} + M_{r_{med}})(\varphi_k - \varphi_i) = \\ = M_{m_{med}}\,\Delta\varphi + M_{r_{med}}\,\Delta\varphi. \tag{5.146}$$

Dacă se dă $M_m = M_m(\varphi)$, $M_r = M_r(\varphi)$ şi $I_{red} = I_{red}(\varphi)$, atunci în intervalul dintre φ_1 şi φ_k se pot determina $M_{m\,med}$ şi $M_{r\,med}$ din diagramele date (fig. 5.71), apoi din (5.146) se determină mărimea E_k şi mai departe ω_k.

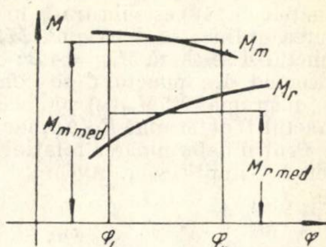


Fig. 5.71.

Dacă se dă $M_m = M_m(\omega)$, $M_r = M_r(\varphi)$ şi $I_{red} = I_{red}(\varphi)$, atunci determinarea lui $M_{m\,med}$ în intervalul dintre φ_i şi φ_k se face admiţînd unele ipoteze simplificatoare, după cum urmează:

A. Dacă în intervalul dintre φ_i şi φ_k se presupune că $M_{m\,med} = M_m(\omega_i)$, $M_{r\,med} = M_r(\varphi_i)$, E_k poate fi calculat din (5.146). Metoda propusă dă rezultate cu atît mai precise, cu cît intervalul dintre φ_i şi φ_k este mai mic.

B. Se consideră că în intervalul dintre φ_i şi φ_k, M_m variază în funcţie de φ după o lege liniară: $M_m = M_{mi} + c\varphi$, unde c este un coeficient unghiular. În acest caz pentru $M_{m\,med}$ avem

$$M_{m\,med} = \frac{M_{mk} + M_{mi}}{2} = \frac{M_{mi} + \Delta M_m + M_{mi}}{2} = M_{mi} + \frac{\Delta M_m}{2}, \tag{5.147}$$

unde M este creşterea totală a momentului motor în intervalul de la φ_i la φ_k.

Acum egalitatea (5.146) poate fi pusă sub următoarea formă

$$\frac{E_k}{\Delta\varphi} = \left(\frac{E_i}{\Delta\varphi} + M_{mi} + M_{r\,med}\right) + \frac{\Delta M_m}{2} \tag{5.148}$$

În egalitatea scrisă, partea stîngă este funcţia $\frac{E_k}{\Delta\varphi} = \frac{I_k\omega^2}{2\Delta\varphi} = f(\omega)$; în partea dreaptă expresia din paranteze este o mărime constantă, iar ultimul termen — o funcţie de ω dată de relaţia $0{,}5M_m = f_1(\omega)$.

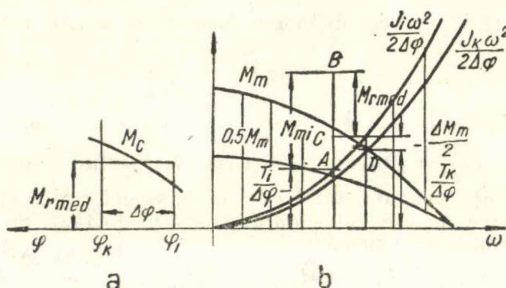


Fig. 5.72.

Prin urmare, am obţinut o ecuaţie în care variabilele E_k şi ΔM_m sînt funcţii (diferite) ale aceluiaşi parametru ω. Rezolvarea grafică a ecuaţiei (5.148) este ilustrată în fig. 5.72. Construcţia se face în următoarea ordine: se determină $M_{r\,med}$ (fig. 5.72, *a*), apoi $E_k/\Delta\varphi$; de la punctul A se aşază $M_{mi} = AB$; de la punctul B se aşază $M_{r\,med} = BC$. Începînd din punctul C se construieşte curba echidistantă CD, faţă de diagrama $0{,}5M_m(\omega)$ pînă la intersecţia ei cu diagrama $E_k/\Delta\varphi$. Punctul D determină $E_k/\Delta\varphi$, iar ω_k se stabileşte din diagrama fig. 5.72.

Pentru determinarea relaţiei $\omega = \omega(t)$ se poate utiliza următoarea metodă simplificată. Avem

$$\omega_{ik} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_k - \varphi_i}{t_k - t_i},$$

unde ω_{ik} este valoarea medie a lui ω în intervalul dintre φ_i şi φ_k.

Obţinem

$$t_k = t_i + \frac{\varphi_k - \varphi_i}{ik}. \tag{5.149}$$

Determinînd intervalele de timp pentru toată porţiunea de variaţie a unghiului φ cercetată se poate construi diagrama $\omega = \omega(t)$.

Pentru rezolvarea problemelor 3 şi 4, utilizăm ecuaţia obţinută din (5.137)

$$M_m + M_r = I_{red}\frac{d\omega}{dt}. \tag{5.150}$$

Se dă $M_m = M_m(\omega)$, $M_{u_2} = M_{u_2}(\omega)$ şi J_{red} = const. Avem următoarea soluţie:

$$t_k - t_i = I_{red}\int_{\omega_i}^{\omega_k}\frac{d\omega}{M_m(\omega)+M_r(\omega)}. \tag{5.151}$$

Se dau $M_m = M_m(\omega)$, $M_r = M_r(t)$, I_{red} = const. Problema se rezolvă analog cu cea examinată la punctul B. În cazul dat, în locul lui (5.148) avem

$$\frac{I_{red}\omega_k}{\Delta t} = \left(\frac{I_{red}\,\omega_i}{\Delta t} + M_{mi} + M_{r\,med}\right) + 0{,}5\Delta M_m, \tag{5.152}$$

unde Δt este intervalul de timp dintre t_i şi t_k, iar celelalte mărimi sînt analoge cu cele examinate mai înainte. În cazul dat, după rezolvarea ecuaţiei (5.152) pentru toate porţiunile de abscisă, se poate construi imediat diagrama $\omega = \omega(t)$.

§ 5.25. Limitarea oscilaţiilor periodice ale vitezei agregatului

Gradul de neuniformitate δ al mişcării staţionare a unui agregat este o mărime care caracterizează oscilaţiile vitezei unghiulare ale elementului de reducere

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{med}}, \tag{5.153}$$

unde ω_{max} şi ω_{min} sînt valorile extreme ale vitezei unghiulare în timpul unui ciclu din mişcarea staţionară, iar ω_{med} este valoarea medie a vitezei unghiulare în acelaşi timp, care se determină din formula

$$\omega_{med} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}. \tag{5.154}$$

Limitarea oscilaţiilor periodice ale vitezei se realizează cu ajutorul unei mase suplimentare adăugată elementului de reducere. Masa suplimentară este o roată numită volant, aşezată pe arborele elementului de reducere.

La mişcarea staţionară şi la valori mici ale lui δ se consideră de obicei că momentul motor M_m este aproximativ constant. În acest

caz problema determinării momentului de inerţie al volantului se rezolvă astfel.

A. Din diagrama dată $M_r = M_r(\varphi)$ (fig. 5.73) se determină mărimea M_m pe baza următoarei egalităţi:

$$M_m = \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi k} M_r(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi k} k_M \cdot k_\varphi S, \tag{5.155}$$

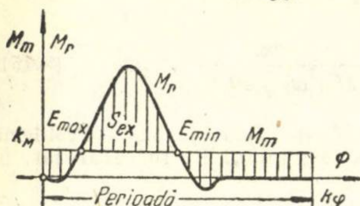


Fig. 5.73.

unde S este suprafaţa diagramei $M_r(\varphi)$ pentru ciclul $2\pi k$; k_M şi k_φ sînt scări.

B. Se determină cel mai mare lucru mecanic în exces

$$W_{ex} = S_{ex} k_M k_\varphi, \tag{5.156}$$

adică diferenţa lucrului mecanic al forţelor motoare şi al forţelor de rezistenţă (sau invers) între două poziţii vecine ale elementului de reducere, pentru care avem $M_m = M_r$.

C. Se calculează mărimea momentului de inerţie I_v al volantului care asigură pe δ dat

$$I_v = \frac{W_{ex}}{\delta \omega_{med}^2} = \frac{k_M k_\varphi \cdot S_{ex}}{\delta \omega_{med}^2}. \tag{5.157}$$

În calculul de mai înainte nu este luată în considerare masa redusă a elementelor mecanismului, care, comparativ cu masa volantului este în general mică.

Pentru determinarea lui I_v la un agregat cu motor electric, al cărui moment este funcţie de viteza unghiulară a rotorului, se examinează două cazuri, după cum urmează.

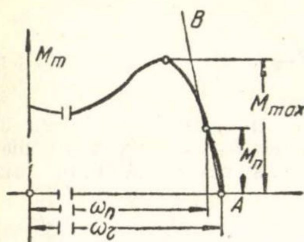


Fig. 5.74.

1. Momentul rezistent este egal cu $M_r = M_r(\varphi)$, iar momentul de inerţie redus I_{red} al elementelor mecanismului este aproximativ egal cu zero.

Se presupune că în agregat intră un motor asincron, a cărui caracteristică mecanică este reprezentată în fig. 5.74. Se înlocuieşte porţiunea de funcţionare a caracteristicii cu dreapta AB, care trece prin punctul de moment nominal M_n. Avem

$$M_m = M_0 - c \cdot \omega, \tag{5.158}$$

unde M_0 este mărimea momentului convenţional, care se obţine, dacă dreapta dată se prelungeşte pînă la intersecţia cu axa ordonatelor, iar c este coeficientul unghiular al acestei drepte, dat de expresia

$$c = \frac{M_0}{\omega_r}. \tag{5.159}$$

Mărimea M_n a momentului motor se determină din

$$M_n = kM_{r\,med} \quad (k = 1{,}15 \div 1{,}25). \tag{5.160}$$

Dacă momentul rezistent M_r variază conform cu fig. 5.75 (diagramă caracteristică pentru maşinile percutante, cu momentul M_r mare pentru unghiul φ_r la funcţionarea de regim şi cu M_g mic pentru unghiul φ_g de mers în gol), atunci pentru ω_{max} şi ω_{min} daţi, ghidîndu-ne după partea din diagramă, care stabileşte momentul la funcţionarea de regim, obţinem următoarea mărime a lui I_v [1]:

$$I_v = \frac{c^2\varphi_p}{c(\omega_{max} - \omega_{min}) + M_0' \ln \dfrac{M_0' - c\omega_{max}}{M_0' - c\omega_{min}}}, \tag{5.161}$$

unde $M_0' = M_0 - M_r$.

Deoarece puterea motorului a fost aleasă cu o oarecare aproximaţie, amplitudinea oscilaţiilor ω va fi evident ceva mai mică decît cea dată.

În cazurile cînd diagrama $M_r = M_r(\varphi)$ reprezintă o curbă cu variaţie lentă, iar diagrama $M_m = M_m(\omega)$ este de asemenea curbilinie, atunci pentru determinarea lui I_v se poate folosi următoarea metodă aproximativă.

Pentru valorile extreme ale lui ω, egale cu ω_{max} şi ω_{min}, acceleraţia unghiulară a elementului de reducere este egală cu zero şi de aceea

$$M_m + M_r = I_v \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

de unde $M_m = - M_r$. Aceasta permite determinarea poziţiilor elementului de reducere, în care ω atinge valorile extreme (fig. 5.76).

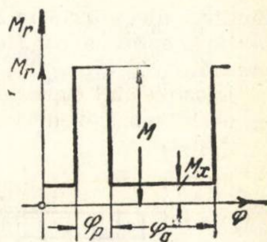


Fig. 5.75.

Se presupune că M_m variază în funcţie de φ după o lege liniară. În acest caz lucrul mecanic în exces se exprimă prin suprafaţa haşurată în fig. 5.76 şi $I_v = \dfrac{W_{ex}}{\delta\omega_m^2}$.

În scopul verificării rezultatului se determină E_{max} şi E_{min}:

$$E_{max} = I_v \frac{\omega_{max}^2}{2} \text{ şi } E_{min} = I_v \frac{\omega_{min}^2}{2}$$

şi se utilizează ecuaţia (5.148)

$$I_v \frac{\omega_i^2}{2\Delta\varphi} + M_{mi} + M_{rm} + \frac{\Delta M_m}{2} = I_k \frac{\omega_k^2}{2\Delta\varphi}.$$

Se consideră (fig. 5.76) că punctul A corespunde valorilor $I_v \frac{\omega_i^2}{2\Delta\varphi}$ şi $M_{m\,max}$. Deoarece se va utiliza o porţiune mică a parabolei $I_v \frac{\omega^2}{2\Delta\varphi}(\omega)$, în această porţiune ea poate fi considerată ca dreaptă. Pentru intervalele $\Delta_1\varphi$ şi $\Delta\varphi$ sînt construite două curbe diferite, a doua serie de puncte este obţinută în conformitate cu mărimile

$$I_v \frac{\omega_{max}^2}{2\Delta_1\varphi} \text{ şi } I_v \frac{\omega_{max}^2}{2\Delta\varphi}.$$

Pentru $\omega = \omega_{max}$ starea energetică a agregatului se caracterizează prin punctul 1. Cu ajutorul ecuaţiei de mai înainte se efectuează următoarea construcţie: M_{mi} este segmentul *1—2*; M_{rm} = segmentul *2—3*; $0{,}5\Delta M_m$ — porţiunea de curbă *3—4*, echidistantă curbei $0{,}5M_m = 0{,}5M_m(\omega)$, pînă la intersecţia cu curba A — *1*. Punctul *4* caracterizează starea energetică a agregatului în poziţia *1*. Deoarece următorul interval este egal cu $\Delta\varphi$, trebuie trecut pe curba A—*1*. Construcţiile ulterioare se execută în mod analog. Rezultatul final arată că aproximaţia făcută mai înainte s-a dovedit suficient de precisă.

Deoarece sînt cunoscute valorile lui ω în toate poziţiile cercetate, se poate construi diagrama mai precisă $M_m = M_m(\varphi)$. Fig. 5.76

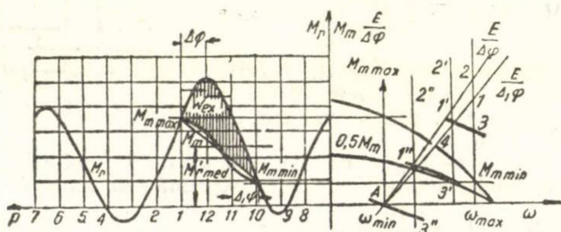


Fig. 5.76.

arată că suprafeţele în exces, limitate jos de o dreaptă şi de curba $M_m(\varphi)$ sînt apropiate ca mărime una de alta.

2. $M_r = M_r(t)$ şi $I_{red} = 0$. Să se determine I_v pentru ω_{max} şi ω_{min} daţi.

Pentru maşini percutante avem diagrama reprezentată în fig. 5.77. În acest caz motorul se alege conform egalităţii (5.160) şi pentru porţiunea de funcţionare a caracteristicii sale se foloseşte ecua-

ţia (5.158). Momentul de inerţie I_v al volantului se determină din formula [1]

$$I_v = \frac{ct_p}{\ln \frac{M'_0 - c\omega_{max}}{M'_0 - c\omega_{min}}}, \qquad (5.162)$$

unde $M'_0 = M_0 - M_p$.

În cazul curbelor date $M_m = M_m(\omega)$ şi $M_r = M_r(t)$ de formă generală trebuie utilizată ecuaţia (5.152).

Momentul de inerţie al volantului se determină în acelaşi mod ca şi în cazul precedent (fig. 5.78). Succesiunea construcţiilor necesare este următoarea: a) pe diagrama $M_r = M_r(t)$ se înseamnă punctele $M_{m\,min}$ şi $M_{m\,max}$ care se unesc cu o linie dreaptă; b) se calculează mărimea S_{ex} k_I k_t, c) se calculează momentul de inerţie I_v cu formula

$$I_v = \frac{S_{ex}k_Ik_t}{\omega_{max} - \omega_{min}}. \qquad (5.163)$$

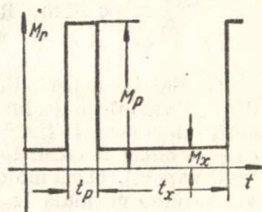


Fig. 5.77.

d) Se verifică cu formula (5.152) rezultatul obţinut, în care scop se calculează mărimile $\frac{I_v(\omega_{max}-\omega_{min})}{\Delta t}$ pentru $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$ şi $\Delta_3 t$ (în partea dreaptă a diagramei sînt construite dreptele $I_v\omega/\Delta t$ pentru cele

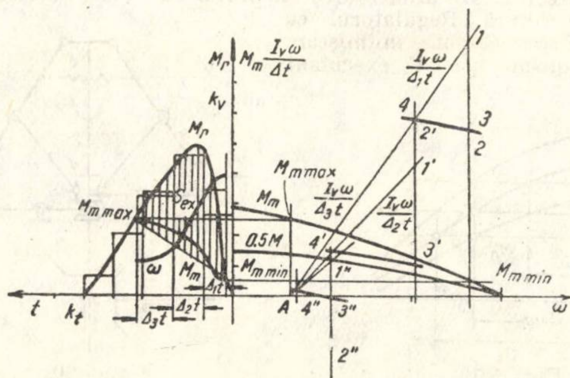


Fig. 5.78.

trei valori indicate ale lui Δt); e) utilizînd ecuaţia (5.152), aşezăm de la punctul *1* segmentul *1—2*, corespunzător ordonatei $M_{r\,med}$ pentru intervalul *1—2*, după aceea segmentul *2—3*, corespunzător ordonatei

diagramei $M_m = M_m(\omega)$ şi apoi segmentul *3—4*, echidistant faţă de curba $0{,}5M_m = 0{,}5M_m(\omega)$.

Următorului interval îi corespunde dreapta $I_v\omega/\Delta_2 t$, de aceea trebuie făcută trecerea pe această dreaptă (segmentul *4—1*) şi după aceasta construcţiile se execută analog. În cazul dat punctul *4"* nu a coincis cu punctul *A*. Totuşi diferenţa obţinută este neînsemnată şi ea ne dă o mare siguranţă; de aceea nu este cazul să se facă recalcularea. Pentru ilustrare în fig. 5.78 sînt construite curbele $M_m = M_m(t)$ şi $\omega = \omega(t)$.

§ 5.26. Reglarea oscilaţiilor neperiodice ale vitezei agregatului

Oscilaţiile neperiodice ale vitezei agregatului au loc în cazul condiţiilor variabile de lucru, de exemplu ca rezultat al schimbării sarcinii exterioare. În fig. 5.79 sînt arătate pentru motor trei caracteristici care se obţin în cazul folosirii a trei cantităţi diferite de agent motor (gaz, vapori). Dacă motorul funcţionează după caracteristica *1*, atunci la o sarcină normală M_r, arborele său se roteşte cu viteza nominală ω_n. La variaţia momentului rezistent pînă la M'_r viteza unghiulară se micşorează pînă la ω_1, iar pînă la M''_r, ω se măreşte pînă la ω_2. Pentru înlăturarea oscilaţiilor vitezei, motorul se trece automat la funcţionarea după o altă caracteristică, de exemplu după *II* sau *III*. Instalaţiile, care menţin în timpul funcţionării motorului viteza lui nominală, se numesc *regulatoare*.

Regulatorul cu acţiune directă acţionează direct asupra mecanismului care reglează alimentarea motorului cu agentul motor în cantitatea necesară. Regulatorul cu *acţiune indirectă* pune în mişcare un mecanism special executant

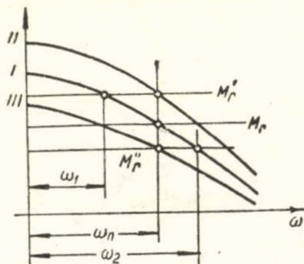


Fig. 5.79.

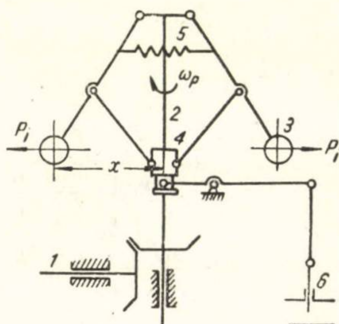


Fig. 5.80.

(*servomotor*), care comandă organul de reglare. În fig. 5.80 este indicată schema unui regulator centrifug cu acţiune directă.

După cum indică fig. 5.80, unei viteze unghiulare a arborelui *1* al motorului îi corespunde o viteză unghiulară anumită ω_r a regula-

torului. Greutăţile bilelor *3*, ale manşonului *4* şi ale tuturor elementelor mobile, legate de axul *2* al regulatorului, precum şi tensiunea arcului *5* tind să menţină manşonul *4* în poziţia inferioară, iar sertarul *6* — în poziţia limită superioară. Pe de altă parte, forţele centrifuge *P* ale greutăţilor tind să ridice mufa şi să coboare sertarul *6*. Funcţionarea regulatorului trebuie să fie stabilă; raportul între forţele arătate mai sus trebuie să fie astfel încît la diferite viteze unghiulare, atît poziţia manşonului *4* cît şi a sertarului *6* să se păstreze stabile. Această condiţie va fi respectată dacă forţele centrifuge dezvoltate de manşon precum şi cele ale greutăţilor celor două bile vor fi egale cu forţele de greutate reduse ale elementelor şi cu forţa de tensiune în arc. În fig. 5.81 este indicată caracteristica unui regulator, reprezentată prin diagrama $P_r = P_r(x)$ a forţelor de greutate ale elementelor şi a tensiunii din arc reduse la centrele greutăţilor unde x este distanţa centrului de greutate *3* pînă la axa regulatorului. În aceeaşi figură sînt indicate diagramele forţelor de inerţie reduse ale greutăţilor la diferite viteze unghiulare ale regulatorului. Caracteristica examinată este stabilă, deoarece la variaţii întîmplătoare ale poziţiei greutăţilor regulatorul tinde să se întoarcă în poziţia anterioară.

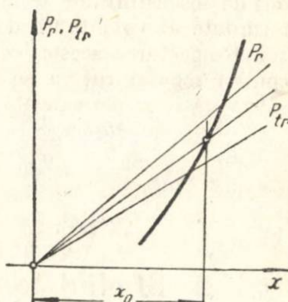


Fig. 5.81.

La regulatorul cu acţiune directă, pentru diferite sarcini exterioare se stabilesc diferite viteze unghiulare ale arborelui motorului şi regulatorului. *Gradul de neregularitate al funcţionării* unui regulator este

$$\delta_{reg} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{med}}, \text{ unde } \omega_{med} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}. \quad (5.164)$$

Aici ω_{max} şi ω_{min} sînt vitezele unghiulare extreme ale regulatorului, care se stabilesc la mersul în gol şi la sarcina totală; ω_{med} este viteza unghiulară medie ce se defineşte prin viteza unghiulară nominală a motorului.

Datorită frecării în cuplele cinematice ale regulatorului, la variaţia vitezei unghiulare manşonul *4* începe să se mişte numai în momentul cînd forţele centrifuge ale greutăţilor înving forţele de frecare; regulatorul răspunde deci la variaţiile vitezei cu oarecare întîrziere, care este caracterizată ca aşa-numita *insensibilitate*.

Gradul de insensibilitate este

$$\varepsilon = \frac{\omega''_{reg} - \omega'_{reg}}{\omega_{reg}}, \quad (5.165)$$

unde ω_{reg} este viteza unghiulară a regulatorului, stabilită în condiţiile date, iar ω''_{reg} şi ω'_{reg} sînt vitezele unghiulare la care începe

mişcarea manşonului la micşorarea şi respectiv la creşterea sarcinii exterioare.

Gradul total de neregularitate Δ al funcţionării unui regulator este

$$\Delta = \delta_{reg} + \varepsilon. \quad (5.166)$$

Atunci cînd agregatul este prevăzut cu regulator şi cu volant, gradul de insensibilitate trebuie să fie mai mare decît gradul de neuniformitate al volantului, determinat de oscilaţiile periodice ale vitezei. Respectarea acestei condiţii este indispensabilă, deoarece în caz contrar regulatorul va reacţiona la variaţiile periodice ale vitezei şi se va găsi în permanenţă într-o mişcare de oscilaţie.

5.9
Studiul forţelor în mecanisme [1]

§ 5.27. Cuple cinematice

Studiul forţelor în mecanisme se reduce la determinarea reacţiunilor care apar în cuplele cinematice datorită acţiunii forţelor exterioare, a forţelor de inerţie şi a forţelor de greutate ale elementelor. Deoarece forţele de frecare în cuplele cinematice influenţează într-o oarecare măsură reacţiunile, ele trebuie, în general, luate în considerare.

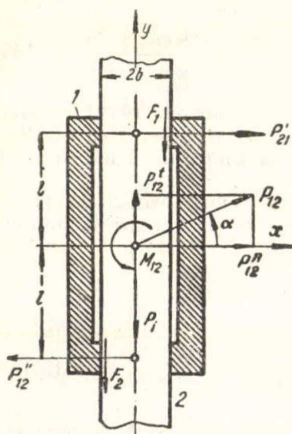


Fig. 5.82.

Cupla de translaţie. Ipotezele admise: 1) mărimile suprafeţelor de reazem ale glisierei sînt mici în comparaţie cu lungimea ei (fig. 5.82); 2) pe suprafeţele de reazem presiunea este repartizată uniform; 3) forţele şi lungimile braţelor lor de pîrghie sînt mărimi algebrice şi pot fi atît pozitive cît şi negative (acelaşi lucru se referă şi la vectorii forţelor şi ai braţelor de pîrghie); 4) semnul braţului de pîrghie al momentului forţei se consideră negativ dacă braţul este îndreptat spre partea negativă a axei de coordonate.

La rezolvarea problemei propuse toate forţele aplicate elementului se vor transpune spre centrul glisierei, ceea ce permite obţinerea unui singur vector rezultant şi a unui singur moment rezultant,

care se vor nota respectiv cu $\vec{P}_{12}$ şi $\vec{M}_{12}$ (fig. 5.82), unde indicele 12 simbolizează acţiunea elementului *1* asupra elementului *2*.

Presupunem că glisiera se mişcă în sus. Atunci, considerînd forţele de frecare F_1 şi F_2 egale

$$F_1 = \mu \,|\, \vec{P}'_{21} \,|, \; F_2 = \mu \,|\, \vec{P}''_{21} \,| \tag{5.167}$$

şi îndreptate în sens opus vitezei relative, se pot compune ecuaţiile pentru determinarea reacţiunilor $\vec{P}'_{21}$ şi $\vec{P}''_{21}$

$$\left.\begin{aligned} P'_{21} + P_{12} \cos\alpha + P''_{21} &= 0, \\ P'_{21} l + \mu b \,|\, P'_{21} \,| + M_{12} + P''_{21} l + \mu b \,|\, P''_{21} \,| &= 0, \\ P_{12} \sin\alpha + \mu \,|\, P'_{21} \,| + \mu \,|\, P''_{21} \,| + P_i &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.168}$$

unde P_i este forţa de inerţie căutată a glisierei *1*.

Sistemul de ecuaţii (5.168) este neliniar din cauză că în el intră unele mărimi cu semnele modulului şi de aceea el poate fi rezolvat doar aproximativ. În prima aproximaţie, considerînd forţele de frecare egale cu zero, se determină P'_{21} şi P''_{21} şi apoi din ecuaţia (5.167) se determină mărimile F_1 şi F_2. În a doua aproximaţie, în sistemul de ecuaţii (5.168) se introduc mărimile F_1 şi F_2 obţinute şi se determină din nou P'_{21} şi P''_{21} şi aşa mai departe.

Dacă sensul mişcării glisierei este cunoscut dinainte, sistemul de ecuaţii (5.168) poate fi rezolvat imediat, deoarece în acest caz sensurile forţelor de frecare sînt de asemenea cunoscute. În fig. 5.83 este

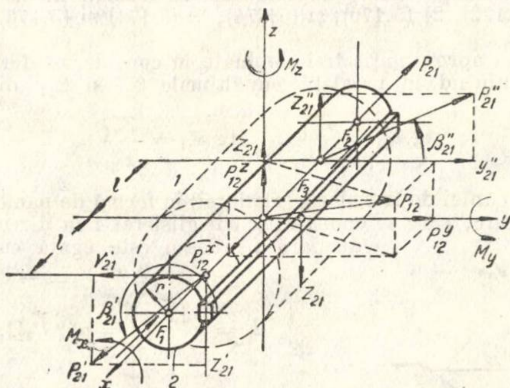


Fig. 5.83.

indicat cazul general de încărcare a unei cuple de translaţie. Se dă $\vec{P}_{12}(P^x_{12}, P^y_{12}\ P^z_{12})$, $\vec{M}_{12}(M_x, M_y, M_z)$, r, l şi f. Se cere să se determine $\vec{P}'_{21}(Y'_{21}, Z'_{21})$, $\vec{P}''_{21}(Y''_{21}, Z''_{21})$, reacţiunea Z_{21}, forţele de frecare F_1, F_2, F_3 şi forţa de inerţie P_i, dacă glisiera se mişcă în sensul pozitiv faţă de axa x.

Compunem ecuaţiile de proiecţie ale forţelor şi momentelor

$$P_{12}^{x} + F_1 + F_2 + F_3 + P_i = 0, \quad (5.169)$$

$$P_{12}^{y} + Y'_{21} + Y''_{21} = 0, \quad (5.170)$$

$$P_{12}^{z} + Z'_{21} + Z''_{21} = 0, \quad (5.171)$$

$$M_x + Z_{21}r = 0, \quad (5.172)$$

$$M_y + Z'_{21}l + Z''_{21}l + F_1 r \sin\beta'_{21} + F_2 r \sin\beta''_{21} = 0, \quad (5.173)$$

$$M_z + Y'_{21}l + Y''_{21}l + F_1 r \cos\beta'_{21} + F_2 r \cos\beta''_{21} + F_3 r = 0, \quad (5.174)$$

unde

$$F_1 = \mu\,|\vec{P}'_{21}|,\ F_2 = \mu\,|\vec{P}''_{21}|,\ F_3 = \mu\,|\vec{Z}_{21}|, \quad (5.175)$$

$$P'_{21} = \sqrt{Y'^2_{21} + Z'^2_{21}},\quad P''_{21} = \sqrt{Y''^2_{21} + Z''^2_{21}}. \quad (5.176)$$

În prima aproximaţie, considerînd forţele de frecare egale cu zero, sistemul de ecuaţii indicat mai înainte se rezolvă în ordinea următoare: 1) (5.172), 2) (5.170), şi (5.174), 3) (5.171) şi (5.173), 4) (5.175) şi 5) (5.169).

În a doua aproximaţie trebuie luate în considerare forţele de frecare, determinînd în prealabil unghiurile β'_{21} şi β''_{21} din relaţiile

$$\operatorname{tg}\beta'_{21} = \frac{Z'_{21}}{Y'_{21}},\quad \operatorname{tg}\beta''_{21} = \frac{Z''_{21}}{Y''_{21}}. \quad (5.177)$$

În cazul cuplei de translaţie (glisierei) în formă de pană (fig. 5.84), forţa de frecare, care se opune mişcării glisierei *1* în direcţia perpendiculară pe desen este egală cu

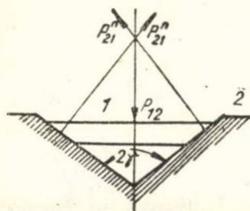


Fig. 5.84.

$$F = \mu\frac{|\vec{P}_{12}|}{\sin\gamma} = \mu'\,|\vec{P}_{12}|, \quad (5.178)$$

unde μ' este *coeficientul convenţional de frecare* a glisierei în formă de pană.

Cupla de rotaţie. În cazul general, la reducerea forţelor care acţionează asupra axului cuplei de rotaţie (fig. 5.85), se obţin: o forţă $\vec{P}_{12}\,(P_{12}^{x}, P_{12}^{y}, P_{12}^{z})$ şi un moment $\vec{M}_{12}\,(M_x, M_y, M_z)$. Sub acţiunea forţelor indicate apar reacţiunile, ale căror proiecţii sînt indicate în

fig. 5.85. Afară de aceasta apar momente de frecare ale căror expresii sînt

$$\left.\begin{aligned} M'_F &= \mu r\,|\vec{P}'_{21}|;\; M''_F = \mu r\,|\vec{P}''_{21}|, \\ M_F &= \frac{2}{3}\,\mu\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}\,|\vec{Y}_{21}|, \end{aligned}\right\} \tag{5.179}$$

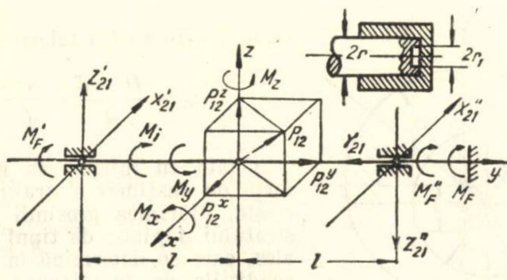


Fig. 5.85.

unde sensurile momentelor de frecare sînt opuse sensului de rotație al arborelui. Sistemul de ecuații este

$$\left.\begin{aligned} P^x_{21} + X'_{21} + X''_{21} &= 0, \\ P^y_{12} + Y_{21} &= 0, \\ P^z_{12} + Z'_{21} + Z''_{21} &= 0, \\ M_x + Z'_{21}l + Z''_{21}l &= 0, \\ M_y + M'_F + M''_F + M_F + M_i &= 0, \\ M_z + X'_{21}l + X''_{21}l &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.180}$$

Rezolvarea unui astfel de sistem de ecuații nu prezintă dificultăți, deoarece sensurile momentelor de frecare se stabilesc ușor.

*Funcționarea fusului în condițiile frecării lichide**. Datorită aderenței unsorii de fus, în timpul rotației uleiul desprinde arborele de cuzinet. Fusul și cuzinetul sînt separate printr-un strat de ulei, in interiorul căruia se creează presiunea hidrodinamică, care stabilește un strat de grosime minimă h_0 (fig. 5.86). O dată cu mărirea viscozității absolute η [kg · s/m²] și a lui n [ture/min] și o dată cu micșorarea sarcinii specifice $p = \dfrac{P}{dl}$ (l este lungimea fusului), h_0 se

*) Vezi Краткий технический справочник под общей редакцией Вяч. А. Зиновьева, partea I-a, Гостехиздат, 1952.

derile totale în lagărele de rostogolire, pot fi determinate cu ajutorul coeficienţilor convenţionali de frecare de rostogolire f_0, raportaţi la circumferinţa arborelui. În asemenea cazuri se recomandă următoarele valori: $f_0 = 0{,}001...0{,}004$ pentru lagăre cu bile şi $f_0 = 0{,}0025...$ $...0{,}01$ pentru lagăre cu role.

Cupla şurub. Dacă şurubului *2* care sub acţiunea unui cuplu de forţe M_2 se roteşte faţă de piuliţa fixă *3*, i se opune forţa axială P_{12} datorită piesei *1* (fig. 5.87). Piesa *1* nu poate avea decît o mişcare de translaţie rectilinie. În plus, mişcării şurubului *2* i se opun forţele de frecare în filet şi pe suprafaţa de reazem a piesei *1*. Forţa P_{12} şi forţele de frecare în filet se consideră aplicate pe suprafaţa mediană a filetului.

În cazul unui moment motor M_2 avem

$$M_2 = P_{12} r_{med} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi') + \frac{2}{3} \mu_1 P_{12} \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 - R_1^2}, \qquad (5.187)$$

unde α este panta filetului, iar $\varphi' = \operatorname{arc\,tg} \mu'$ este unghiul convenţional de frecare, ce se determină în funcţie de μ' conform ecuaţiei (5.178), dacă filetul este triunghiular sau trapezoidal, iar μ_1 este coeficientul de frecare pe suprafaţa de reazem a piesei *1*.

În cazul cînd P_{12} este forţa motoare, se obţine

$$P_{12} = \frac{M_2}{r_{med} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi') - \dfrac{2}{3} \mu_1 \dfrac{R^3 - R_1^3}{R^2 - R_1^2}}. \qquad (5.188)$$

Dacă numitorul părţii din dreapta (5.188) este mai mic decît zero, aceasta indică faptul că cupla şurub este cu autofrînare.

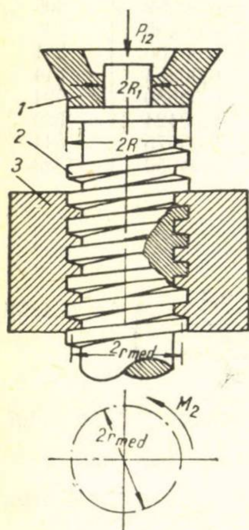


Fig. 5.87.

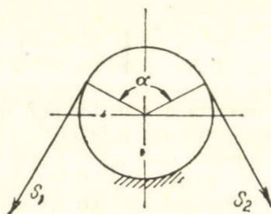


Fig. 5.88.

Frecarea cablului flexibil pe un cilindru fix. Formula lui Euler, care dă relaţia dintre tensiunea S_1 a părţii conducătoare şi S_2 a celei conduse a cablului este

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha}, \qquad (5.189)$$

unde μ este coeficientul de frecare; α unghiul de înfăşurare, e baza logaritmilor naturali (fig. 5.88).

§ 5.28. Mecanisme cu roţi de fricţiune

Studiul forţelor în mecanismele cu roţi de fricţiune se reduce la determinarea forţei necesare de apăsare a roţilor în funcţie de momentul dat al cuplului forţelor de rezistenţă şi de dimensiunile date ale roţilor. Afară de aceasta, prin calcul se determină şi reacţiunile în lagăre.

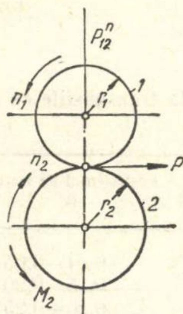


Fig. 5.89.

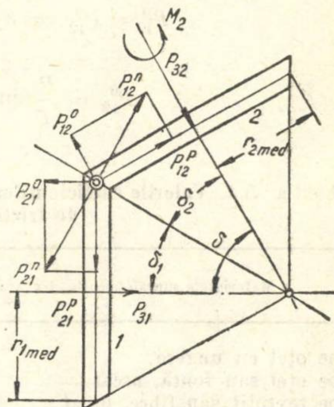


Fig. 5.90.

Pentru o transmisie cu roţi cu fricţiune, cilindrice (fig. 5.89), forţa de antrenare necesară se determină în funcţie de mărimea lui M_2. Avem

$$P = \frac{M_2}{r_2} k, \tag{5.190}$$

unde $k \approx 1{,}20 \div 1{,}50$ este coeficientul de siguranţă al acţionării.

Forţa de apăsare P_{12}^n este

$$P_{12}^n = \frac{P}{\mu}, \tag{5.191}$$

unde μ este coeficientul de frecare dintre cele două roţi determinat din tabela 5.4. Reacţiunile în lagăr apar datorită celor două forţe P şi P_{12}^n. Mărimile acestor reacţiuni depind şi de forma constructivă a transmisiei. La transmisia conică prin fricţiune (fig. 5.90) forţa periferică cu contact este îndreptată perpendicular pe desen şi notată printr-un cerculeţ cu punct. Mărimea ei este

$$P = \frac{M_2}{r_{2\,med}} k. \tag{5.192}$$

Forța normală de apăsare necesară este

$$|P_{12}^n| = |P_{21}^n| = \frac{|P|}{\mu}. \tag{5.193}$$

Pentru roata *2* avem

$$P_{12}^p = P_{12}^n \cos\delta_2 = \frac{P}{\mu}\cos\delta_2, \tag{5.194}$$

$$P_{12}^0 = \frac{P}{\mu}\sin\delta_2 = P_{32}. \tag{5.195}$$

Tabela 5.4. **Valorile coeficienților de frecare la transmisiile cu roți de fricțiune**

Materialele suprafețelor în frecare	Coeficientul de frecare μ
Oțel pe oțel cu ungere	0,04–0,05
Oțel pe oțel sau fontă, uscat	0,15–0,20
Oțel pe textolit sau fibre, uscat	0,20–0,25
Oțel sau fontă pe piele, uscat	0,20–0,35
Oțel pe ferodo, uscat	0,30–0,35
Oțel sau fontă pe cauciuc, uscat	0,35–0,45
Oțel sau fontă pe lemn, uscat	0,35–0,50

Pentru roata *1*

$$P_{21}^p = \frac{P}{\mu}\cos\delta_1, \qquad P_{21}^0 = \frac{P}{\mu}\sin\delta_1 = P_{31}. \tag{5.196}$$

Reacțiunile în lagăre trebuie determinate pentru toate cele trei componente: P, P^p și P^0.

§ 5.29. Mecanisme cu roți dințate

Calculul forțelor în mecanismele cu roți dințate se efectuează luîndu-se în considerare și frecarea de alunecare în angrenaje și în lagăre. Sensul forței de frecare în angrenaj este diferit în cele două părți ale polului P (fig. 5.91), deoarece viteza de alunecare își schimbă semnul în pol. Segmentele P_a și P_b ale liniei de angrenare se vor considera aproximativ egale, astfel că valoarea medie a forței de frecare F_{12} pe perioada de angrenare este egală cu zero. Valoarea medie a momentului de frecare M_{12} pentru aceeași perioadă are o

mărime determinată. În fig. 5.91, *a* este dată epura momentului M_f din care rezultă valoarea medie:

$$M_{12} \approx \frac{1}{2} F_{12} \cdot P_a \approx \frac{1}{2} F_{12} \cdot P_b \approx \frac{1}{4} F_{12} \cdot ab,$$

sau exprimînd P_a și P_b prin arcul de angrenare de pe cercul de bază, avem

$$M_{12} \approx \frac{1}{4} F_{12} \pi m \, \varepsilon \cos \alpha = F_{12} h_{12}, \quad (5.197)$$

unde m este modulul de angrenare, ε gradul de acoperire.

Prin urmare, se poate considera că la angrenare acționează un cuplu de forțe cu momentul M_{12} îndreptat în sens opus vitezei unghiulare relative ω_{21} egală cu diferența algebrică a vitezelor unghiulare absolute ale roților.

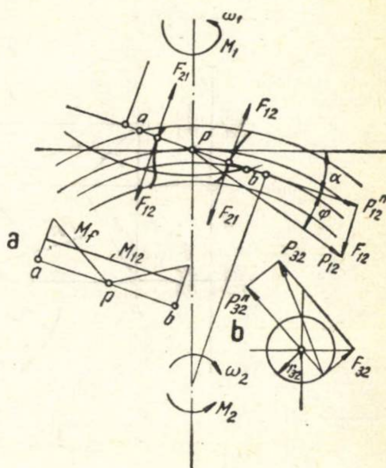


Fig. 5.91.

Sub acțiunea forței normale P^n_{32} (fig. 5.91, *b*) pe circumferința fusului apare forța de frecare $F_{32}=\mu_0 / P^n_{32} /$, îndreptată în sensul invers vitezei relative. Pentru simplificare se va considera că la centrul fusului se aplică o reacțiune normală și roata se găsește sub acțiunea cuplului forțelor de frecare, al cărui moment este

$$M_{32} \approx \mu_0 P^n_{32} r_{32}. \quad (5.198)$$

Acest moment este orientat de asemenea în sens invers vitezei unghiulare relative. Coeficientul de frecare μ în angrenare depinde de materialul roților dințate, de precizia de prelucrare și de montaj. Coeficientul de frecare în angrenare $\mu \approx 0{,}05 \div 0{,}20$, pentru lagăre de alunecare $\mu_0 \approx 0{,}03 \div 0{,}10$, pentru lagăre cu bile $\mu_0 \approx 0{,}001 \div 0{,}004$, iar pentru lagăre cu role $\mu \approx 0{,}0025 \div 0{,}01$.

Exemple. În fig. 5.92 este reprezentată schema unui mecanism cu o singură treaptă cu angrenare exterioară. Utilizînd la început planul forțelor, vom determina reacțiunile în lagăre, așezate convențional în planul de angrenare examinat. Astfel de reacțiuni se vor numi convenționale. Concomitent cu schema de forțe vom utiliza de asemenea planul vitezelor, cu ajutorul cărora vom stabili sensurile vitezelor unghiulare relative, egale cu diferențele algebrice ale vitezelor unghiulare absolute.

Viteza unghiulară relativă a roții *2* față de roata *1* este $\omega_{21} = -|\omega_2| - |\omega_1|$, adică este orientată în sensul mișcării acelor ceasornicului și de aceea momentul

$$M_{12} \approx \frac{\pi}{4} \mu P_{12} m\varepsilon \cos\alpha = \mu P_{12} h_{12} \qquad (5.199)$$

Fig. 5.92.

este orientat în sens invers mișcării acelor ceasornicului. Se obține respectiv

$$M_{31} = \mu_0 P_{31} r_{31},\ M_{32} = \mu_0 P_{32} r_{32}, \qquad (5.200)$$

unde r_{31} și r_{32} sînt razele fusurilor, iar M_{31} și M_{32} sînt orientate în sens invers vitezelor unghiulare ale roților *1* și *2*.

Compunem acum ecuațiile de calcul.

Roata 2. Deoarece unghiul $\sigma_{12} = 360° - \alpha$, atunci

$$P_{32} \cos\sigma_{32} + P_{12} \cos\alpha = 0,\ P_{32} \sin\sigma_{32} - P_{12} \sin\alpha = 0, \qquad (5.201)$$

$$M_2 + \mu P_{12} h_{12} + \mu_0 P_{32} r_{32} - P_{12} r_2 \cos\alpha = 0. \qquad (5.202)$$

Din ecuațiile (5.201) avem: $\operatorname{tg} \sigma_{32} = \dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}$, de unde

$\sigma_{32} = 180° - \alpha$ și $P_{32} = P_{12}$. Din ecuația (5.202) obținem

$$P_{12} = \frac{M_2}{r_2 \cos\alpha - \mu h_{12} - \mu_0 r_{32}}. \qquad (5.203)$$

Roata 1. Deoarece unghiul $\sigma_{21} = 180° - \alpha$, atunci

$$-P_{21}\cos\alpha + P_{31}\cos\sigma_{31} = 0,\quad P_{21}\sin\alpha + P_{31}\sin\sigma_{31} = 0, \tag{5.204}$$

$$M_1 - \mu_0 r_{31} P_{31} - \mu P_{21} h_{21} - P_{21} r_1 \cos\alpha = 0. \tag{5.205}$$

Din ecuaţia (5.204) avem $\operatorname{tg}\sigma_{31} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sigma_{31} = 360° - \alpha$ şi $P_{31} = P_{21}$. Prin urmare

$$M_1 = P_{21}(r\cos\alpha + \mu_0 r_{31} + \mu P_{21} h_{21}). \tag{5.206}$$

În lipsa frecării, momentul M_1^i pe roata *1* este egal cu

$$M_1^i = M_2 \frac{r_1}{r_2}, \tag{5.207}$$

Randamentul mecanismului examinat este

$$\eta = \frac{M_1^i}{M_1}. \tag{5.208}$$

Fie $r_1 = 100$, $r_2 = 200$, $m = 5$, $\varepsilon = 1{,}4$, $\mu = 0{,}1$, $\mu_0 = 0{,}05$, $r_{31} = 15$, $r_{32} = 20$, $M_2 = 10\,000$ kg · mm (toate dimensiunile liniare indicate sînt în mm). Avem $\mu_0 r_{31} = 0{,}05 \cdot 15 = 0{,}75$; $\mu_0 r_{32} = 0{,}05 \times \times 20 = 1$; $\mu h_{12} = 0{,}1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 5 \cdot 1{,}4 \cos 20° = 0{,}517$. După înlocuirea valorilor numerice în formulele indicate mai înainte şi după efectuarea calculelor obţinem $P_{12} = 53{,}6$ kg, $M_1 = 5\,120$ kg · mm, $M_1^i = 5\,000$ kg · mm, $\eta = 0{,}975$.

În fig. 5.93 sînt reprezentate schema unei transmisii cu roţi dinţate în două trepte, planul vitezelor elementelor şi schema de forţe. Folo-

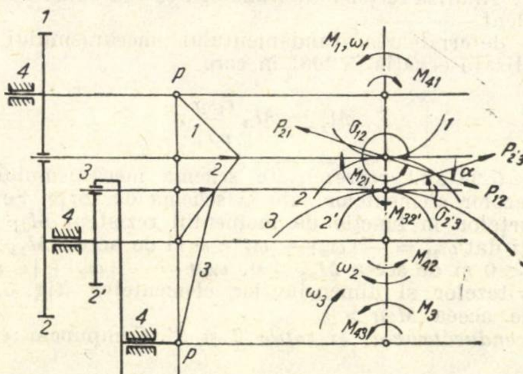


Fig. 5.93.

sînd notațiile analoge cu cele anterioare, se prezintă studiul forțelor care acționează asupra mecanismului examinat, atunci cînd momentul M_3 este dat.

Deoarece $\omega_{21} = -|\omega_2| - |\omega_1| < 0$ și $\omega_{23} = -|\omega_2| + |\omega_3| < 0$, atunci $M_{12} > 0$ și $M'_{32} > 0$.

Roata 3.

$$P_{2'3}\cos\alpha + P_{43}\cos\sigma_{43} = 0,\quad P_{2'3}\sin\alpha + P_{43}\sin\sigma_{43} = 0, \tag{5.209}$$

$$M_3 - M_{2'3} + M_{43} - P_{2'3}r_3\cos\alpha = 0. \tag{5.210}$$

Rezolvarea ultimului sistem de ecuații este analogă cu cea studiată în capitolul precedent.

Roțile 2 și 2'

$$\left.\begin{aligned} P_{12}\cos\alpha - P_{32'}\cdot\cos\alpha + P_{42}\cos\sigma_{42} = 0,\\ -P_{12}\sin\alpha - P_{32'}\cdot\sin\alpha + P_{42}\sin\sigma_{42} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{5.211}$$

$$-P_{12}r_2\cos\alpha + P_{32'}r_{2'}\cos\alpha + \mu h_{12}P_{12} + \mu h_{32'}P_{32'} + \mu_0 r_{42}P_{42} = 0. \tag{5.212}$$

Pentru determinarea necunoscutelor P_{12}, σ_{42} și P_{42}, utilizînd ecuația (5.212), eliminăm din ecuația (5.211) P_{42} și P_{12} și apoi obținem o ecuație în care σ_{42} intră sub semnul sinusului și cosinusului. O astfel de ecuație se reduce la o ecuație pătrată fixă de una din funcțiile trigonometrice indicate.

Rezolvînd sistemul prin metoda aproximațiilor succesive, luăm în prima aproximație ultimul termen al ecuației (5.212) egal cu zero. Din această ecuație determinăm pe P_{12}, după care se găsește σ_{42} și în sfîrșit pe P_{42} din ecuația (5.211). În a doua aproximație înlocuim în ecuația (5.212) mărimea P_{42} obținută și așa mai departe.

Roata 1. Analiza forțelor este analogă cu cea examinată în exemplul precedent.

Pentru determinarea randamentului mecanismului examinat trebuie utilizată ecuația (5.208) în care

$$M_1^i = M_3\,\frac{r_1 r_{2'}}{r_2 r_3}. \tag{5.213}$$

În fig. 5.94 sînt reprezentate schema mecanismului planetar, planul vitezelor elementelor sale și schema de forțe. Se efectuează calculul forțelor în funcție de momentul rezistent M_H al brațului port sateliți dat $\omega_{21} = -|\omega_2| - |\omega_1| < 0$ și de aceea $M_{12} > 0$, $\omega_{23} = -|\omega_2| < 0$ și de aceea $M_{32'} > 0$, $\omega_{2H} = -|\omega_2| + |\omega_H|$, conform planului vitezelor și dimensiunilor elementelor (fig. 5.94) $|\omega_2| > |\omega_H|$, de aceea $M_{2H} > 0$.

Roata conducătoare H și roțile 2 și 2'. Compunem ecuațiile de calcul

$$P_{2H}\cos\sigma_{2H} + P_{3H}\cos\sigma_{3H} = 0,\quad P_{2H}\sin\sigma_{2H} + P_{3H}\sin\sigma_{3H} = 0, \tag{5.214}$$

de unde

$$P_{2H} = P_{3H} \text{ şi } \sigma_{3H} = 180^\circ + \sigma_{2H}, \quad (5.215)$$

$$-P_{2H}\, r_H \cos\sigma_{2H} + M_H + M_{2H} + M_{3H} = 0, \quad (5.216)$$

unde toate notaţiile sînt analoge cu cele precedente.

$$\left.\begin{aligned} P_{12}\cos\alpha + P_{H2}\cos\sigma_{2H} - P_{32'}\cos\alpha = 0,\\ -P_{12}\sin\alpha + P_{H2}\sin\sigma_{H2} - P_{32'}\sin\alpha = 0,\end{aligned}\right\} \quad (5.217)$$

$$-P_{12}(r_2 - r_1)\cos\alpha + P_{H2}\, r_{2'}\cos\sigma_{H2} + M_{12} + M_{32'} + M_{H2} = 0. \quad (5.218)$$

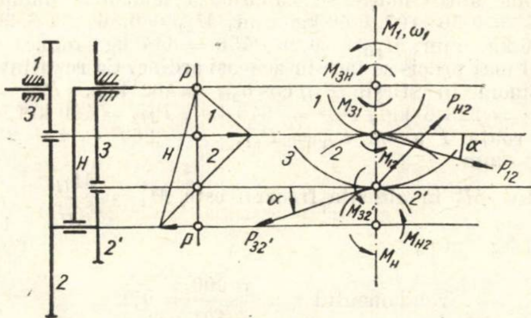


Fig. 5.94.

Rezolvarea precisă a problemei propuse este complicată. Exemplul numeric care urmează se rezolvă printr-o metodă aproximativă.

Utilizăm următoarele date: $m = 5$, $r_1 = 50$, $r_2 = 200$, $r_{2'} = 40$, $r_3 = 210$, $r_{31} = 15$, $r_{H_2} = 20$, $r_{3H} = 25$, $\mu = 0{,}1$; coeficientul de frecare în toate lagărele $\mu_0 = 0{,}01$; în lagărele roţilor *2* şi *2'* avem $\mu_0' = 0{,}05$; gradul de acoperire al celor două angrenaje $\varepsilon = 1{,}5$, $M_H = 100\,000$ kg · mm (toate dimensiunile liniare sînt date în mm).

Pe baza ecuaţiei (5.197) avem $h_{12} = h_{32'} = \dfrac{\pi}{4}\, m\, \varepsilon \cos\alpha = \dfrac{3{,}14}{4}\cdot 5 \times$ $\times 1{,}5\cdot\cos 20^\circ = 5{,}6$ mm. Momentele de frecare în angrenaje sînt $M_{12} = \mu h_{12}\cdot P_{12} = 0{,}1\cdot 5{,}6\, P_{12} = 0{,}56\, P_{12}$ $M_{32'} = \mu h_{32'}\, P_{32'} = 0{,}1\cdot 5{,}6\, P_{32'} = 0{,}56\, P_{32'}$.

Momentele de frecare în lagăre se stabilesc pe baza ecuaţiei (5.198) $M_{41} = \mu_0\, r_{41}\, P_{41} = 0{,}01 \cdot 15\, P_{41} = 0{,}15\, P_{41}$, $M_{H_2} = \mu_0'\, r_{H_2} P_{H_2} =$

$= 0{,}05\cdot 20\, P_{H_2} = P_{H_2}$, $M_{4H} = \mu_0\, r_{4H}\, P_{4H} = 0{,}01 \cdot 25\, P_{4H} = 0{,}25\, P_{4H}$.

Pe baza ecuaţiei (5.216) obţinem $P_{4H} = P_{2H}$ şi $\sigma_{4H} = 180^\circ + \sigma_{2H}$. În primă aproximaţie neglijăm frecarea în lagăre. Din ecuaţia (5.216): $-250\, P_{2H}\cos\sigma_{2H} + 100\,000 = 0$, de unde

$$P_{2H}\cos\sigma_{2H} = 400 \text{ kgf}.$$

iar din ecuaţia (5.217): $0{,}94\ P_{12} + 400 - 0{,}94\ P_{32'} = 0,$

$$-\ 0{,}342\ P_{12} + P_{H2}\sin\sigma_{H2} - 0{,}342\ P_{32'} = 0,$$

$$-\ 150{,}5\ P_{12} + 16\ 000 + 0{,}56\ P_{12} + 0{,}56\ P_{32'} = 0.$$

Neglijînd în ultima relaţie mărimea $0{,}56\ P_{32'}$, obţinem după rezolvare $P_{12} = 107$ kgf. Calculăm mai departe mărimea $P_{32'} = 532$ kgf. Se poate determina acum $P_{H2}\sin\sigma_{H2} = 218{,}6$ kgf. În sfîrşit avem

$$P_{H2} = \sqrt{400^2 + 218{,}6^2} = 456 \text{ kgf}.$$

În a doua aproximaţie se calculează mărimile momentelor de frecare $M_{12} = 0{,}56 \cdot 107 = 60$ kg · mm, $M_{32'} = 0{,}56 \cdot 532 = 300$ kg·mm, $M_{H2} = 456$ kg · mm, $M_{4H} = 0{,}25 \cdot 456 = 114$ kg · mm.

Calculul mai precis se face în aceeaşi ordine. Ca rezultat al acestui calcul obţinem în sfîrşit $P_{2H}\cos\sigma_{2H} = 402$ kgf, $P_{12} = 113$ kgf, $P_{2H}\sin\sigma_{2H} = 223{,}6$ kgf, $P_{32'} = 540$ kgf, $P_{H2} = 460$ kgf, $\sigma_{H2} = 29°$.

Pentru roata *1* avem $P_{41} = P_{21}$, $\sigma_{41} = 360° - \alpha = 340°$, $M_1 = 5401$ kg · mm.

Momentul M_1^i în absenţa frecării este $M_1^i = \dfrac{M_H}{i_{1H}} = \dfrac{M_H}{1 - \dfrac{r_2 r_3}{r_1 r_{2'}}} =$

$= -\ 5\ 000$ kg · mm,

$$\text{randamentul } \eta = \frac{5\ 000}{5\ 401} = 0{,}922.$$

Roţi dinţate cu dinţi oblici. Vectorul $\vec{P}^n$ al presiunii normale a dintelui unei roţi pe dintele celeilalte se află într-un plan rotit cu unghiul de înclinare β a dintelui faţă de planul frontal al roţii şi afară de aceasta, el este înclinat cu unghiul de angrenare α faţă de planul tangent la cilindrii primitivi (de rulare) ai roţilor (fig. 5.95).

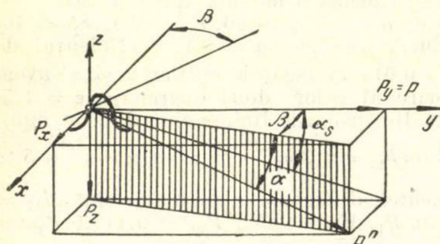


Fig. 5.95.

Din condiţiile date se stabileşte de obicei mărimea efortului tangenţial P, din care rezultă

$$P^n = \frac{P}{\cos\alpha\cos\beta},\ P_x = P\ \mathrm{tg}\,\beta,\ P_z = P\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\beta}. \qquad (5.219)$$

Luarea în considerare a frecării în angrenajul cu dinţi oblici este complicată. Dacă se consideră, ca înainte, valoarea medie a forţei de frecare în angrenaj egală cu zero, atunci pentru determinarea momentului de frecare se poate utiliza formula (5.197), iar momentul se poate considera aplicat în planul de acţiune a efortului tangenţial P.

Angrenarea dinţată conică. Forţa normală P_{21}^{n}, care acţionează în planul median al dinţilor, se descompune într-o forţă tangenţială P şi o componentă P', care la rîndul ei se descompune într-o componentă radială P_{21}^{r} şi una axială P_{21}^{a}. Toate aceste componente exercită o acţiune asupra lagărului roţii *1* (fig. 5.96).

Dacă se neglijează frecarea, atunci din momentul M_2 dat al cuplului forţelor de rezistenţă aplicate roţii *2* avem

$$P = \frac{M_2}{r_{2cp}}, P_{21}^{n} = \frac{P}{\cos\alpha'} P_{21}^{r} = P \operatorname{tg}\alpha \cos\delta_1, P_{21}^{o} = P \operatorname{tg}\alpha \sin\delta_1. \quad (5.220)$$

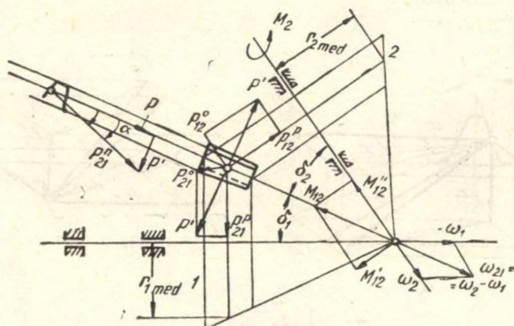


Fig. 5.96.

Admiţînd ca şi înainte că în perioada de angrenare a doi dinţi valoarea medie a forţei de frecare este egală cu zero, se poate determina momentul de frecare în angrenaj, la fel ca în cazul precedent. Prin utilizarea ecuaţiei (5.197) se obţine.

$$M_{12} = \frac{\pi}{4} \mu P_{21}^{n} m_{med} \varepsilon \cos\alpha = \mu P_{21}^{n} h_{12}, \quad (5.221)$$

unde m_{med} este modulul măsurat pe diametrul cercului mijlociu al conului primitiv.

Vectorul $\vec{M}_{12}$ este îndreptat în sens invers vitezei unghiulare relative ω_{21}, care se determină conform fig. 5.96 din egalitatea $\omega_{21}=\omega_2-$ $-\omega_1$. Vectorul $\vec{M}_{12}$ se descompune în două componente — în lungul axului roţii *2* şi perpendicular pe el

$$\vec{M}_{12} = \vec{M}_{12}' + \vec{M}_{12}'', \quad (5.222)$$

unde componenta $\vec{M}_{12}'$ se echilibrează cu cuplul de reacţiune în lagăre; planul de acţiune al acestui cuplu coincide cu planul care conţine axul roţii *2* şi este perpendicular pe desen. Componenta $\vec{M}_{12}''$ se adună cu momentul $\vec{M}_2$ şi opune rezistenţă rotaţiei roţii *2*.

Asupra roții *1* acționează momentul $\vec{M}_{21} = - \vec{M}_{12}$; $\vec{M}_{21}$ se descompune de asemenea în componentele $\vec{M}'_{21}$ și $\vec{M}''_{21}$.

Angrenajul șurub melc - roată melcată. În fig. 5.97 este indicat profilul filetului unui șurub melc, supus acțiunii forței normale P^n_{21} din partea roții melcate. Angrenajul șurub melc-roată melcată este o combinație între angrenarea de șurub și de cremalieră. Fundamentale în acest caz sînt pierderile datorite frecării de alunecare a șurubului melc față de roata melcată în direcția tangentă la linia elicoidală. Raportul între forțele din transmisia cu melc depinde de elementul care este conducător.

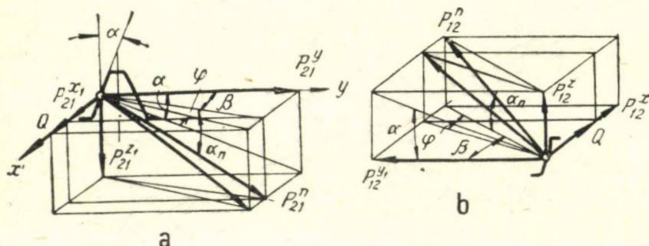


Fig. 5.97.

Șurubul melc conducător motor (fig. 5.97, *a*). Se dă forța rezistentă la periferia roții melcate P^y_{21}. Efortul Q la periferia șurubului melc și forța radială P^z_{21} sînt respectiv

$$\left.\begin{aligned} &Q = P^y_{21}\operatorname{tg}(\beta + \varphi'),\ P^z_{21} = P^y_{21}\frac{\operatorname{tg}\alpha_n}{\cos\beta} = P^y_{21}\operatorname{tg}\alpha\\ &\text{unde } \varphi' = \operatorname{arc\,tg}\frac{\mu}{\cos\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (5.223)$$

Roata melcată conducătoare (fig. 5.97, *b*). Se dă forța rezistentă Q la periferia șurubului melc. Efortul P^y_{12} la periferia roții melcate și forța radială P^z_{12} sînt respectiv egale cu

$$P^y_{12} = \frac{Q}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi')},\ P^z_{12} = P^y_{12}\frac{\operatorname{tg}\alpha_n}{\cos\beta} = P^y_{12}\operatorname{tg}\alpha. \quad (5.224)$$

Forța de frecare a angrenajului șurub melc-roată melcată, considerat ca angrenaj cu cremalieră, se poate calcula cu ajutorul momentului M_{12}, după formula (5.197).

§ 5.30. Mecanisme plane cu cuple inferioare

Analiza forţelor mecanismelor examinate aici se reduce la determinarea reacţiunilor în cuplele cinematice şi a momentului de echilibrare M_1, aplicat elementului conducător, datorite forţelor exterioare aplicate mecanismului, a forţelor de inerţie şi a forţelor de greutate ale elementelor. Luarea în considerare a forţelor de frecare în cuplele cinematice se va efectua numai cu ajutorul metodelor aproximative. Vectorii tuturor forţelor indicate se vor da prin mărimile lor algebrice, iar unghiurile lor de înclinare, faţă de sensul pozitiv al axei x al unui sistem rectangular de coordonate.

Rezolvarea problemei propuse se efectuează după terminarea analizei structurale şi cinematice a mecanismului după care pe baza acesteia din urmă se determină forţele de inerţie ale elementelor, lucru indispensabil pentru folosirea principiului lui d'Alembert.

Rezolvarea problemei reacţiunilor trebuie începută cu grupa lui Assur cea mai îndepărtată de elementul conducător; pentru fiecare grupă se poate alcătui un număr de ecuaţii de echilibru egal cu numărul de necunoscute, pe care îl conţin reacţiunile ce urmează să fie determinate. După terminarea calculului aferent ultimei grupe se examinează penultima etc., apropiindu-ne astfel de elementul conducător, al cărui echilibru se asigură de momentul de echilibrare, care îi este aplicat.

Elementele mecanismului, a cărui schemă este reprezentată în fig. 5.98, sînt încărcate fiecare cu o forţă care este rezultanta tuturor forţelor aplicate elementului respectiv. Se arată cum trebuie determinate reacţiunile în toate cuplele cinematice şi de asemenea momentul rezultant M, aplicat elementului conducător *1*.

Schema mecanismului dat poate fi împărţită în patrulaterul *ABCDA* şi triunghiul *DEFD*. Calculul se începe cu triunghiul *DEFD*, în care elementul *DE* serveşte drept conducător, iar elementele *4* şi *5* formează o grupă cu două braţe (diodă de aspectul 2).

Triunghiul DEFD. Asupra elementelor conduse *4* şi *5* sînt aplicate forţele exterioare de rezistenţă $\vec{P}_4\ (P_4, \sigma_4)$ şi $\vec{P}_5\ (P_5, \sigma_5)$; rezultatul acestor acţiuni provoacă din partea elementului conducător *3* reacţiunea $\vec{P}_{34}$, (P_{34}, σ_{34}), din partea elementului fix *6* — reacţiunea $\vec{P}_{65}\ (P_{65}, \sigma_{65})$, iar în articulaţia interioară — reacţiunea $\vec{P}_{45}\ (P_{45}, \sigma_{45})$ sau $\vec{P}_{54} = -\vec{P}_{45}$ (aici şi mai departe σ cu indici corespunzători este unghiul de înclinare a vectorului forţei $\vec{P}$ cu aceiaşi indici faţă de axa Ox.)

Ecuaţiile de echilibru ale elementelor *4* şi *5* sînt

elementul *4*

$$\vec{P}_{34} + \vec{P}_4 + \vec{P}_{54} = 0, \tag{5.225}$$

elementul *5*

$$\vec{P}_{45} + \vec{P}_5 + \vec{P}_{65} = 0. \tag{5.226}$$

Deoarece $\vec{P}_{54} = - \vec{P}_{45}$, atunci adunînd ecuaţiile (5.225) şi (5.226), obţinem

$$\vec{P}_{34} + \vec{P}_4 + \vec{P}_5 + \vec{P}_{65} = 0. \quad (5.227)$$

Pentru reacţiunea $\vec{P}_{34}$ se cunoaşte punctul prin care trece dreapta suport a vectorului ei, iar pentru reacţiunea $\vec{P}_{65}$ se cunoaşte direcţia dreptei suport — pependiculară pe direcţia DF, dar în cazul general nu se cunoaşte poziţia dreptei suport. Totuşi, în cazul particular de faţă dreapta suport trece prin punctul F, deoarece în el se intersectează vectorii $\vec{P}_5$ şi $\vec{P}_{45}$ ai celor două forţe aplicate elementului *5*.

Pentru determinarea valorii algebrice a vectorului $\vec{P}_{65}$, este convenabilă folosirea ecuaţiei momentelor forţelor, care acţionează asupra elementelor *4* şi *5*, în raport cu punctul E. Avem

$$P_4 h_4 + P_5 h_5 - P_{65} h_{65} = 0, \quad (5.228)$$

unde h cu indicii corespunzători este perpendiculara coborîtă din punctul E pe dreapta suport a vectorului forţei cu aceiaşi indici.

După calculul lui P_{65}, necunoscuta $\vec{P}_{34}$ se poate găsi prin construirea planului forţelor (fig. 5.98, *b*) pe baza ecuaţiei (5.227).

Pentru determinarea reacţiunii $\vec{P}_{45}$ din cupla cinematică *4 — 5* se poate utiliza ecuaţia (5.226) (fig. 5.98, *b*).

Aceeaşi problemă se poate rezolva şi analitic. Ecuaţia (5.227) se descompune în ecuaţii de proiecţii ale vectorilor forţă pe axele de coordonate

$$\left.\begin{aligned} P_{34}\cos\sigma_{34} + P_4\cos\sigma_4 + P_5\cos\sigma_5 + P_{65}\cos\sigma_{65} = 0, \\ P_{34}\sin\sigma_{34} + P_4\sin\sigma_4 + P_5\sin\sigma_5 + P_{65}\sin\sigma_{65} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5.229)$$

La aceste ecuaţii trebuie adăugată ecuaţia momentelor obţinută pe baza ecuaţiei (5.228)

$$P_4 l_{EO_4}\sin(\sigma_4-\varphi_4)+P_5 l_{EF}\sin(\sigma_5-\varphi_4)+P_{65} l_{EF}\sin(\sigma_{65}-\varphi_4)=0, \quad (5.230)$$

din care se determină valoarea algebrică a vectorului $\vec{P}_{65}$.

Rezolvarea ulterioară a ecuaţiilor (5.229) nu prezintă dificultăţi. Mai întîi se determină tg σ_{34} şi σ_{34}, ceea ce se realizează, după izolarea primilor termeni, prin împărţirea celei de a doua ecuaţii la prima, iar apoi din una din ecuaţiile sistemului (5.229) se calculează P_{34}.

Patrulaterul ABCDA. Elementul *2* este încărcat cu forţa $\vec{P}_2$ (P_2, σ_2), elementul *3* — cu forţa $\vec{P}_3$ (P_3, σ_3) şi cu forţa $\vec{P}_{43}$ (P_{43}, σ_{43}) de acţiune a elementului *4* asupra elementului *3*. Ca rezultat al aplicării acestor forţe apar reacţiunile căutate $\vec{P}_{12}$ (P_{12}, σ_{12}), $\vec{P}_{63}$ (P_{63}, σ_{63}) şi $\vec{P}_{23}$ (P_{23}, σ_{23}), unde $\vec{P}_{23} = - \vec{P}_{32}$.

Ecuaţiile de echilibru ale elementelor *2* şi *3* sînt
elementul *2*

$$\vec{P}_{12} + \vec{P}_2 + \vec{P}_{32} = 0, \tag{5.231}$$

elementul *3*

$$\vec{P}_{23} + \vec{P}_3 + \vec{P}_{43} + \vec{P}_{63} = 0. \tag{5.232}$$

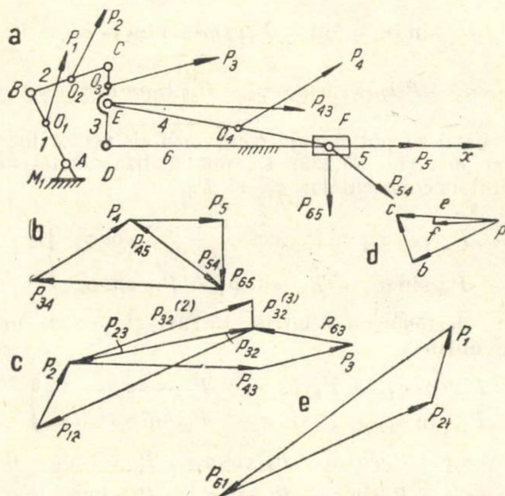


Fig. 5.98.

În scopul simplificării rezolvării ultimelor două ecuaţii reprezentăm vectorul $\vec{P}_{23}$ sau vectorul $\vec{P}_{32}$ prin cele două proiecţii pe direcţiile *BD* şi *DC*. Avem

$$\vec{P}_{32} = \vec{P}_{32}^{(2)} + \vec{P}_{32}^{(3)}, \quad \vec{P}_{23} = \vec{P}_{23}^{(2)} + \vec{P}_{23}^{(3)}. \tag{5.233}$$

Acum, în locul lui (5.231) şi (5.232) se obţine

$$\vec{P}_{12} + \vec{P}_2 + \vec{P}_{32}^{(2)} + \vec{P}_{32}^{(3)} = 0, \tag{5.234}$$

$$\vec{P}_{23}^{(2)} + \vec{P}_{23}^{(3)} + \vec{P}_{43} + \vec{P}_3 + \vec{P}_{63} = 0. \tag{5.235}$$

Componentele $P_{32}^{(2)}$ şi $P_{23}^{(3)}$ se pot determina din ecuaţiile momentelor forţelor, care acţionează asupra elementului *2*, faţă de punctul *B* şi a forţelor care acţionează asupra elementului *3*, faţă de punctul *D*. Se obţine

$$P_2 h_2 + P_{32}^{(3)} h_{32}^{(3)} = 0, \tag{5.236}$$

$$P_{43} h_{43} - P_3 h_3 + P_{23}^{(2)} h_{23}^{(2)} = 0, \tag{5.237}$$

unde, ca și înainte, h cu indicii corespunzători este brațul de pîrghie al vectorului forță cu aceiași indici.

Reacțiunile căutate $\vec{P}_{12}$ și $\vec{P}_{63}$ se determină prin construirea planului forțelor (fig. 5.98, *c*) pe baza ecuațiilor (5.234) și (5.235). La rezolvarea prin metoda analitică a aceleiași probleme relațiile (5.236) și (5.237) trebuie reprezentate în forma algebrică

$$P_2 l_{BO_2} \sin(\sigma_2 - \varphi_2) + P_{32}^{(3)} l_{BC} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \quad (5.238)$$

$$P_{43} l_{DE} \sin(\sigma_{43} - \varphi_3) + P_3 l_{DO3} \sin(\sigma_3 - \varphi_3) + P_{23}^{(2)} l_{DC} \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \quad (5.239)$$

Din aceste ecuații se pot calcula componentele vectorilor $P_{32}^{(3)}$ și $P_{23}^{(2)}$, apoi conform ecuației (5.233) se pot utiliza următoarele ecuații pentru calculul necunoscutelor σ_{32} și P_{32}

$$\left.\begin{aligned} P_{32} \cos \sigma_{32} &= P_{32}^{(2)} \cos \varphi_2 + P_{32}^{(3)} \cos \varphi_3 \\ P_{32} \sin \sigma_{32} &= P_{32}^{(2)} \sin \varphi_2 + P_{32}^{(3)} \sin \varphi_3. \end{aligned}\right\} \quad (5.240)$$

În sfîrșit, desfășurînd relațiile (5.231) și (5.232) în ecuații de proiecții, se obțin

$$\left.\begin{aligned} P_{12} \cos \sigma_{12} + P_2 \cos \sigma_2 + P_{32} \cos \sigma_{32} &= 0, \\ P_{12} \sin \sigma_{12} + P_2 \sin \sigma_2 + P_{32} \sin \sigma_{32} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (5.241)$$

$$\left.\begin{aligned} P_{23} \cos \sigma_{23} + P_3 \cos \sigma_3 + P_{43} \cos \sigma_{43} + P_{63} \cos \sigma_{63} &= 0, \\ P_{23} \sin \sigma_{23} + P_3 \sin \sigma_3 + P_{43} \sin \sigma_{43} + P_{63} \sin \sigma_{63} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (5.242)$$

Aceste ecuații permit calcularea lui P_{12}, σ_{12} și P_{63}, σ_{63}.

Elementul conducător 1. Elementul 1 se găsește sub acțiunea forței $\vec{P}_{21}$ (P_{21}, σ_{21}), a forței $\vec{P}_1$ (P_1, σ_1) și a unui cuplu de forțe cu momentul căutat M_1. Avem

$$\vec{P}_{21} + \vec{P}_1 + \vec{P}_{61} = 0, \qquad M_1 - P_{21} h_{21} - P_1 h_1 = 0. \quad (5.243)$$

Prima ecuație se poate construi (fig. 5.98, *d*) sau descompune în ecuații de proiecții, din care se determină P_{61}, σ_{61}.

Pentru calculul lui M_1 este necesar ca a doua ecuație (5.243) să fie reprezentată în forma algebrică

$$M_1 + P_{21} l_{AB} \sin(\sigma_{21} - \varphi_1) + P_1 l_{AO_1} \sin(\sigma_1 - \varphi_1) = 0. \quad (5.244)$$

Pe baza exemplului arătat se pot trage următoarele concluzii: a) analiza forțelor (calculul cinetostatic) trebuie începută cu grupa assurică cea mai îndepărtată de elementul conducător; b) pentru analiză se pot folosi fie ecuațiile vectoriale ale fiecărui element al grupei, fie ecuațiile vectoriale ale tuturor elementelor ei; c) pentru utilizarea ecuațiilor de momente, reacțiunile necunoscute trebuie

reprezentate sub forma a două componente cu direcţii cunoscute; d) pentru aplicarea ecuaţiei de momente se alege un punct astfel, ca momentele unora dintre reacţiunile căutate să se anuleze.

În fig. 5.99 este reprezentată schema cinematică a unui mecanism în structura căruia intră grupa assurică de cl. III, ord. 3 (cu trei biele). Se presupune că fiecărui element i se aplică o forţă (vectorii acestei forţe nu sînt indicaţi în fig. 5.99), iar elementului conducător i se aplică un cuplu cu momentul căutat M_1. Se cere determinarea reacţiunilor în toate cuplele cinematice şi momentul M_1.

Mai departe se indică planul de rezolvare a problemei propuse. Vectorii $\vec{P}_{12}$, $\vec{P}_{64}$ şi $\vec{P}_{65}$ ai reacţiunilor necunoscute se reprezintă prin cele două componente de forma $\vec{P}^n$ şi $\vec{P}^t$ fiecare. În acest caz se pot determina componentele de forma $\vec{P}^t$ din ecuaţiile momentelor forţelor ce acţionează asupra elementelor *2*, *4* şi *5* faţă de centrele articulaţiilor respective ale elementului *3*. După aceasta, din ecuaţia momentelor faţă de punctul S a tuturor forţelor ce acţionează asupra elementelor *2*, *3*, *4* şi *5* trebuie determinată mărimea $\vec{P}^n_{64}$. În această ecuaţie momentele componentelor necunoscute P^n_{12} şi P^n_{65} vor fi nule. În încheiere, cu ajutorul ecuaţiei vectoriale de echilibru a întregii părţi conduse se vor putea determina reacţiunile $\vec{P}^n_{12}$ şi $\vec{P}^n_{65}$. Reacţiunile în articulaţiile elementului *3* se determină din ecuaţiile vectoriale de echilibru ale elementelor *2*, *4* şi *5*.

Rezolvarea aceleiaşi probleme cu metoda analitică se face în aceeaşi succesiune, după ce toate ecuaţiile au fost scrise în formă algebrică.

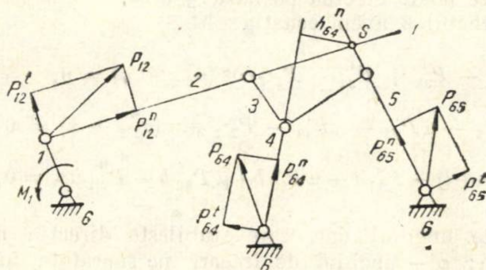


Fig. 5.99.

Dacă se ia în considerare şi frecarea în cuplele cinematice, atunci după reacţiunile determinate printr-un calcul prealabil trebuie determinate momentele de frecare. Pentru determinarea sensurilor momentelor de frecare trebuie cunoscute vitezele unghiulare relative, care se stabilesc cu ajutorul planurilor vitezelor. De exemplu,

pentru determinarea sensului momentului de frecare M_{32} în cupla cinematică *2 — 3* (fig. 5.98, *a*) trebuie utilizată relația

$$M_{32} = \mu P_{32} r_{32} \tag{5.245}$$

unde μ este coeficientul de frecare pe suprafețele de contact ale cuplului *2 — 3*, iar r_{32} raza fusului aceluiași cuplu.

Pentru stabilirea sensului lui M_{32} se utilizează planul vitezelor (fig. 5.98, *e*), cu ajutorul căruia se determină viteza unghiulară relativă ω_{23}

$$\omega_{23} = \omega_2 - \omega_3 = |\omega_2| - |\omega_3|, \tag{5.246}$$

unde, conform cu fig. 5.98, *a* și *e*, se constată că ω_2 și ω_3 sînt orientate în sens pozitiv și deoarece $|\omega_3| > |\omega_2|$ atunci $M_{23} < 0$ și $M_{32} > 0$.

După ce au fost determinate momentele de frecare în toate cuplele cinematice, trebuie efectuat calculul forțelor în întregul mecanism, cu luarea în considerare a momentelor de frecare indicate.

§ 5.31. Mecanisme cu camă

Dîndu-se forța $\vec{P}_2$ care acționează asupra tachetului *2* (fig. 5.100), să se determine reacțiunile în cuplele cinematice și momentul motor M_1.

Distribuirea reacțiunilor și a forțelor de frecare în cupla de translație a tachetului se poate efectua pe baza § 5.27.

Pentru tachetul *2* avem ecuația

$$\left.\begin{aligned} -P'_{32} + P''_{32} + P_{2'2}\cos(\overset{n}{\sigma}_{2'2} + \varphi) = 0,\\ -P_2 - \mu P'_{32} - \mu P''_{32} - P_{2'2}\sin(\overset{n}{\sigma}_{2'2} + \varphi) = 0,\\ P'_{32}(a+l) - P''_{32}a - \mu P'_{32}b + \mu P''_{32}b - \overset{n}{P}_{2'2}\mu r_1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.247}$$

unde $\overset{n}{\sigma}_{2'2}$ este unghiul dat, care stabilește direcția normalei la profilul camei; φ — unghiul de frecare pe suprafața fusului rolei; r_1 — raza fusului; μ — coeficientul de frecare pentru fusul rolei.

În sistemul de ecuații (5.247) avem următoarele necunoscute: P'_{32}, P''_{32} și $P_{2'2}$, care se pot determina direct sau prin metoda aproximațiilor succesive. Rola *2* din partea tachetului se găsește sub acțiunea forței $\vec{P}_{22'} = -\vec{P}_{2'2}$ iar din partea camei *1* sub acțiunea forței $\vec{P}_{12} = -\vec{\overset{n}{P}}_{22'}$.

Asupra camei *1* acţionează forţele $\vec{P}^{n}_{2'1} = \vec{P}^{n}_{22'}$, un cuplu de forţe de echilibrare M; în articulaţia fixă acţionează reacţiunea necunoscută $\vec{P}_{31}$ şi un cuplu de forţe de frecare de moment $M_{31} = \mu_0 P_{31} r_2$, unde μ_0 este coeficientul de frecare pe suprafaţa fusului, a cărui rază este r_2.

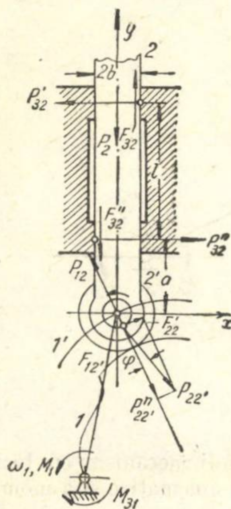


Fig. 5.100.

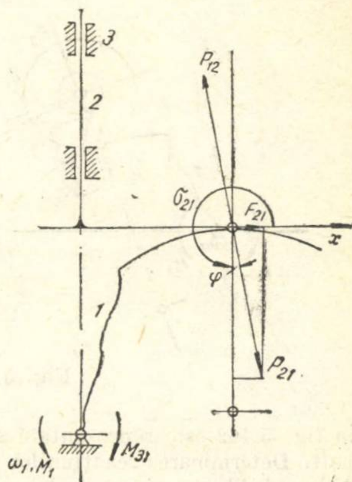


Fig. 5.101.

Pentru determinarea lui P_{31}, σ_{31} şi M_1 avem condiţiile

$$\left.\begin{aligned} P^{n}_{22'} \cos \sigma^{n}_{22'} + P_{31} \cos \sigma_{31} &= 0, \\ P^{n}_{22'} \sin \sigma^{n}_{22'} + P_{31} \sin \sigma_{31} &= 0, \\ M_1 - M_{31} - P^{n}_{22'} h^{n}_{22'} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (5.248)$$

unde $h^{n}_{22'}$ este braţul de pîrghie al forţei $\vec{P}^{n}_{22'}$.

Sistemul de ecuaţii (5.248) se rezolvă prin metoda cunoscută.

Pentru determinarea randamentului mecanismului examinat trebuie cunoscut M^{i}_{1} — momentul de echilibrare — în ipoteza că frecarea lipseşte, iar după aceasta se obţine

$$\eta = \frac{M^{i}_{1}}{M_1}.$$

După studierea mecanismului anterior, analiza mecanismului reprezentat în fig. 5.101 nu prezintă dificultăţi. Aici trebuie îndreptată atenţia doar asupra direcţiei forţei $\vec{P}_{21}$, care acţionează în punctul de contact al tachetului *2* — cama *1*. Această forţă este înclinată faţă de perpendiculara pe discul tachetului cu unghiul de frecare φ.

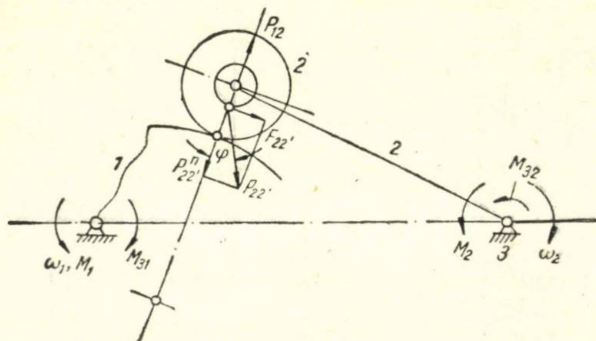


Fig. 5.102.

În fig. 5.102 este reprezentată schema unui mecanism cu tachet oscilant. Determinarea reacţiunilor în cuplele cinematice şi a momentului de echilibrare M_1 se efectuează la fel ca în cazul mecanismului cu tachet cu o rolă la extremitate.

5.10
Echilibrarea mecanismelor [1]

§ 5. 32. Echilibrarea elementelor în mişcare de rotaţie

Un element în mişcare de rotaţie este echilibrat dacă vectorul rezultant şi momentul rezultant al forţelor centrifuge de inerţie ale punctelor sale materiale sînt egale cu zero. Articulaţiile fixe ale unui asemenea element nu au presiuni dinamice. A echilibra un element înseamnă a reduce la zero vectorul şi momentul rezultant de mai înainte. Acest lucru se realizează prin adăugarea sau îndepărtarea unei mase de mărime determinată. Masa adăugată se numeşte *contra-*

greutate. *Echilibrarea statică* constă în aducerea la zero a vectorului rezultant; *echilibrarea dinamică* — în aducerea la zero a vectorului rezultant şi a momentului rezultant. Echilibrarea statică se obţine numai cu o contragreutate, cea dinamică — cu două, aşezate în două plane paralele diferite. Astfel de contragreutăţi produc o forţă şi un cuplu de forţe de echilibrare.

Elementul în mişcare de rotaţie se presupune împărţit prin n plane, perpendiculare pe axa Ox, astfel că pentru fiecare parte aşezată între două plane vecine, se cunoaşte poziţia centrului de greutate. În fig. 5.103 este indicată una din aceste părţi sub forma unei mase m_1 concentrată în centrul de greutate. Pentru viteza unghiulară dată se cere determinarea presiunilor $\vec{P}_I$ şi $\vec{P}_{II}$. Pentru rezolvarea problemei propuse avem ecuaţiile

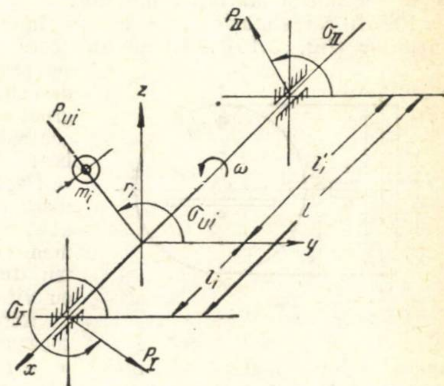


Fig. 5.103.

$$\left.\begin{aligned} P_I l \cos\sigma_I + \omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l'_i \cos\sigma_{ui} &= 0, \\ P_I l \sin\sigma_I + \omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l'_i \sin\sigma_{ui} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{5.249}$$

$$\left.\begin{aligned} P_{II} l \cos\sigma_{II} + \omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l_i \cos\sigma_{ui} &= 0, \\ P_{II} l \sin\sigma_{II} + \omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l_i \sin\sigma_{ui} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.250}$$

unde $i = 1, 2, ..., n$. Din (5.249)

$$\operatorname{tg}\sigma_1 = \frac{-\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l'_i \sin\sigma_{ui}}{-\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l'_i \cos\sigma_{ui}}. \tag{5.251}$$

Acum P_I şi σ_I se pot determina din relaţia (5.249). Determinarea lui σ_{II} şi P_{II} se obţine în mod analog.

Pentru a elibera lagărele de presiunile dinamice este necesar să se determine masele contragreutăţilor m_{c1} şi m_{c2} şi razele r_{c1} şi r_{c2} ale fixării lor în două plane de echilibrare alese. Cu ajutorul ecuaţiilor (5.249) şi (5.250) se pot calcula mărimile momentelor statice ale maselor $m_{c1}r_{c1}$ şi $m_{c2}r_{c2}$ şi apoi, dîndu-se razele r_{c1} şi r_{c2}, se determină şi mărimile maselor.

Echilibrarea statică pe cale experimentală se execută cu ajutorul cuţitelor (fig. 5.104). Elementul care urmează să fie echilibrat se opreşte după oscilaţii în poziţia de echilibru stabil, centrul ei de greutate se aşază pe verticală sub centrul de rotaţie. Pentru echilibrare, în poziţia diametral opusă se fixează o contragreutate, a cărei masă m_c, pentru un loc de fixare ales, se alege experimental. O asemenea echilibrare se utilizează pentru discuri subţiri care se rotesc cu viteze relativ mici.

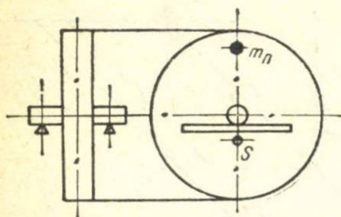


Fig. 5.104.

Echilibrarea dinamică se efectuează pe maşini speciale. Schema uneia din cele mai simple maşini este reprezentată în fig. 5.105, *a*. Partea mobilă *A* a maşinii are o axă de rotaţie şi un arc *B*. Pe lagărele *C* se aşază elementul *D*, care urmează să fie echilibrat şi care, cu mijloace exterioare, se aduce la o rotaţie mare. Dacă elementul nu este echilibrat, lagărele *C* vor suporta acţiunea unor presiuni dinamice, care aduc maşina într-o mişcare de oscilaţie; vectorii lor se rotesc. Amplitudinea acestor oscilaţii va fi cea mai mare, atunci cînd apare fenomenul de rezonanţă, adică atunci cînd perioadele oscilaţiilor forţate şi proprii ale maşinii vor deveni egale. Amplitudinea oscilaţiilor maxime se înregistrează pe hîrtia afumată *F* cu ajutorul unui ac *E*. Cea mai mare amplitudine x_0 este proporţională cu momentul static de dezechilibrare m_0r_0.

Pentru determinarea coeficientului de proporţionalitate μ, într-un punct arbitrar al planului *I—I*, la distanţa r_k de centru, se fixează o mică greutate de masă m_k şi în mod experimental se determină amplitudinea x_1 de dezechilibrare a elementului de masă m_k. După aceasta se transportă greutatea în sens opus la aceeaşi distanţă de centru şi se determină din nou amplitudinea de dezechilibrare x_2. În fig. 5.105, *b* este reprezentată diagrama vectorială, din care se vede că $x_1 = x_0 + x_k$ şi $x_2 = x_0 - x_k$. Din paralelogramul vectorilor (fig. 5.105, *b*), rezultă $2x_k^2 + 2x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$, de unde avem

$$x_k = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_0^2}{2}}. \qquad (5.252)$$

Coeficientul de proporţionalitate este

$$\mu = \frac{m_k r_k}{x_k}. \qquad (5.253)$$

Momentul static al contragreutăţii este

$$m_c r_c = m_0 r_0 = \mu x_0. \tag{5.254}$$

Unghiul de fixare este

$$\alpha = \arccos \frac{x_0^2 + x_k^2 - x_1^2}{2x_0 x_k} \tag{5.255}$$

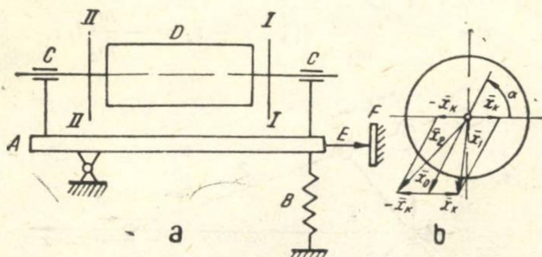


Fig. 5.105.

Pentru a vedea care din cele două valori α obţinute din ecuaţia (5.255) este cea reală, se aşază contragreutatea la început sub unghiul α_1 şi apoi sub unghiul α_2. La aşezarea corectă a contragreutăţii maşina nu oscilează.

După efectuarea operaţiilor descrise elementul se aşază astfel ca planul $I—I$ să se găsească deasupra axului de rotaţie. Pentru această poziţie a elementului se repetă experienţele de mai înainte. După aceasta elementul va fi complet echilibrat.

§ 5.33. Echilibrarea mecanismului pe fundaţie

În timpul mişcării unui mecanism, batiul lui suferă acţiunea presiunilor dinamice şi intră în oscilaţie; oscilează de asemenea şi fundaţia mecanismului. Cu cît fundaţia este mai masivă, cu atît mai mici sînt amplitudinile oscilaţiilor sale. Presiunile dinamice nu provoacă oscilaţii, dacă rezultanta şi momentul rezultant al forţelor de inerţie ale punctelor materiale ale elementelor mecanismului sînt egale cu zero. Reducerea la zero a forţei rezultante şi a momentului rezultant al forţelor de inerţie se obţine prin aşezarea de contragreutăţi.

Un mecanism este complet echilibrat dacă centrul de greutate al tuturor elementelor ale căror mase se consideră concentrate în centrele de greutate respective rămîne nemişcat şi dacă suma tuturor momentelor de inerţie I_{xz} şi I_{yz} ale elementelor sale este constantă. În cazul dat axele Ox şi Oy se aşază într-un plan paralel cu planul de mişcare al mecanismului, iar axa Oz este perpendiculară pe aceste axe. În practică este suficientă satisfacerea primei condiţii, dacă

mecanismul posedă numai un singur plan de mişcare. Dacă elementele mecanismului se mişcă în diferite plane paralele, neglijarea celei de a doua condiţii va fi cu atît mai sensibilă, cu cît sînt mai îndepărtate unul de altul planurile de mişcare.

Echilibrarea mecanismului bielă-manivelă (fig. 5.106) se poate obţine prin aşezarea a două contragreutăţi astfel calculate, încît centrele de greutate S_1 şi S_2 ale elementului *1* şi *2* să fie aşezate la distanţele

$$s_1 = -\frac{m_2 + m_3}{m_1} l_1, \qquad s_2 = -\frac{m_3}{m_2} l_2, \tag{5.256}$$

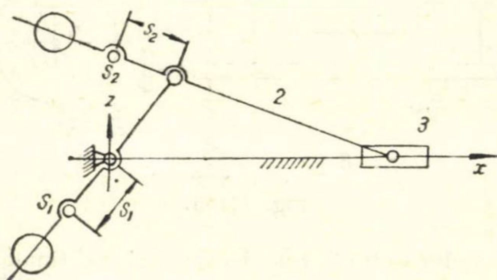


Fig. 5.106.

unde m_1 şi m_2 sînt masele manivelei şi bielei împreună cu contragreutăţile, s_1 şi s_2 coordonatele centrelor de greutate ale manivelei şi bielei împreună cu contragreutăţile, m_3 este masa elementului în mişcare rectilinie alternativă (pistonul).

Dîndu-se s_1 şi s_2 la masa dată a pistonului, se pot determina mărimile necesare ale maselor elementelor *1* şi *2*. Cunoscînd mărimile maselor acestor elemente, se calculează mărimile maselor contragreutăţilor, după aceasta se determină locurile lor de fixare.

Aşezarea contragreutăţii pe bielă este incomodă din punct de vedere constructiv, de aceea se consideră deseori suficientă aşezarea unei singure contragreutăţi pe manivelă şi astfel se asigură numai o echilibrare parţială. În acest caz mărimea momentului static $m_1 s_1$ al masei manivelei împreună cu contragreutatea se determină din relaţia

$$m_1 s_1 = -\frac{l_1}{l_2} m_2 (l_2 - s_2), \tag{5.257}$$

unde s_2 este coordonata centrului de greutate al bielei *2* (fig. 5.107).

Determinarea mărimii masei contragreutăţii şi a poziţiei ei de fixare se face ca mai înainte. În cazul dat sînt neechilibrate forţele de inerţie, după direcţia axei de deplasare a pistonului.

Echilibrarea mecanismelor complexe se limitează de obicei la plasarea de contragreutăţi numai pe elementele în rotaţie. Pentru determinarea maselor contragreutăţilor se poate utiliza metoda urmă-

toare. În fig. 5.108 este indicată schema unui mecanism cu șase elemente, care poate fi parțial echilibrat prin așezarea unor contragreutăți pe elementele *1* și *3*.

Masa m_2 a bielei *2* se concentrează convențional în punctele *B* și *C*. Pentru calculul mărimilor acestor mase se folosesc ecuațiile.

$$m_2' + m_2'' = m_2, \qquad m_2' s_2 = m_2'' (l_2 - s_2). \tag{5.258}$$

Cu ecuații analoge se pot determina mărimile maselor m_4' și m_4'' concentrate în mod convențional în punctele *E* și *F*. După aceasta

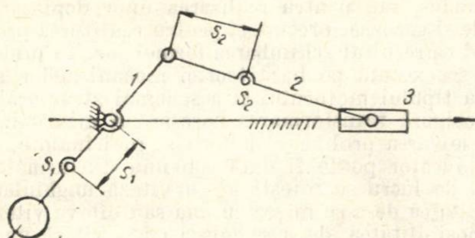


Fig. 5.107.

se calculează mărimile m_{c1} și m_{c2} ale maselor contragreutăților așezate pe elementele *1* și *3* cu condiția ca centrele de greutate împreună cu masele suplimentare să coincidă cu centrele de rotație.

Echilibrarea forțelor de inerție a masei în mișcare de translație $(m_4'' + m_5)$ se realizează prin amplificarea construcției mecanismului

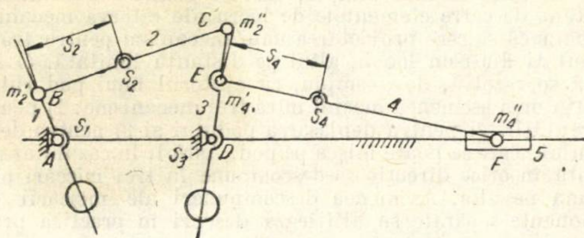


Fig. 5.108.

În acest scop în construcția sa se introduc transmisii cu roți dințate pe care se așază contragreutățile ale căror mărimi sînt astfel calculate încît forțele lor de inerție îndreptate perpendicular pe axa de mișcare a pistonului (masei în mișcare de translație) se anulează reciproc, iar cele îndreptate pe axa sa acționează în sens opus forței de inerție a pistonului (masei în mișcare de translație).

5.11

Proiectarea mecanismelor [1, 2, 3, 9, 11, 13, 15]

§ 5.34. Problemele de bază ale proiectării

Orice mecanism este destinat pentru transformarea mişcării elementului său conducător în mişcarea necesară a elementului de lucru (elementul condus) sau pentru realizarea unor deplasări de corpuri solide, lichide şi gazoase, precum şi pentru realizarea prelucrării unor obiecte, avînd ca rezultat schimbarea formei lor. În problema de proiectare, care se execută pe baza teoriei mecanismelor şi maşinilor, intră alegerea tipului motorului şi a schemei structurale a mecanismului, care asigură transformarea necesară a mişcării.

Pentru rezolvarea problemelor descrise mai înainte, mişcarea elementului conducător poate fi dată sub una din următoarele forme: 1. Elementul de lucru se roteşte a) cu viteză unghiulară constantă, b) cu posibilitatea de a se mişca cu una sau cîteva viteze unghiulare date, c) cu posibilitatea de a se mişca cu o viteză unghiulară constantă oarecare, situată între anumite limite date, d) cu viteză unghiulară variabilă, care se schimbă după o lege dată.

2. Elementul de lucru are o mişcare de translaţie cu o viteză care poate fi dată ca mai înainte (pentru elementul în rotaţie).

3. Elementul de lucru execută o mişcare planparalelă de formă generală, care deseori se dă astfel încît unul din punctele elementului trebuie să descrie o curbă dată.

Dacă mişcarea necesară are un caracter foarte complicat ea se descompune în mişcări mai simple, care se realizează consecutiv sau concomitent de către elementele de lucru ale cîtorva mecanisme. Să presupunem că se cere proiectarea unui mecanism pentru transportul unei greutăţi dintr-un loc în altul pe distanţă limitată. O astfel de problemă se rezolvă, de exemplu, cu ajutorul unui pod rulant. În compoziţia unei asemenea maşini intră trei mecanisme: 1) pentru ridicarea greutăţii, 2) pentru deplasarea podului şi 3) pentru deplasarea căruciorului, care se poate mişca pe pod. Astfel, în cazul dat mişcarea complicată în orice direcţie se descompune în trei mişcări perpendiculare una pe alta. Asemenea descompuneri ale mişcării necesare în componente separate se utilizează deseori în practica proiectării mecanismelor.

Pentru realizarea temei (1, a) se utilizează transmisii cu roţi de fricţiune, cu roţi dinţate, cu curea şi cu lanţ.

Tema (1, b) necesită proiectarea unor cutii de viteze, care permit schimbarea în trepte a vitezei unghiulare a elementului de lucru. În acest scop se utilizează transmisii cu roţi dinţate şi cu curele.

Pentru mecanismele ce se proiectează conform temei (1, c), se utilizează variatoare de viteze cu fricţiune (aici nu sînt examinate).

Variantele pentru executarea temei (1, d) sînt extrem de diferite în funcţie de legea de mişcare dată a elementului de lucru. În acest

caz se pot întîlni utilizări de mecanisme foarte variate, inclusiv mecanismele cu bare ce posedă numai cuple inferioare.

Variantele pentru executarea temei 2 sînt de asemenea foarte numeroase, deoarece legile de mişcare date ale elementului în mişcare de translaţie sînt diferite. Mişcarea de translaţie prescrisă este în majoritatea cazurilor rectilinie, ceea ce în unele cazuri se realizează fără cuple de translaţie.

Tema 3 prevede utilizarea unor mecanisme cu bare, cu cuple inferioare sau combinate.

Transmisiile hidraulice nu se studiază aici.

Mai departe vor fi examinate metodele de proiectare ale următoarelor mecanisme: 1) de fricţiune şi dinţate, 2) cu curele, 3) matteze, 4) cu camă, 5) cu bare cu cuple inferioare.

§ 5.35. Mecanisme cu roţi de fricţiune şi cu roţi dinţate

Mecanismele cu roţi de fricţiune se utilizează pentru transmisia rotaţiei între arbori cu axe paralele sau întretăiate. Raportul de transmitere pentru astfel de mecanisme se fixează la cel mult cinci. Pentru vitezele periferice ale roţilor acestor mecanisme se recomandă mărimi de cel mult 10 m/s.

Utilizarea mecanismelor cu roţi dinţate este variată. Mecanismele cu roţi dinţate cilindrice cu dinţi drepţi, oblici sau în săgeată se pot executa într-o singură treaptă sau cu mai multe trepte (fig. 5.109)

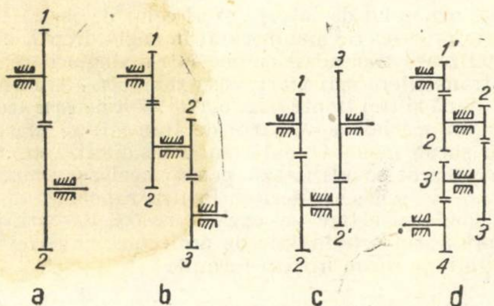


Fig. 5.109.

pentru $i_{12} \leqslant 10$ — într-o singură treaptă (fig. 5.109, *a*); pentru $i_{13} = 10 \ldots 70$— în două trepte succesive (fig. 5.109, *b*) şi cu un singur ax (fig. 5.109, *c*); pentru $i_{14} = 70 \ldots 300$ (fig. 5.109, *d*).

Condiţia de a avea un singur ax (fig. 5.109, *c*) este

$$r_1 + r_2 = r_{2'} + r_3. \qquad \frac{r_2 r_3}{r_1 r_{2'}} = i_{13}. \tag{5.259}$$

În unităţi relative în ultimele două ecuaţii sînt trei necunoscute. Condiţia de a avea un singur ax se poate satisface dacă pentru obţinerea unei soluţii precise se dă raportul de transmitere al uneia din trepte. De obicei, raportul de transmitere total se descompune astfel, ca raportul de transmitere al treptei rapide să fie mai mare decît cel al treptei încete. În acest caz, pentru rezolvarea problemei propuse se pot utiliza egalităţile

$$r_2 = i_{12} r_1, \quad r_{2'} = \frac{i_{12}+1}{i_{23}+1} r_1, \quad r_3 = i_{23} \frac{i_{12}+1}{i_{23}+1} r_1. \quad (5.260)$$

Deoarece mărimile modulelor trebuie să fie standardizate, deseori respectarea primei egalităţi din (5.259) nu reuşeşte. În astfel de cazuri

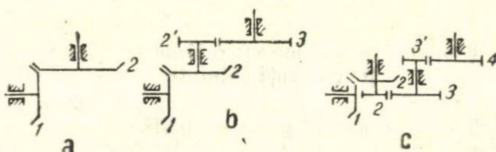


Fig. 5.110.

prelucrarea dinţilor roţilor uneia sau a celor două perechi se prevede cu o deplasare a profilului iniţial sau roţile se execută cu dinţi oblici cu module normale standardizate, care asigură satisfacerea primei egalităţi din (5.259).

Dacă axele arborelui de intrare şi al celui de ieşire trebuie să se intersecteze (în practică cel mai des sînt în unghi drept), atunci pentru $i_{12} \leqslant 5$ se utilizează transmisii conice într-o singură treaptă; pentru rapoarte de transmitere mai mari, însă sub 150 — transmisii conice-cilindrice în două şi trei trepte (fig. 5.110). Tot pentru aceeaşi aşezare a arborilor şi în special la rapoarte de transmitere mari se folosesc transmisii cu şurub melc. O dată cu transmisiile cu roţi dinţate obişnuite, în prezent se utilizează pentru aceleaşi scopuri şi mecanisme planetare de scheme diferite. Pentru rapoarte de transmitere mari, mecanismele planetare se caracterizează deseori prin randament mic. Spre a cunoaşte înainte de proiectare valoarea preliminară a randamentului, se poate utiliza formula

$$\eta_{1H} = 1 - (1 - i_{H1}) \psi_H, \quad \eta_{H1} = \frac{1}{1 + (1 - i_{H1}) \psi_H}, \quad (5.261)$$

unde η_{1H} este randamentul mecanismului planetar în cazul transmiterii puterii dela roata *1* la braţul port-sateliţi H, η_{H1} acelaşi randament în cazul transmiterii puterii de la braţul port-sateliţi H la roata *1*, i_{H1} raportul de transmitere al mecanismului planetar de la braţul port-sateliţi H la roata *1*, $\psi_H = 1 - \eta$ coeficientul de pierderi, η randamentul mecanismului cînd braţul port-sateliţi H este în repaus şi roata *1* care a fost înainte fixă este liberă, adică la inversarea mişcării.

La determinarea randamentului mecanismului în mişcarea inversată trebuie avut în vedere că randamentul roţilor dinţate, în funcţie de clasa de precizie a prelucrării, este egal cu: pentru clasa I — 0,99, pentru clasa II — 0,98, pentru clasa III — 0,96, pentru clasa IV — 0,93.

În fig. 5.111 sînt indicate schemele unor mecanisme planetare simple. Pentru mecanismele 5.111 *a*, *b* şi *c* trebuie respectată condiţia de uniaxialitate, determinată în modul următor

$$\text{fig. } 5.111,\ a \qquad r_3 = r_1 + 2r_2, \tag{5.262}$$

$$\text{fig. } 5.111,\ b \qquad r_1 + r_2 = r_{2'} + r_3, \tag{5.263}$$

$$\text{fig. } 5.111,\ c \qquad r_1 + r_2 = r_3 - r_{2'}. \tag{5.264}$$

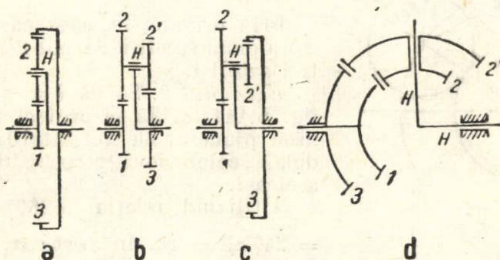


Fig. 5.111.

Condiţia de vecinătate în cazul mai multor sateliţi (fig. 5.112) este

$$k_1 < \frac{\pi}{\arcsin \dfrac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}}, \tag{5.265}$$

unde k_1 este numărul de sateliţi.

Numărul teoretic de sateliţi, din *condiţia de montaj*, făcînd abstracţie de condiţia de vecinătate este

$$\text{fig. } 5.111,\ a \qquad k_0 = z_1 i_{1H}, \tag{5.266}$$

$$\text{fig. } 5.111,\ b \text{ şi } c \quad k_0 = \frac{z_1 z_{2'}}{j}\, i_{1H}, \tag{5.267}$$

unde j este divizorul comun al numerelor z_1 şi z_2.

Numărul efectiv k de sateliţi se alege unul dintre factorii numărului k_0.

La proiectarea unei scheme date cu un raport de transmitere dat trebuie indicat numărul de dinţi ale roţilor, care să satisfacă toate condiţiile de mai înainte.

Exemplul 1. Se dă $i_{1H} = 6$, schema fig. 5.111, *a*. Să se proiecteze mecanismul planetar cu 5 sateliţi.

Analizînd ecuaţia (5.266) se observă că este indicată folosirea unui număr de dinţi multiplu de cinci. Se alege $z_1 = 20$. În acest caz din relaţia (5.266) $k_0 = 20 \cdot 6 = 120$. Prin urmare, $k = 5$ satisface condiţia de montaj.

Deoarece $i_{1H} = 1 + \frac{z_3}{z_1} = 6$, atunci $z_3 = 5 z_1 = 100$, iar din ecuaţia (5.262) avem $z_2 = (z_3 - z_1)\ 0{,}5 = (100-20)\ 0{,}5 = 40$.

Cu ajutorul relaţiei (5.265) se verifică condiţia de vecinătate

$$k_1 < \frac{\pi}{\arcsin \frac{40+2}{20+40}} = 4.$$

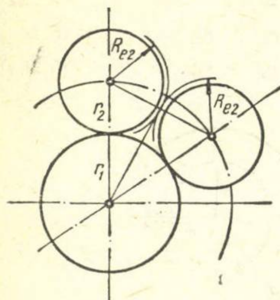


Fig. 5.112.

Prin urmare, în acest caz nu se pot aşeza cinci sateliţi. Se pot aşeza cel mult trei sateliţi.

Exemplul 2. Se dă $i_{1H} = 20$, schema fig. 5.111, *c*. Să se proiecteze un mecanism planetar cu trei sateliţi, dacă modulele celor două perechi de roţi sînt aceleaşi.

Utilizînd relaţia (5.267) se ia $z_1 = 24$, $z_{2'} = 18$. În acest caz, $k_0 = \frac{8640}{j}$; se vede de aici că pentru $k = 3$ condiţia de montaj este satisfăcută.

Pentru determinarea lui z_2 şi z_3 se foloseşte ecuaţia (5.264) din care rezultă $z_3 = z_2 + 42$ şi $i_{1H} = 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$, de unde se obţine $z_2 = 72$ şi $z_3 = 114$.

Verificînd cu relaţia (5.265) condiţia de vecinătate, se găseşte $k_1 = 3{,}56$, iar aceasta arată că condiţia dată se poate satisface.

Presupunînd că roţile vor fi prelucrate după clasa II de precizie, se obţine pentru mecanismul examinat, în cazul mişcării inversate, $\eta_{13} = \eta_{12}\,\eta_{23} = 0{,}98 \cdot 0{,}98 = 0{,}96$ şi conform ecuaţiei (5.261) se obţine $\eta_{1H} = 1 - \left|\left(1 - \frac{1}{20}\right)\right| \cdot 0{,}04 = 0{,}96.$

Exemplul 3. Se dă $i_{14} \approx 150$, schema fig. 5.112. Să se proiecteze mecanismul planetar, dacă modulele tuturor angrenajelor sînt egale.

Pentru obţinerea formulei raportului de transmitere se utilizează planul vitezelor (fig. 5.113). Se obţine

$$\frac{v_1}{v_4} = \frac{\omega_1 z_1}{\omega_4 z_4} = \frac{2 z_2}{z_3 - z_4},$$

de unde rezultă

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{2 z_2 z_4}{z_1 (z_3 - z_4)}. \tag{5.268}$$

Mai departe

$$z_3 = z_1 + 2z_2 \text{ şi } z_4 - z_{2'} = z_1 + z_2. \quad (5.269)$$

Pentru rezolvarea ulterioară

$$2z_2z_4 = i_{14}z_1(z_3 - z_4), \quad z_4 - z_{2'} = z_3 - z_2. \quad (5.270)$$

Deoarece i_{14} este mare, se ia $z_3 - z_4 = 1$, de unde se obţine

$$z_3 = z_4 + 1 \text{ şi } z_2 = z_{2'} + 1. \quad (5.271)$$

După aceasta, ecuaţia (5.270) se rezolvă în raport cu $z_{2'}$

$$z_1 = \frac{2z_{2'}^2 + 3z + 1}{0{,}5i_{1H} - z_{2'} - 1}. \quad (5.272)$$

Admiţînd $z_{2'} = 24$ se găseşte $z_1 = \frac{1\,225}{50} = 24{,}5$. Nu se obţine soluţia în numere întregi, de aceea se ia $i_{14} = 148$. Într-un asemenea caz avem $z_1 = 25$. Acum numerele dinţilor de la celelalte roţi sînt egale cu $z_2 = 25$, $z_{2'} = 24$, $z_3 = 75$, $z_4 = 74$.

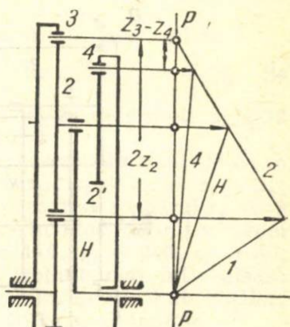


Fig. 5.113.

Pentru determinarea randamentului, mecanismul dat se descompune în două mecanisme cu rapoartele de transmitere i_{1H} şi i_{H4}, ale căror valori, pe baza fig. 5.113, sînt următoarele $i_{1H} = 4$ şi $i_{H4} = 37$. În mişcarea inversată randamentul primei trepte este $\eta^H_{13} = \eta^H_{12}\eta^H_{23} = 0{,}98 \cdot 0{,}98 = 0{,}96$, iar al celei de a doua trepte $\eta^H_{2'4} = 0{,}98$, unde se consideră că roţile vor fi prelucrate după clasa a II-a de precizie. După înlocuirea datelor în ecuaţia (5.261) se obţine $\eta_{1H} = 0{,}97$, $\eta_{H4} = 0{,}58$ şi $\eta_{14} = 0{,}97 \cdot 0{,}58 = 0{,}56$.

Din condiţia de montaj după relaţia (5.266) se obţine $k_0 = z_1 i_{1H} = 25 \cdot 4 = 100$, iar din condiţia de vecinătate $k_1 = 5{,}5$. Prin urmare, se pot aşeza cel mult cinci sateliţi.

În acele cazuri cînd este necesară asigurarea posibilităţii de variaţie în trepte a vitezei unghiulare a elementului condus, se utilizează cutii de viteză cu roţi dinţate, ale căror scheme sînt foarte variate. Să examinăm unele dintre ele.

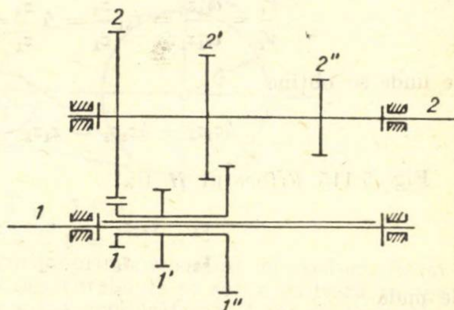


Fig. 5.114.

În fig. 5.114 este arătată o cutie de viteze obişnuită în trei trepte, la

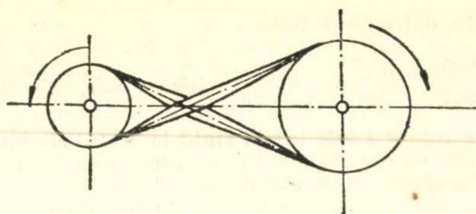


Fig. 5.117.

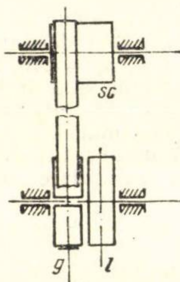


Fig. 5.118.

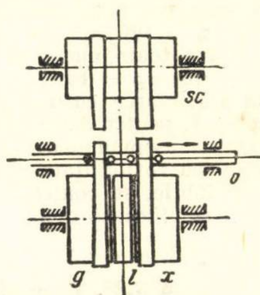


Fig. 5.119.

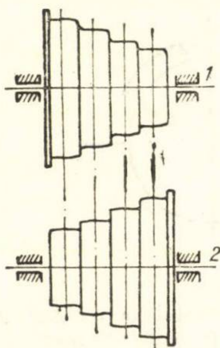


Fig. 5.120.

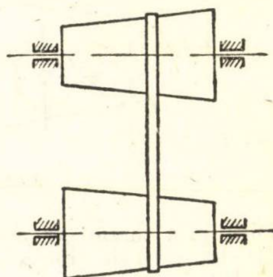


Fig. 5.121.

Folosind concomitent transmisiile deschise şi încrucişate, se pot schimba sensurile de rotaţie ale arborelui conducător (în fig. 5.119) *sc* este şaiba conducătoare, *l* cea de lucru şi *g* şaiba liberă, *o* este bara de decuplare. Pentru reglarea în trepte a vitezei arborelui conducător se utilizează *şaibe în trepte* (fig. 5.120). Diametrele şaibelor se aleg astfel, încît lungimea curelei, pentru toate treptele, să rămînă aceeaşi, iar rapoartele de transmitere să realizeze o progresie geometrică.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{12}\,; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2'} = \zeta i_{12}\,; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2''} = \zeta^2 i_{12}\,; \ldots \tag{5.273}$$

unde: $\zeta > 1$ şi $i_{12} > 1$.

Transmisiile cu curea se pot proiecta şi pentru reglarea continuă a vitezei şaibei conducătoare, lucru ce se realizează cu ajutorul a două şaibe conice (fig. 5.121).

§ 5.37. Mecanisme cu cruce de Malta

Cum s-a indicat în § 5.9, mecanismele cu cruce de Malta se utilizează pentru transmiterea rotaţiilor cu opriri. Tema principală la proiectare trebuie să fie numărul de tăieturi z ale crucii *2*, prin aceasta determinîndu-se numărul de opriri ale ei în timpul unei rotaţii (fig. 5.122). Unghiul $2\varphi_2$ de rotire a crucii *2* în timpul unei perioade a mişcării ei este

$$2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z}. \tag{5.274}$$

Unghiul de rotire a elementului conducător în acelaşi interval de timp al mişcării este

$$2\varphi_1 = \pi\left(1 - \frac{2}{z}\right). \tag{5.275}$$

Timpul t_m de mişcare a crucii este

$$t_m = \frac{30}{n_1}\left(1 - \frac{2}{z}\right), \tag{5.276}$$

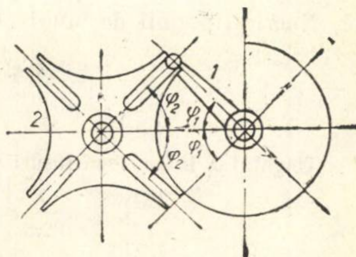


Fig. 5.122.

unde n_1 este numărul de rotaţii pe minut ale elementului conducător.

Timpul t_r de repaos al crucii este

$$t_r = \frac{30}{n_1}\left(1 + \frac{2}{z}\right). \tag{5.277}$$

Timpul T al unei rotaţii complete a elementului *1*, pentru un singur fus este

$$T = t_m + t_r. \tag{5.278}$$

Tabela 5.5. **Relaţia între mărimile z, k, $\frac{t_m}{T}$ şi $\frac{t_r}{T}$**

z	$2\varphi_2$	$\frac{t_m}{T}$	$\frac{t_r}{T}$ la un număr de fusuri egal cu:			
			$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
3	120°	0,1667	0,8333	0,3333	0,1667	0,0833
4	96°	0,2500	0,750	0,2500	0,0833	—
5	72°	0,3000	0,7000	0,2000	0,0333	—
6	60°	0,3333	0,6667	0,1667	—	—
7	51°26	0,3571	0,6429	0,1429	—	—
8	45°	0,3750	0,6250	0,1250	—	—
9	40°	0,3889	0,6111	0,1111	—	—
10	36°	0,4000	0,6000	0,1000	—	—
12	30°	0,4167	0,5833	0,0838	—	—

Observaţie: z este numărul de tăieturi ale crucii; k — numărul de fusuri; t_m — timpul de mişcare al crucii; t_r — timpul de repaos al crucii; T — timpul unei rotaţii complete a elementului conducător; $2\varphi_2$ — unghiul de rotire a crucii într-o perioadă de timp a mişcării sale.

Mărimile t_m şi t_r, în unităţi relative, sînt

$$\frac{t_m}{T}=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}, \qquad \frac{t_r}{T}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z}. \tag{5.279}$$

Numărul posibil de fusuri al elementului conducător este

$$k<\frac{2}{1-\frac{2}{z}}. \tag{5.280}$$

Unghiul λ între două fusuri vecine este legat prin relaţia

$$\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{t_m+t_r}{T}, \tag{5.281}$$

unde t_r depinde, pentru mecanismul examinat, de unghiul λ.

Tabela 5.5 permite determinarea la proiectare a parametrilor de bază ai unui mecanism cu cruce de Malta.

§ 5.38. Mecanisme cu camă

În § 5.7 s-a arătat că mecanismele cu camă se utilizează în special pentru transformarea mişcării de rotaţie a camei într-o mişcare de translaţie a tachetului sau într-o mişcare de rotaţie a tachetului oscilant cu un unghi de rotire limitat.

La proiectarea mecanismelor cu funcţionare înceată se dă de obicei relaţia dintre spaţiul parcurs de elementul conducător fie în funcţie de timp, fie în funcţie de unghiul de rotire a camei. La mecanismele cu mers rapid, legea de variaţie a acceleraţiei în funcţie de timp are o importanţă deosebită, deoarece la variaţii rapide ale acceleraţiilor mecanismul funcţionează neliniştit. În ultimul caz, printr-o integrare dublă se obţine relaţia spaţiului în funcţie de timp, care se utilizează la proiectare.

La proiectarea cinematică se pot da: 1) schema mecanismului şi dimensiunile elementelor; 2) legea de mişcare a elementului conducător; 3) unghiul de funcţionare al camei; 4) legea mişcării ei. Dimensiunile elementelor nu pot fi date arbitrar, deoarece în astfel de cazuri nu se exclude posibilitatea de construire a mecanismului incapabil de funcţionare, care se obţine din cauza unghiurilor nefavorabile de presiune.

Unghiul de presiune este unghiul ϑ între linia de acţiune a forţei P_{12}^{n}, aplicată elementului condus *2* din partea elementului conducător *1* şi îndreptată după normala în punctul de contact şi între viteza de pe elementul condus a punctului de aplicare a acestei forţe (fig. 5.123). Lucrul mecanic al forţei P_{12}^{n} pe un spaţiu oarecare s este egal cu

$$A = \int_{s} P_{12}^{n} \cos \vartheta \, ds, \qquad (5.282)$$

adică cu cît ϑ este mai mic, cu atît lucrul mecanic efectuat de forţa P_{12}^{n} este mai mare.

Variaţia unghiului de presiune în mecanismele cu camă se poate studia grafic. Pentru mişcarea de translaţie a tachetului cu rolă (vezi fig. 5.33, *a*) trebuie construită relaţia $\frac{v}{\omega_1} = f(s)$ şi apoi, pe prelungirea axei s, se aşază mărimea $\sqrt{R_0^2 - e^2}$, unde R_0 este valoarea minimă a razei vectoare a profilului camei (raza cercului de bază), iar e este excentricitatea (fig. 5.124). Unghiul ϑ se determină astfel, cum este indicat în fig. 5.124.

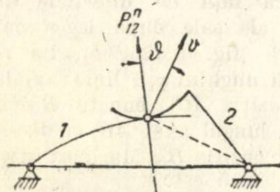


Fig. 5.123.

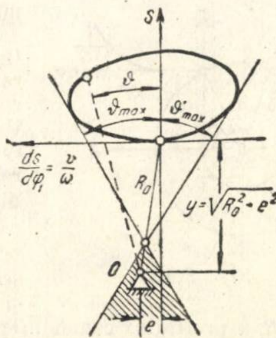


Fig. 5.124.

La proiectare trebuie satisfăcută condiţia ca ϑ_{max} să nu fie mai mare decît o mărime dată. În acest caz se duc tangente la diagramă sub unghiul ϑ_{max}, apoi se alege centrul O de rotaţie al camei în zona haşurată (fig. 5.124). Prin aceasta, se determină R_0 – raza vectoare minimă a profilului camei (raza cercului de bază).

Aceeaşi problemă pentru mecanismul cu tachet oscilant (vezi fig. 5.33, c) se rezolvă astfel: în cazul dat, valorile v/ω trebuie aşe-

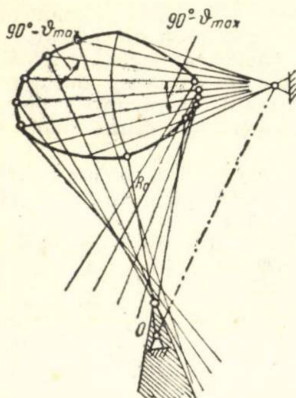


Fig. 5.125.

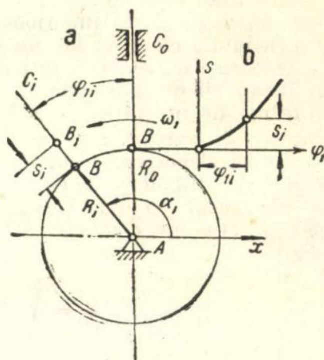


Fig. 5.126.

zate pe prelungirile axei tachetului oscilant, rotit cu unghiurile date (fig. 5.125). În unele poziţii ale tachetului oscilant se duc drepte sub unghiul $(90° - \vartheta_{max})$. Regiunea haşurată indică locul unde se poate alege centrul de rotaţie al camei.

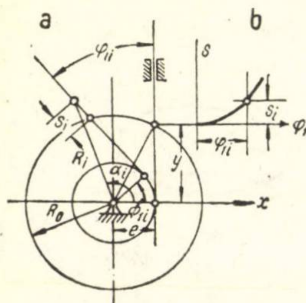


Fig. 5.127.

La determinarea formei profilului camei se utilizează metoda inversării mişcării.

În mişcarea inversată cama este fixă (fig. 5.126), iar linia axială AC_0 se roteşte în sens contrar mişcării acelor ceasornicului cu viteza unghiulară ω_1 (fig. 5.126, *a*); afară de aceasta, tachetul se mişcă faţă de diferitele direcţii relative ale sale după legea dată de diagramă (fig. 5.126, *b*). La rotirea camei cu unghiul φ_{1i}, linia axială AC_0 ocupă poziţia AC_i, punctul B se deplasează în lungul axei AC_i cu distanţa s_i şi ocupă poziţia B_i. Mărimea razei vectoare R_i a profilului camei în poziţia nouă este

$$R_i = R_0 + s_i. \qquad (5.283)$$

În cazul mecanismului cu tachet dezaxat (fig. 5.127, *a*), poziţia tachetului după rotirea sa în mişcarea inversată este determinată de tangenta la cercul de excentricitate *e*. În acest caz s_i se aşază de la cercul descris cu raza R_0 (cercul de bază).

În conformitate cu fig. 5.127, mărimea razei vectoare $\vec{R}_i$ este

$$R_i = \sqrt{e^2 + (y + s_i)^2}, \qquad (5.284)$$

unde

$$y = \sqrt{R_0^2 - e^2}. \qquad (5.285)$$

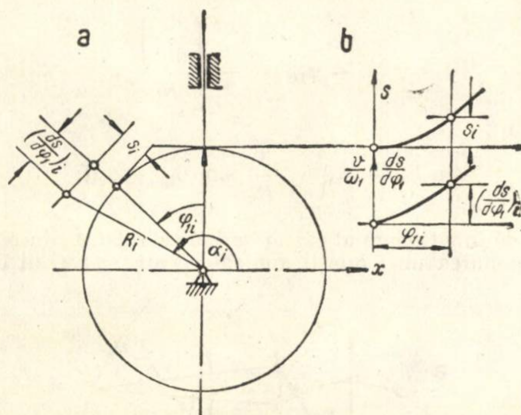


Fig. 5.128.

Pentru mecanismul cu tachet cu disc plan (fig. 5.128) profilul camei se construieşte ca înfăşurătoare a diferitelor poziţii ale discului plan. Poziţiile lui se determină la fel ca şi pentru mecanismul din fig. 5.126. Pentru determinarea mărimii R_i a razei vectoare în poziţia *i* este necesară diagrama v/ω_1 în funcţie de unghiul φ_1 de rotire a camei (fig. 5.128, *b*). Se obţine

$$R_i = \sqrt{(R_0 + s_i)^2 + \left(\frac{ds}{d\varphi_1}\right)_i^2}. \qquad (5.286)$$

Construirea profilului camei în cazul unui mecanism cu tachet oscilant reiese clar din fig. 5.129. Raza vectoare a profilului în poziţia *i* se poate determina din ecuaţia

$$R_i = \sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll\cos(\varphi_{20} + \varphi_{2i})}. \qquad (5.287)$$

În § 5.7 s-a arătat că pe desenul de lucru al camei se indică tabela valorilor razei vectoare a profilului pentru valorile determi-

nate ale unghiului de înclinare a razei vectoare față de direcția fixă pe camă.

Notînd aceste unghiuri cu α cu indicii corespunzători, se obține

fig. 5.126

$$\alpha_i = 90^\circ + \varphi_i, \tag{5.288}$$

fig. 5.127

$$\cos(\alpha_i - \varphi_{1i}) = \frac{e}{R_i}, \tag{5.289}$$

fig. 5.128

$$\cos(\alpha_i - \varphi_{1i}) = -\frac{\left(\frac{ds}{d\varphi_1}\right)_i}{R_i}, \tag{5.290}$$

fig. 5.129

$$\sin(\alpha_i - \varphi_{1i}) = \frac{1}{R_i}\sin(\varphi_{20} + \varphi_{2i}). \tag{5.291}$$

Pe desenul de funcționare al camei se indică relația dintre R_i' și α_i'. După determinarea unei relații analoge pentru profilul teoretic, se

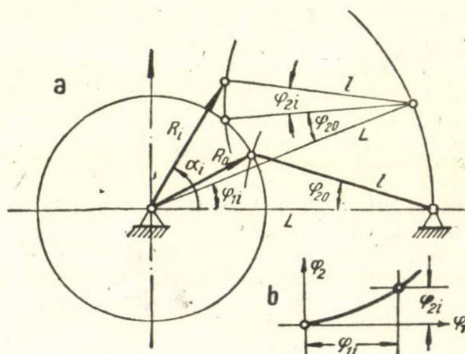


Fig. 5.129.

pot stabili valorile din tabelă ale relației indicate. În acest scop se poate utiliza metoda următoare (fig. 5.130).

$$\rho_i \cos\beta_i = -x_i + R_i\cos\alpha_i, \quad \rho_i\sin\beta_i = R_i\sin\alpha_i, \tag{5.292}$$

de unde

$$\operatorname{tg}\beta_i = \frac{R_i\sin\alpha_i}{-x_i + R_i\cos\alpha_i}. \tag{5.293}$$

şi ρ_i se determină din relaţiile (5.292) (β_i este unghiul de deviere a vectorului $\vec{r}$ de la axa Ox).

Pentru determinarea lui R_i' şi α_i' avem ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned} R_i' \cos \alpha_i' &= r \cos \beta_i + R_i \cos \alpha_i, \\ R_i' \sin \alpha_i' &= r \sin \beta_i + R_i \sin \alpha_i. \end{aligned}\right\} \qquad (5.294)$$

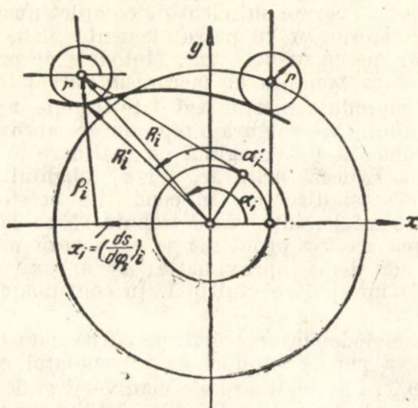


Fig. 5.130.

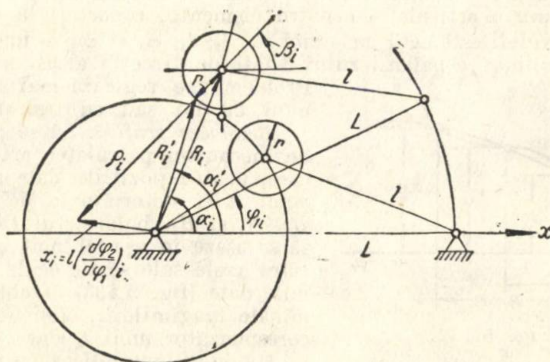


Fig. 5.131.

Aceeaşi problemă pentru un mecanism cu tachet oscilant se rezolvă la fel cu cea precedentă cu ajutorul fig. 5.131.

§ 5.39. Mecanisme cu cuple inferioare

Proiectarea mecanismelor cu cuple inferioare ce se efectuează pe baza teoriei mecanismelor şi maşinilor, se reduce la determinarea parametrilor schemei cinematice în funcţie de condiţiile date de mişcare a elementelor. Problemele de bază ale proiectării mecanismelor cu cuple inferioare sînt: 1) problema reproducerii unei legi de mişcare date; 2) problema reproducerii unei traiectorii date.

În prezent sînt elaborate suficient de complet numai metodele de proiectare ale mecanismelor cu patru elemente plane şi spaţiale. Se vor examina doar mecanismele plane. Metodele de proiectare se vor prezenta luîndu-se ca exemplu un mecanism patrulater articulat.

În problema reproducerii unei legi date trebuie determinaţi parametrii mecanismului, care asigură o reproducere aproximativă a relaţiei $\varphi_3 = f(\varphi_1)$, unde φ_3 este unghiul de înclinare a balansierului *3* faţă de o direcţie x aleasă arbitrar, iar φ_1 unghiul de înclinare a manivelei *1* pe aceeaşi direcţie. În condiţiile acestor probleme se indică de obicei limitele, între care trebuie să se mişte elementele *1* şi *3*. Rezolvarea acestor probleme se realizează prin următoarele metode: 1) cea mai bună aproximaţie; 2) aproximaţie pătratică; 3) interpolare; 4) interpolare multiplă. În continuare se expun ultimele trei metode.

La utilizarea metodei interpolării, pe curba care reprezintă legea dată se aleg cîteva puncte (noduri de interpolare), determinate de unghiurile φ_{11}, φ_{12} ... de înclinare ale manivelei şi de unghiurile φ_{31}, φ_{32}... de înclinare ale balansierului (fig. 5.132), în care legea dată şi cea reprodusă se intersectează. Între noduri curbele diferă. Numărul de noduri este egal cu numărul de parametri ai mecanismului, care urmează să fie determinaţi. Numărul maxim de parametri ai unui mecanism articulat cu patru elemente, raportaţi la lungimea l_1 a manivelei, este egal cu cinci l_2, l_3, l_4, φ_4 şi φ_{31} — unghiul iniţial de înclinare a balansierului *3* faţă de direcţia aleasă a axei Ox.

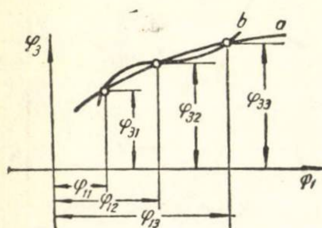


Fig. 5.132.

Problema se reglează mai simplu cu unul, cu doi sau cu trei parametri.

Rezolvare grafică. Să se proiecteze un mecanism patrulater articulat, la care, pentru poziţiile date ale manivelei AB, determinate de punctele B_1, B_2 şi B_3, balansierul DC trebuie să se aşeze în aşa fel încît unghiurile între axele sale să fie egale cu mărimile date (fig. 5.133). Trebuie determinate lungimile l_2, l_3 şi unghiul φ_{31} corespunzător unui l_4 dat.

Dîndu-se lungimile AB a manivelei şi DC a balansierului se notează cu B_1, B_2, B_3 respectiv C_1, C_2, C_3 poziţiile corespunzătoare unui unghi arbitrar ales φ_{31}. Alegînd poziţia punctelor C într-un loc arbitrar al circumferinţei balansierului, nu se poate aştepta că distanţele între poziţiile corespunzătoare B şi

C vor fi egale. Pentru a determina poziţiile reale C_1', C_2' şi C_3' ale punctului C, trebuie procedat după cum urmează.

Se determină poziţia relativă B_2' a punctului B faţă de punctul C_1 în poziţia a doua a mecanismului. Pentru aceasta, pe latura DC_1 trebuie construit triunghiul DC_1B_2 egal cu triunghiul DC_2B_2 (fig. 5.133). În mod analog se stabileşte poziţia relativă B_3' a punctului B, care corespunde celei de a treia poziţii a mecanismului. Pentru a determina poziţia iniţială DC_1' a balansierului, trebuie găsit centrul C_1' al cercului, care trece prin punctele B_1, B_2' şi B_3'.

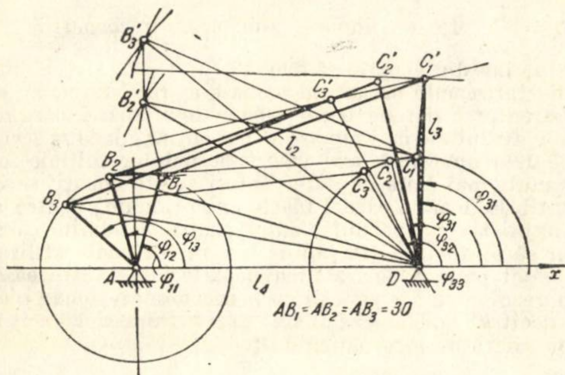


Fig. 5.133.

Celelalte poziţii ale balansierului se determină cu ajutorul unghiurilor date. Prin această metodă, în lmitele de precizie ale construcţiilor grafice, se poate asigura coincidenţa în trei puncte a relaţiei date cu cea reprodusă.

Rezolvarea analitică. Pe baza a trei poziţii date ale manivelei *1* şi ale balansierului *3* să se determine l_2, l_3 şi l_4 (fig. 5.133). Se dă $l_1 = 1$, φ_{11}, φ_{12}, φ_{13}, φ_{31}, φ_{32}, φ_{33}, $\varphi_4 = 0$.

Pentru rezolvare utilizăm următorul sistem de trei ecuaţii

$$u - c_{1i}l_4 - c_{2i}l_3 + c_{3i}l_3l_4 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{5.295}$$

unde

$$2u = 1 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2, \tag{5.296}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{1i} &= \cos(\varphi_{1i} - \varphi_4), \quad c_{2i} = \cos(\varphi_{1i} - \varphi_{3i}), \\ c_{3i} &= \cos(\varphi_4 - \varphi_{3i}), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \tag{5.297}$$

Prin scăderea succesivă din prima ecuaţie (5.295) a celei de a doua şi a celei de a treia, se obţine un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute

$$\left.\begin{aligned}(-c_{11}+c_{12})+(-c_{21}+c_{22})\frac{l_3}{l_4}+(c_{31}-c_{32})\,l_3=0,\\(-c_{11}+c_{13})+(-c_{21}+c_{23})\frac{l_3}{l_4}+(c_{31}-c_{33})\,l_3=0.\end{aligned}\right\}\quad(5.298)$$

Din ultimele ecuaţii se determină la început l_3, apoi $\lambda=\frac{l_3}{l_4}$, de unde $l_4=\frac{l_3}{\lambda}$. În continuare, din una din ecuaţiile (5.295) se calculează u, iar din ecuaţia (5.296) — l_2.

La proiectarea unui mecanism pe baza a trei parametri, este dificilă asigurarea preciziei pe o porţiune mare a curbei, care reproduce relaţia dată. Rezultate mai precise se pot obţine, dacă se scriu ecuaţii de tipul (5.295) nu pentru trei valori ale datelor iniţiale, ci pentru un număr mult mai mare de date. Totuşi aceste ecuaţii se dovedesc a fi compatibile doar în cazuri foarte excepţionale. Pentru a le face să fie aproximativ compatibile, adică pentru a admite ca membrul întîi al lor să se abată puţin (δ_i) de la zero, se poate utiliza metoda celor mai mici pătrate. Se arată mai departe cum se utilizează această metodă la rezolvarea a n ecuaţii cu k necunoscute, unde n este mult mai mare decît k. Aceste ecuaţii sînt în general astfel, încît membrul întîi al lor diferă de zero, adică au forma

$$a_i x_1 + b_i x_2 + \dots + g_i x_k + h_i = \delta_i, \quad (5.299)$$

unde $i = 1, 2, \dots, n$; δ_i este abaterea membrului întîi al ecuaţiei i de la zero.

Din aceste ecuaţii se pot obţine alte k ecuaţii noi, cu astfel de coeficienţi, care să asigure obţinerea valorii minime Δ_p a abaterii medii pătratice, egală cu $\Delta_p=\sqrt{\frac{S}{n}}$, unde

$$S=\sum_{i=1}^{i=n}\delta_i. \quad (5.300)$$

Cele k ecuaţii amintite au următoarea formă:

$$\left.\begin{aligned}\sum a_i^2\cdot x_1+\sum a_i b_i\cdot x_2+\dots+\sum a_i g_i\cdot x_k+\sum a_i\cdot h_i=0,\\\sum b_i a_i\cdot x_1+\sum b_i^2\cdot x_2+\dots+\sum b_i g_i\cdot x_k+\sum b_i\cdot h_i=0,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\\sum g_i a_i\cdot x_1+\sum g_i b_i\cdot x_2+\dots+\sum g_i^2\cdot x_k+\sum g_i\cdot h_i=0,\end{aligned}\right\}\quad(5.301)$$

unde însumarea trebuie extinsă de la 1 la n.

În cazurile examinate $k = 3$, iar pentru mărimea n trebuie ales un număr sensibil mai mare decît 3, de exemplu 6 sau mai mult.

Metoda interpolării multiple se utilizează atunci cînd este necesară asigurarea tangentei de ordin superior în punctele comune ale relaţiilor dată şi reprodusă. În acest caz cîteva derivate ale celor două relaţii trebuie să fie respectiv egale. Proiectînd mecanismul prin metoda indicată, se poate obţine într-o mică vecinătate a nodurilor de interpolare, o bună aproximaţie a relaţiei reprodusă. La calculul a trei parametri, în cazul unui singur nod de interpolare, trebuie utilizată ecuaţia (5.295), a doua se obţine prin derivarea în raport cu unghiul φ_1 a acestei ecuaţii, iar a treia este aceea care se obţine ca rezultat al celei de a doua derivări.

Fie dat $l_1 = 1$, φ_1, φ_3, $\varphi_3' = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$, $\varphi_3'' = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2}$. Să se determine l_2, l_3 şi l_4. Pentru rezolvare avem

$$\left.\begin{aligned} u - c_1 l_4 - c_2 l_3 + c_3 l_3 l_4 &= 0, \\ - c_1' l_4 - c_2' l_3 + c_3' l_3 l_4 &= 0, \\ - c_1'' l_4 - c_2'' l_3 + c_3'' l_3 l_4 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.302}$$

unde

$$c_1 = \cos(\varphi_1 - \varphi_4),\ c_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_3),\ c_3 = \cos(\varphi_4 - \varphi_3); \tag{5.303}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1' = -\sin(\varphi_1 - \varphi_4),\ c_2' = \sin(\varphi_1 - \varphi_3)(\varphi_3' - 1), \\ c_3' = \sin(\varphi_4 - \varphi_3)\varphi_3'; \end{aligned}\right\} \tag{5.304}$$

$$\begin{aligned} c_1'' = -\cos(\varphi_1 - \varphi_4),\ c_2'' = \cos(\varphi_1 - \varphi_3)(-1 + 2\varphi_3' - \varphi_3'^2) + \\ + \sin(\varphi_1 - \varphi_3)\varphi_3'',\ c_3'' = \cos(\varphi_4 - \varphi_3)\varphi_3'^2 + \sin(\varphi_4 - \varphi_3)\varphi_3''. \end{aligned} \tag{5.305}$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (5.302) nu prezintă dificultăţi; ea nu va fi examinată.

În cazul a două noduri de interpolare se poate proiecta un mecanism care reproduce relaţia astfel, încît într-un nod să aibă loc tangenţa, iar în al doilea — ambele să aibă un punct comun.

Problemele examinate se pot rezolva şi grafic. Fie de exemplu $l_1 = 30$, $l_4 = 90$, $\varphi_{11} = 45°$, $\varphi_{12} = 90°$, $\varphi_{31} = 60°$, $\varphi_{32} = 80°$, $\varphi'_3 = 1/3$. Să se proiecteze un mecanism care asigură condiţiile date (fig. 5.134).

Rezolvarea problemei propuse este analogă cu cea examinată mai înainte (fig. 5.133). Pentru două poziţii date ale manivelei şi balansierului se poate determina numai locul geometric E_1C_1 pe care se aşază punctul C_1 căutat, care determină prima poziţie a balansierului, aceasta satisfăcînd condiţiile date. Al doilea loc geometric se stabileşte pe baza următoare: linia de acţiune împarte linia articulaţiilor fixe în părţi invers proporţionale cu vitezele unghiulare. În

cazul de faţă linia de acţiune este direcţia B_1C_1 iar linia articulaţiilor fixe – linia AD; de aceea: $\frac{PA}{PD} = \frac{1}{3}$. Determinînd poziţia punctului P (fig. 5.134), punctul C_1 se găseşte la intersecţia liniilor E_1C_1 şi PB_1. În fig. 5.134, pe baza celor expuse, este construit mecanismul AB_1C_1DA. Tot acolo este reprezentată a doua variantă de rezolvare a aceleiaşi probleme, obţinută ca rezultat al deplasării ba-

Fig. 5.134.

tiului (bazei)AD (mecanismul $AB_1C_1'D_1'A$). Prin reglarea parametrilor lui AD şi ai unghiului de înclinare a lui AD faţă de axa Ox se poate proiecta un mecanism, care satisface unor condiţii suplimentare, de exemplu se poate cere ca într-o altă poziţie relaţia reprodusă şi cea dată să fie tangente. O asemenea condiţie suplimentară poate fi satisfăcută aproximativ.

Grafic se poate rezolva problema în care este pusă condiţia tangenţei de ordinul al doilea între relaţia dată şi cea reprodusă într-o anumită poziţie a mecanismului. Se dă $l_1 = 30$, $\varphi_1 = 45°$, $l_3 = 60$, $\varphi_3 = 90°$, $\varphi_3' = 0{,}5$, $\varphi_3'' = 0{,}2$.

O astfel de problemă se rezolvă prin construirea planelor vitezelor şi acceleraţiilor. Luînd viteza unghiulară constantă ω_1 a manivelei egală cu unitatea, se obţine: $v_B = l_1 = 30$, $v_C = \varphi_3' l_3 = 0{,}5 \times \times 60 = 30$; pentru acceleraţii se obţine respectiv $a_B = l_1 = 30$, $a_C^n = \varphi_3'^2 l_3 = 0{,}25 \cdot 60 = 15$, $a_C^t = \varphi_3'' l_3 = 0{,}2 \cdot 60 = 12$; în sfîrşit, pentru determinarea lui l_2 se poate utiliza următoarea relaţie: $l_2 = \frac{v_{CB}^2}{a_{CB}^n}$. Aici mărimile v şi a se înţeleg exprimate în unităţi relative.

În fig. 5.135 sînt construite planul vitezelor rotit cu 90° şi planul acceleraţiilor, în care vectorii acceleraţiilor absolute ale punctelor b şi c' sînt îndreptate spre polul π. Unind punctele b şi c ale planului vitezelor, obţinem vectorul $v_{CB} = \overline{bc}$. Acest vector determină direcţia bielei BC. Unind punctele b şi c' din planul acceleraţiilor, se obţine vectorul $\bar{a}_{CB} = \overline{bc'}$ al acceleraţiei totale relative a punc-

tului C. Descompunîndu-l pe direcţia BC şi pe cea perpendiculară cu ea, se determină $a_{CB}^{n} = n_{CB}b$. Pentru exemplul studiat se obţine $l_2 = 88$. După aceasta urmează construirea schemei mecanismului dat în poziţia căutată (fig. 5.135).

În cazul dat parametrii de reglare sînt lungimea balansierului BC şi unghiul de înclinare a manivelei AB faţă de axa Ox. Aceşti parametri pot fi utilizaţi, dacă se cere satisfacerea unor condiţii suplimentare, de exemplu, dacă este necesară asigurarea intersecţiei relaţiei date şi a celei reproduse într-o altă poziţie a mecanismului. Asemenea problemă poate fi rezolvată aproximativ.

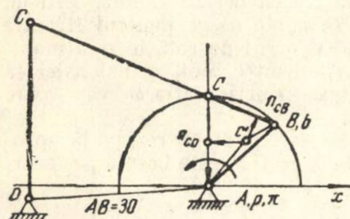


Fig. 5.135.

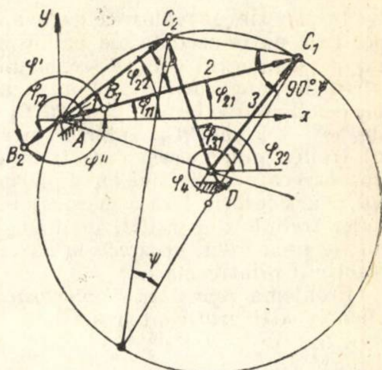


Fig. 5.136.

Se examinează în continuare cazul proiectării unui mecanism, la care, la rotaţia uniformă a manivelei, timpii de mers în cursa directă şi inversă a balansierului sînt *inegali*. În condiţiile unei astfel de probleme trebuie să fie dat raportul k al unghiurilor de rotire ale manivelei, corespunzătoare mersului direct şi inversat al balansierului. Avînd în vedere că suma acestor unghiuri de rotaţie ale manivelei este egală cu 360°, atunci în funcţie de raportul k se pot determina şi aceste unghiuri. Afară de aceasta, trebuie dată lungimea balansierului (ea poate fi luată egală cu unitatea) şi unghiul lui de oscilaţie maxim. Conform schemei de calcul (fig. 5.136), avem următoarele date iniţiale: φ_{11}, φ_{12}, $\varphi_{21} = \varphi_{11}$, $\varphi_{22} = \varphi_{12} - 180°$, $l_3 = 1$, φ_{31}, φ_{32}. Să se determine l_1, l_2, X_4, Y_4, unde: $X_4 = l_4 \cos \varphi_4$, $Y_4 = l_4 \sin \varphi_4$.

Pentru determinarea necunoscutelor, se folosesc ecuaţiile de proiecţii pe axele de coordonate ale contururilor închise ale schemei mecanismului. Se obţine

$$\left.\begin{aligned} l_1 \cos \varphi_{11} + l_2 \cos \varphi_{11} &= X_4 + \cos \varphi_{31}, \\ l_1 \sin \varphi_{11} + l_2 \sin \varphi_{11} &= Y_4 + \sin \varphi_{31}, \\ l_1 \cos \varphi_{12} - l_2 \cos \varphi_{12} &= X_4 + \cos \varphi_{32}, \\ l_1 \sin \varphi_{12} - l_2 \sin \varphi_{12} &= Y_4 + \sin \varphi_{32}. \end{aligned}\right\} \quad (5.306)$$

În cazul dat avem un sistem de ecuaţii liniare cu patru necunoscute, a cărui rezolvare nu prezintă dificultăţi.

Aceeaşi problemă se poate rezolva grafic. Notînd $\varphi'/\varphi'' = k$, atunci din fig. 5.136 se obţine

$$k = \frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{180° + \psi}{180° - \psi}, \text{ de unde } \psi = 180° \frac{k-1}{k+1}.$$

În funcţie de valoarea dată a lui k se calculează ψ. Construind poziţiile extreme date ale balansierului, se unesc punctele C_1 şi C_2, iar pe segmentul C_1C_2 se construieşte un cerc — locul geometric al vîrfurilor unghiurilor ψ. Pentru aceasta, în punctul C_2 se ridică o perpendiculară, iar din punctul C_1 se duce o dreaptă care face unghiul de $90° - \psi$ cu C_1C_2. Intersecţia acestor două direcţii determină un al treilea punct, prin care trebuie să treacă cercul căutat. Într-un loc oarecare al acestei circumferinţe se poate alege punctul A, care va fi articulaţia fixă a manivelei AB. Centrul de rotaţie A a manivelei trebuie ales astfel, încît unghiurile dintre bielă şi balansier să nu fie prea mici, deoarece în caz contrar în articulaţia C vor apare reacţiuni relativ mari.

Problema *reproducerii unei traiectorii date* poate fi rezolvată aproximativ atît grafic cît şi analitic. Metoda grafică este bazată pe încer-

Fig. 5.137.

cări multiple de mărimi ale elementelor mecanismului, care pentru o traiectorie dată $\alpha - \alpha$, să determine un mecanism, astfel ca un punct al lui să descrie chiar aproximativ un arc de cerc $\beta - \beta$ (fig. 5.137). Ordinea de rezolvare a problemei examinate este următoarea.

Fie dată curba α — α care în sistemul Oxy este definită de relaţia $L(\Phi)$. Pe baza acestei relaţii, curba poate fi trasată (fig. 5.137). Alegînd centrul de rotaţie A al manivelei AB şi lungimea ei, l_1, se dă lungimea l'_2 a barei $2'$. După aceasta, pentru cîteva poziţii ale manivelei AB verificăm caracterul mişcării barei $2'$ (variaţiile brusce ale poziţiei barei $2'$ sînt indicaţii despre alegerea nereuşită a parametrilor). Se dă în continuare mărimea unghiului φ', care determină direcţia bielei 2 faţă de bara $2'$. Alegînd lungimea bielei 2, se trasează traiectoria capătului ei. Variind dimensiunea l_2, se face încercarea de a găsi o traiectorie, care să coincidă aproximativ cu un arc de cerc sau cu o linie dreaptă. Fig. 5.137 ilustrează ultima etapă a căutării mecanismului, al cărui punct E descrie aproximativ traiectoria dată. Problema propusă se simplifică mult, dacă există la îndemînă un atlas de curbe de bielă, care permite găsirea unei curbe asemănătoare cu curba dată şi astfel căutările soluţiei necesare pot fi începute în regiunea unde este aşezată curba, care coincide cu cea dată (3.15). Aceeaşi problemă poate fi rezolvată şi analitic, însă în acest caz trebuie să se facă operaţii cu ecuaţii de grad mare [11].

Bibliografie

1. Артоболевский И. И., Теория механизмов и машин, Гостехиздат, 1963.
2. Артоболевский И. И., Левитский Н. И. и Черкудинов С. А., Синтез плоских механизмов, Гостехиздат, 1944.
3. Атлас по кинематическому расчету кривошипно-шатунных механизмов, Изд. АН СССР, 1942.
4. Гавриленко В. А., Цилиндрическая эвольвентная зубчатая передача, Машгиз, 1956.
5. Жегалова Т. С., Геометрия эвольвентного зацепления, Машгиз, 1952.
6. Зиновьев В. А., Аналитические методы расчета плоских механизмов, Гостехиздат, 1949.
7. Зиновьев В. А., Кинематическое исследование кулачковых механизмов аналитическим методом, Труды Института машиноведения, семинар по теории машин и механизмов, т. ХУ, вып. 58, Изд. АН СССР, 1955.
8. Зиновьев В. А., Пространственные механизмы с низшими парами, Гостехиздат, 1952.
9. Кудрявцев В. Н., Выбор типов передач, Машгиз, 1955.
10. Левитский Н. И., Методы расчета кулачковых механизмов, Машгиз, 1954.

11. Левитский Н. И., Проектирование плоских механизмов с низшими парами, Изд. АН СССР, 1950.
12. Решетов Л. Н., Кулачковые механизмы, Машгиз, 1953.
13. Решетов Л. Н., Расчет планетарных механизмов, Машгиз, 1952.
14. Детали машин, Сборник материалов по расчету и конструированию, изд. второе, книга 1, под ред. проф. Н.С. Ачеркана, Машгиз, 1953.
15. Hrones, Nelson, Analysis of the Four-Bar Linkage, New York, 1951.

Anexă

Unele sisteme de unităţi nemetrice

În Anglia şi America, pentru măsurarea lungimilor (suprafeţelor, volumelor) şi maselor (greutăţilor), se utilizează mult sisteme proprii naţionale de unităţi; majoritatea unităţilor în aceste sisteme sînt comune, iar unele deosebiri dintre sistemele engleze şi americane se indică mai departe. În tabele se indică sisteme de unităţi menţionate şi se dau factorii de trecere de la aceste sisteme la sisteme metrice şi invers.

1. Sistemul englez de unităţi

Unităţi fundamentale

1) Brit. yard, yd, 1 yd = 0,914398 m,

2) pound, lb. av., 1 lb. av = 0,453592 kg.

Unităţi pentru lungime

Unitatea	Denumirea engleză	În unităţi derivate	În unităţi metrice
Milă terestră (engleză)	Statute mile (st. mi.)	1760 yard	1609,34 m
Yard	yard (yd)	3 picioare	0,91440 m
Picior	foot (ft)	12 ţoli	30,47997 cm
Ţol	inch (in)	—	2,539996 cm
Milă marină	Nautical mile (n.mi)	10 ancabluri	1 853,18 m
Ancablură	Cable's length	608 picioare	185,318 m
Lanţ	chain	66 picioare	20,117 m

Unități de suprafață

Unitatea	Denumirea engleză	În unități derivate	În unități metrice
Milă terestră pătrată	Square, st. mile (sq. mi și mi²)	640 acri	2,58998 km²
Acru	Acre	4860 yarzi pătrați	4046,842 m²
Yard pătrat	Square yard (sq. yd. și yd²)	9 picioare pătrate	0,83612 m²
Picior pătrat	Square foot (sq. ft. și ft²)	144 țoli pătrați	9,2903 dm²
Țol pătrat	Square inch (sq. in. și in²)	—	6,4516 cm²

Unități pentru volume

Unitatea	Denumirea engleză	În unități derivate	În unități metrice
Tonă registru	Register ton (reg. tn)	100 picioare cubice	2,83167 m³
Yard cub	Cubic yard (cu. yd. și yd³)	27 picioare cubice	0,76455 m³
Picior cub	Cubic foot (cu. ft. și ft³)	1728 țoli cubi	28,3167 dm³
Țol cub	Cubic inch. (cu. in. și in³)	—	16,3870 cm³

Unități de capacitate

Unitatea	Denumirea engleză	În unități derivate	În unități metrice
Cvarter	Quarter	8 bușeli	290,949 l
Bușel	Bushel (bu)	8 galoni	36,369 l
Galon	Imperial gallon (gal)	4 sferturi	4,546 l
Sfert	Quart (qt)	2 pint	1,1365 l
Pint	Pint (pt)	4 gil	0,56826 l
Gil	Gill (gi)	—	0,14206 l

Unităţi de masă (greutate)

Unitatea	Denumirea engleză	În unităţi derivate	În unităţi metrice
Tonă englezească	longton, ton (tn. l şi tn)	20 chintale englezeşti	1 016,05 kg
Chintal englezesc	Hundredweight (cwt. l)	112 pfunzi	50,8023 kg
Pfund	Pound (lb. av)	16 uncii	0,45359 kg
Uncie	Ounce (oz. av)	16 drahme	28,34953 g
Drahmă	Dram (dm. av)	—	1,77184 g
Pfund farmaceutic	Apothecary pound (lb. ap)	16 pfunzi farm.	0,37324 kg
Uncie farmaceutică	Apothecary ounce (oz. ap)	8 drahme farm.	31,1035 g
Drahmă farmaceutică	Apothecary dram (dm. ap)	3 scrupuli	3,88793 g
Scrupul	Scruples (s.ap.)	20 grani	1,29598 g
Gran (1/7000 lb. av)	Grain (gr)		64,79892 g

§ 2. Sistemul american de unităţi

În S.U.A. este admis sistemul englez de unităţi cu unele schimbări care sînt în esenţă următoarele:

1. Ţolul american se deosebeşte foarte puţin de cel englez şi este egal cu 2,5400051 mm; în legătură cu aceasta se deosebesc de cele engleze şi alte unităţi americane de lungimi şi totodată de suprafeţe şi volume, însă aceste deosebiri sînt atît de neînsemnate, că nu au importanţă pentru calculele practice.

2. O suprafaţă egală cu 36 mile pătrate este în S.U.A. o unitate separată numită township; 1 township = 93,240 km^2 sau mai precis 93,2399 km^2.

3. În S.U.A. se utilizează gallon (gall) deosebit de cel englez, egal cu 0,83268 de galloni englezi; un gallon american este egal cu 3,7853 l şi în legătură cu aceasta se schimbă şi celelalte unităţi de capacitate. Apoi, 42 galloni formează un barrel, care se utilizează pentru măsurarea volumului lichidelor (păcură, petrol şi altele) şi este egal cu 158,9826 l, însă pentru măsurarea volumului băuturilor alcoolice, se utilizează 1 barrel, egal cu 31,5 galloni, sau 119,23695 l.

4. Afară de tona engleză, în S.U.A. se foloseşte şi tona mică (short ton), egală cu 2000 pfunduri engleze; o tonă mică = 0,90718 t.

Tabele pentru transformarea unităților engleze în unități metrice şi invers.

Transformarea țolilor în mm

Pentru calcule s-a luat: un țol englez = 25,4000 mm.

Fracțiuni de țol

Fracțiuni de țol	În fracții zecimale	mm	Fracțiuni de țol	În fracții zecimale	mm
1/64	0,015625	0,396875	33/64	0,515625	13,09688
1/32	0,03125	0,793750	17/25	0,53125	13,49375
3/64	0,046875	1,190625	35/64	0,546875	13,89063
1/16	0,0625	1,587500	9/16	0,5625	14,28750
5/64	0,078125	1,984375	37/64	0,578125	14,68438
3/32	0,09375	2,381250	19/32	0,59375	15,08125
7/64	0,109375	2,778125	39/64	0,609375	15,47813
1/8	0,125	3,175000	5/8	0,625	15,87500
9/64	0,140625	3,571875	41/64	0,640625	16,27188
5/32	0,15625	3,968750	21/32	0,65625	16,66875
11/64	0,171875	4,365625	43/64	0,671875	17,06563
3/16	0,1875	4,762500	11/16	0,6875	17,46250
13/64	0,203125	5,159375	45/64	0,703125	17,85938
7/32	0,21875	5,556250	23/32	0,71875	18,25625
15/64	0,234375	5,953125	47/64	0,734375	18,65313
1/4	0,25	6,350000	3/4	0,75	19,05000
17/64	0,265625	6,746875	49/64	0,765625	19,44688
9/32	0,28125	7,143750	25/32	0,78125	19,84375
19/64	0,296875	7,540625	51/64	0,796876	20,24063
5/16	0,3125	7,937500	13/64	0,8125	20,63750
21/64	0,328125	8,334375	53/64	0,828125	21,03438
11/32	0,34375	8,731250	27/32	0,84375	21,43125
23/64	0,359375	9,128125	55/64	0,859375	21,82813
3/8	0,375	9,525000	7/8	0,875	22,22500
25/64	0,390625	9,921875	57/64	0,890625	22,62188
13/32	0,406250	10,31875	29/32	0,90625	23,01875
27/64	0,421875	10,71563	59/64	0,921875	23,41563
7/16	0,4375	11,11250	15/16	0,9375	23,81250
29/64	0,453125	11,50938	61/64	0,953125	24,20938
15/32	0,46875	11,90625	31/32	0,96875	23,60625
31/64	0,484375	12,30313	63/64	0,984375	25,00313
1/2	0,5	12,70000	1	1	25,40000

Ţoli întregi

ţoli	mm	ţoli	mm	ţoli	mm	ţoli	mm	ţoli	mm
0	0	20	508,0	40	1016,0	60	1524,0	80	2032,0
1	25,4	21	533,4	41	1041,4	61	1549,4	81	2057,4
2	50,8	22	558,8	42	1066,8	62	1574,8	82	2082,8
3	76,2	23	584,2	43	1092,2	63	1600,2	83	2108,2
4	101,6	24	609,6	44	1117,6	64	1625,6	84	2133,6
5	127,0	25	635,0	45	1143,0	65	1651,0	85	2159,0
6	152,4	26	660,4	46	1168,4	66	1676,4	86	2184,4
7	177,8	27	685,8	47	1193,8	67	1701,8	87	2209,8
8	203,2	28	711,2	48	1219,2	68	1727,2	88	2235,2
9	228,6	29	736,6	49	1244,6	69	1752,6	89	2260,6
10	254,0	30	762,0	50	1270,0	70	1778,0	90	2286,0
11	279,4	31	787,4	51	1295,4	71	1803,4	91	2311,4
12	304,8	32	812,8	52	1320,8	72	1828,8	92	2336,8
13	330,2	33	838,2	53	1346,2	73	1854,2	93	2362,2
14	355,6	34	863,6	54	1371,6	74	1879,6	94	2387,6
15	381,0	35	889,0	55	1397,0	75	1905,0	95	2413,0
16	406,4	36	914,4	56	1422,4	76	1930,4	96	2438,4
17	431,8	37	939,8	57	1447,8	77	1955,8	97	2463,8
18	457,2	38	965,2	58	1473,2	78	1981,2	98	2489,2
19	482,6	39	990,6	59	1498,6	79	2006,6	99	2514,6

Transformarea centimetrilor în ţoli

Pentru calcule s-a luat 1 cm = 0,393700 ţol englez

cm \ 0,1 cm	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	—	0,03937	0,07874	0,11811	0,15748	0,19685	0,23622	0,27559	0,31496	0,35433
1	0,39370	0,43307	0,47244	0,51181	0,55118	0,59055	0,62992	0,66929	0,70806	0,74803
2	0,78740	0,82677	0,86614	0,90551	0,94488	0,98425	1,0236	1,0630	1,1024	1,1417
3	1,811	1,2205	1,2598	1,2992	1,3386	1,3780	1,4179	1,4567	1,4961	1,5354
4	1,5748	1,6142	1,6535	1,6929	1,7323	1,7717	1,8110	1,8504	1,8898	1,9291
5	1,9685	2,0079	2,0472	2,0866	2,1260	2,1654	2,2047	2,2441	2,2835	2,3228
6	2,3622	2,4016	2,4409	2,4803	2,5197	2,5591	2,5984	2,6378	2,6772	2,7165
7	2,7559	2,7953	2,8346	2,8740	2,9134	2,9528	2,9921	3,0315	3,0709	3,1102
8	3,1496	3,1890	3,2283	3,2677	3,071	3,3465	3,3857	3,4252	3,4646	3,5039
9	3,5433	3,5827	3,6220	3,6614	3,7008	3,7402	3,7795	3,8189	3,8583	3,8976
10	3,9370	3,9764	4,0158	4,0551	4,0945	4,1339	4,1732	4,2126	4,2520	4,2913
11	4,3307	4,3701	4,4094	4,4488	4,4882	4,5276	4,5669	4,6063	4,6457	4,6850
12	4,7244	4,7638	4,8031	4,8425	4,8819	4,9213	4,9606	5,000	5,0394	5,0787
13	5,1181	5,1585	5,1968	5,2362	5,2756	5,3150	5,3543	5,3937	5,4331	5,4724
14	5,5118	5,5512	5,5905	5,6299	5,6693	5,7087	5,7480	5,7874	5,8268	5,8661
15	5,9055	5,9449	5,9842	6,0236	6,0630	6,1024	6,1417	6,1811	6,2205	6,2598
16	6,2992	6,3386	6,3779	6,4173	6,4567	6,4961	6,5354	6,5748	6,6142	6,6535
17	6,6929	6,7323	6,7716	6,8110	6,8504	6,8898	6,9291	6,9685	7,0079	7,0472
18	7,0866	7,1260	7,1653	7,2047	7,2441	7,2835	7,3228	7,3622	7,4016	7,4409
19	7,4803	7,5197	7,5590	7,5984	7,6378	7,6772	7,7559	7,7559	7,7953	7,8346
20	7,8740	7,9134	7,9527	7,9921	8,0315	8,0709	8,1102	8,1496	8,1890	8,2283
21	8,2766	8,3071	8,3464	8,3858	8,4252	8,4646	8,5039	8,5433	8,5827	8,6220
22	8,6614	8,7008	8,7401	8,7795	8,8189	8,8583	8,8976	8,9370	8,9764	9,0157
23	9,0551	9,0945	9,1338	9,1732	9,2126	9,2520	9,2913	9,3307	9,3701	9,4094
24	9,4488	9,4882	9,5275	9,5669	9,6063	9,6457	9,6850	9,7244	9,7638	9,8031
25	9,8425	9,8819	9,9212	9,9606	10,000	10,039	10,079	10,118	10,157	10,197

26	10,236	10,276	10,315	10,354	10,394	10,433	10,472	10,512	10,551	10,591
27	10,630	10,669	10,709	10,748	10,787	10,827	10,866	10,905	10,945	10,984
28	11,024	11,063	11,102	11,142	11,181	11,220	11,260	11,299	11,339	11,378
29	11,417	11,457	11,496	11,535	11,575	11,614	11,654	11,693	11,732	11,772
30	11,811	11,850	11,890	11,929	11,968	12,008	12,047	12,087	12,126	12,165
31	12,205	12,244	12,283	12,323	12,362	12,402	12,441	12,480	12,520	12,559
32	12,598	12,638	12,677	12,717	12,756	12,795	12,835	12,874	12,914	12,953
33	12,992	13,031	13,071	13,110	13,150	13,189	13,228	13,268	13,307	13,346
34	13,386	13,425	13,465	13,504	13,543	13,583	13,622	13,661	13,701	13,740
35	13,780	13,819	13,858	13,898	13,937	13,976	14,016	14,055	14,094	14,134
36	14,173	14,213	14,252	14,291	14,331	14,370	14,409	14,449	14,488	14,528
37	14,567	14,606	14,646	14,685	14,724	14,764	14,803	14,842	14,882	14,921
38	14,961	15,000	15,039	15,079	15,118	15,157	15,197	15,236	15,276	15,315
39	15,354	15,394	15,433	15,472	15,512	15,551	15,591	15,630	15,669	15,709
40	15,748	15,787	15,827	15,866	15,905	15,945	15,984	16,024	16,063	16,102
41	16,142	16,181	16,220	16,260	16,299	16,339	16,378	16,417	16,457	16,496
42	16,535	16,575	16,614	16,654	16,693	16,732	16,772	16,811	16,850	16,890
43	16,929	16,968	17,008	17,047	17,087	17,126	17,165	17,205	17,244	17,283
44	17,323	17,362	17,402	17,441	17,480	17,520	17,559	17,598	17,638	17,677
45	17,717	17,756	17,795	17,835	17,874	17,913	17,953	17,992	18,031	18,071
46	18,110	18,150	18,189	18,228	18,268	18,307	18,346	18,386	18,425	18,465
47	18,504	18,543	18,583	18,622	18,661	18,701	18,740	18,779	18,819	18,858
48	18,898	18,987	18,976	19,016	19,056	19,094	19,134	19,173	19,213	19,252
49	19,291	19,331	19,370	19,409	19,449	19,488	19,528	19,567	19,606	19,646
50	19,685	19,724	19,764	19,803	19,842	19,882	19,921	19,961	20,000	20,039
51	20,079	20,118	20,157	20,197	20,236	20,276	20,315	20,354	20,394	20,433
52	20,472	20,512	20,551	20,591	20,630	20,669	20,709	20,748	20,787	20,827
53	20,866	20,905	20,945	20,984	21,024	21,063	21,102	21,142	21,181	21,220
54	21,260	21,299	21,339	21,378	21,417	21,457	21,496	21,535	21,575	21,614
55	21,654	21,693	21,732	21,772	21,811	21,850	21,890	21,929	21,968	22,008

(continuare)

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
56	22,047	22,087	22,126	22,165	22,205	22,244	22,283	22,323	22,362	22,402
57	22,441	22,480	22,520	22,559	22,598	22,638	22,677	22,716	22,756	22,795
58	22,835	22,874	22,913	22,953	22,992	23,031	23,071	23,110	23,150	23,189
59	23,228	23,268	23,307	23,346	23,386	23,425	23,465	23,504	23,543	23,583
60	23,622	23,661	23,701	23,740	23,779	23,819	23,858	23,898	23,937	23,976
61	24,016	24,055	24,094	24,134	24,173	24,213	24,252	24,291	24,331	24,370
62	24,409	24,449	24,488	24,528	24,567	24,606	24,646	24,685	24,724	24,764
63	24,803	24,842	24,882	24,921	24,961	25,000	25,039	25,079	25,118	25,157
64	25,197	25,236	25,276	25,315	25,354	25,394	25,433	25,472	25,512	25,551
65	25,591	25,630	25,669	25,709	25,748	25,787	25,827	25,866	25,905	25,945
66	25,984	26,024	26,063	26,102	26,142	26,181	26,220	26,260	26,299	26,339
67	26,378	26,417	26,457	26,496	26,535	26,575	26,614	26,653	26,693	26,732
68	26,772	26,811	26,850	26,890	26,929	26,968	27,008	27,047	27,087	27,126
69	27,165	27,205	27,244	27,283	27,323	27,362	27,402	27,441	27,480	27,520
70	27,559	27,598	27,638	27,677	27,716	27,756	27,795	27,835	27,874	27,913
71	27,953	27,992	28,031	28,071	28,110	28,150	28,189	28,228	28,268	28,307
72	28,346	28,386	28,425	28,465	28,504	28,543	28,583	28,622	28,661	28,701
73	28,740	28,779	28,819	28,858	28,898	28,937	28,976	29,010	29,055	29,094
74	29,134	29,173	29,213	29,252	29,291	29,331	29,370	29,409	29,449	29,488
75	29,528	29,567	29,606	29,646	29,685	29,724	29,764	29,803	29,842	29,882
76	29,921	29,961	30,000	30,030	30,079	30,118	30,157	30,197	30,236	30,276
77	30,315	30,354	30,394	30,433	30,472	30,512	30,551	30,590	30,630	30,669

78	30,709	30,748	30,787	30,827	30,866	30,905	30,945	30,984	31,024	31,063
79	31,102	31,142	31,181	31,220	31,260	31,299	31,339	31,378	31,417	31,457
80	31,496	31,535	31,575	31,614	31,653	31,693	31,732	31,772	31,811	31,850
81	31,890	31,929	31,968	32,008	32,047	32,087	32,126	32,165	32,205	32,244
82	32,283	32,323	32,362	32,402	32,441	32,480	32,520	32,559	32,598	32,638
83	32,677	32,716	32,756	32,795	32,835	32,874	32,913	32,953	32,992	33,031
84	33,071	33,110	33,150	33,189	33,228	33,268	33,307	33,346	33,386	33,425
85	33,465	33,504	33,543	33,583	33,622	33,661	33,701	33,740	33,779	33,819
86	33,858	33,898	33,937	33,976	33,016	34,055	34,094	34,134	34,173	34,213
87	34,252	34,291	34,331	34,370	34,409	34,449	34,488	34,527	34,567	34,606
88	34,646	34,685	34,724	34,764	34,803	34,842	34,882	34,921	34,961	35,000
89	35,039	35,079	35,118	35,157	35,197	35,236	35,276	35,315	35,354	35,394
90	35,433	35,472	35,512	35,551	35,590	35,630	35,669	35,709	35,748	35,787
91	35,827	35,866	35,905	35,945	35,984	36,024	36,063	36,102	36,142	36,181
92	36,220	36,260	36,299	36,339	36,378	36,417	36,457	36,496	36,535	36,575
93	36,614	36,653	36,693	36,732	36,772	36,811	36,850	36,890	36,929	36,968
94	37,008	37,047	37,087	37,126	37,165	37,205	37,244	37,283	37,323	37,362
95	37,402	37,441	37,480	37,520	37,559	37,598	37,638	37,677	37,716	37,756
96	37,795	37,835	37,874	37,913	37,953	37,992	38,031	38,071	38,110	38,150
97	38,189	38,228	38,268	38,307	38,346	38,386	38,425	38,464	38,504	38,543
98	38,583	38,622	38,661	38,701	38,740	38,779	38,819	38,858	38,898	38,937
99	38,976	39,016	39,055	39,094	39,34	39,173	39,213	39,252	39,291	39,331

Transformarea yarzilor în m şi invers

Pentru calcule s-a admis 1 yard = 0,914398 m

yarzi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,91440	1,82880	2,74320	3,65759	4,57199	5,48639	6,40079	7,31519	8,22959
10	9,14398	10,0584	10,9728	11,8872	12,8016	13,7160	14,6304	15,5448	16,4592	17,3736
20	18,2880	19,2024	20,1168	21,0312	21,9456	22,8600	23,7744	24,6888	25,6032	26,5176
30	27,4320	28,3464	29,2607	30,1751	31,0895	32,0039	32,9183	33,8327	34,7471	35,6615
40	36,5759	37,4903	38,4047	39,3191	40,2335	41,1479	42,0623	42,9767	43,8911	44,8055
50	45,7199	46,6343	47,5487	48,4631	49,3775	50,2919	51,2063	52,1207	53,0351	53,9495
60	54,8639	55,7783	56,9927	57,6071	58,5215	59,4359	60,3503	61,2647	62,1791	63,0935
70	64,0079	64,9223	65,8367	66,7511	67,6655	68,5799	69,4943	70,4087	71,3231	72,2375
80	73,1518	74,0663	74,9807	75,8951	76,8905	77,7230	78,6383	79,5527	80,4671	81,3815
90	82,2958	83,2103	84,1247	85,0391	85,9535	86,8678	87,7822	88,6966	89,6110	90,5254
100	91,4398	92,3542	93,2686	94,1830	95,0974	96,0118	96,9262	97,8406	98,7550	99,6604

Pentru calcule s-a admis ca 1 m = 1,093615 yarzi

metri	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1,09362	2,18723	3,28085	4,37446	5,46808	6,56169	7,65531	8,74892	9,84254
10	10,9362	12,0298	13,1234	14,2170	15,3106	16,4042	17,4978	18,5915	19,6851	20,7787
20	21,8723	22,9659	24,0595	25,1531	26,2468	27,3404	28,4340	29,5276	30,6212	31,7148
30	32,8085	33,9021	34,9957	36,0893	37,1829	38,2765	39,3701	40,4638	41,5574	42,6510
40	43,7446	44,8382	45,0318	47,0255	48,1191	49,2127	50,3063	51,3999	52,4935	53,5871
50	54,6808	55,7744	56,8680	57,9616	59,0552	60,1488	61,2425	62,3361	63,4297	64,5233
60	65,6169	66,7105	67,8041	68,8978	69,9914	71,0850	72,1786	73,2722	74,3658	75,4594
70	76,5531	77,6467	78,7403	79,8339	80,9275	82,0211	83,1148	84,2084	85,3020	86,3956
80	87,4892	88,5828	89,6764	90,7701	91,8637	92,9573	94,0509	95,1445	96,2381	97,3318
90	98,4254	99,5190	100,613	101,706	102,800	103,893	104,987	106,081	107,174	108,268
100	109,362	110,455	111,549	112,642	113,736	114,830	115,923	117,017	118,110	119,204

Transformarea metrilor în picioare și invers
Pentru calcule s-a admis ca 1 m = 3,280833 picioare
1 picior = 0,30480 m

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	picioare	m
0	...	3,2808	6,5617	9,8425	13,123	16,404	19,685	22,966	26,247	29,257	1	0,30480
10	32,808	36,089	39,370	42,651	45,932	49,212	52,493	55,774	59,055	62,336	2	0,60960
20	65,617	68,897	72,178	75,459	78,740	82,021	85,302	88,583	91,863	95,144	3	0,91440
30	98,425	101,71	104,99	108,27	111,55	114,83	118,11	121,39	124,67	127,95	4	1,21920
40	131,23	134,51	137,80	141,08	144,36	147,64	150,92	154,20	157,48	160,76	5	1,52400
50	164,04	167,32	170,60	173,88	177,16	180,45	183,73	187,01	190,29	193,57	6	1,82880
60	196,85	200,13	203,41	206,69	209,97	213,25	216,53	219,82	223,10	226,38	7	2,13360
70	229,66	232,94	236,22	239,50	242,78	246,06	249,34	252,62	255,90	259,19	8	2,43840
80	262,47	265,75	269,03	272,31	275,59	278,87	282,15	285,43	288,71	291,99	9	2,74320
90	295,27	298,56	301,84	305,12	308,40	311,68	314,96	318,23	321,52	324,80	10	3,04800

Transformarea kilometrilor în mile și invers
Pentru calcule s-a admis ca 1 km = 0,62137 mile
1 milă = 1,60934 km

km	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	mile	km
0	...	0,62137	1,2427	1,8641	2,4855	3,1069	3,7282	4,3496	4,9710	5,5923	1	1,60934
10	6,2137	6,8351	7,4564	8,0778	8,6992	9,3206	9,9419	10,563	11,185	11,806	2	3,21868
20	12,427	13,049	13,670	14,292	14,913	15,534	16,156	16,777	17,398	18,020	3	4,82802
30	18,641	10,262	19,884	20,505	21,127	21,748	22,369	22,991	23,612	24,233	4	6,43736
40	24,855	25,476	26,098	26,719	27,340	27,962	28,583	29,204	29,826	30,447	5	8,04671
50	31,069	31,690	32,311	32,933	33,554	34,175	34,797	35,418	36,039	36,661	6	9,65605
60	37,282	37,904	38,525	39,146	39,768	40,389	41,010	41,632	42,253	42,875	7	11,26539
70	43,496	44,117	44,739	45,360	45,981	46,603	47,224	47,845	48,467	49,088	8	12,87473
80	49,710	50,331	50,952	51,574	52,19	52,816	53,438	54,059	54,681	55,302	9	14,48407
90	55,923	56,945	57,166	57,787	58,409	59,030	59,652	60,273	60,894	61,516	10	16,09341

Transformarea picioarelor pătrate în unități metrice și invers

Pentru calcul s-a admis ca 1 picior pătrat = 9,29027 dm^2

Pic patr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	9,29027	18,5805	27,8708	37,1611	46,4514	55,7416	65,0319	74,3222	83,6124
10	92,9027	102,193	111,483	120,774	130,064	139,354	148,644	157,935	167,225	176,515
20	185,805	105,096	204,386	213,676	222,966	232,257	241,547	250,837	260,128	269,418
30	278,708	287,998	297,289	306,579	315,869	325,159	334,450	343,740	353,030	362,321
40	371,611	380,901	390,191	399,482	408,772	418,062	427,352	436,643	445,933	455,223
50	464,514	473,804	483,094	492,384	501,675	510,065	520,255	529,545	538,636	548,126
60	557,416	566,706	575,097	585,287	594,577	603,868	613,158	622,448	631,738	641,029
70	650,319	659,609	668,899	678,190	687,480	696,770	706,061	715,351	724,641	733,931
80	743,222	752,212	761,802	771,092	780,383	789,673	798,963	808,253	817,544	826,834
90	836,124	845,415	854,705	863,995	873,285	882,576	891,866	901,156	910,446	919,737
100	929,027	938,317	947,608	956,898	966,188	975,478	984,769	994,059	1003,35	1012,64

Pentru calcul s-a admis ca 1 m^2 = 10,7639 picioare pătrate

m^2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	10,7639	21,5279	32,2918	43,0558	53,8197	64,5837	75,3476	86,1116	96,8755
10	107,639	118,403	129,167	139,931	150,695	101,459	172,223	182,987	193,751	204,515
20	215,279	226,043	236,807	247,571	258,335	269,099	270,863	290,627	301,391	312,154
30	322,918	333,682	344,446	355,210	365,974	376,738	387,502	398,266	409,030	419,794
40	430,558	441,322	452,086	462,850	473,614	484,378	495,142	505,906	516,669	527,433
50	538,197	548,961	559,725	570,489	581,253	592,017	602,781	613,545	624,309	635,073
60	645,837	656,601	667,365	678,129	688,893	699,657	710,421	721,184	731,958	742,712
70	753,476	764,240	775,004	785,768	796,532	807,296	818,060	828,824	839,588	850,352
80	861,116	871,880	882,644	893,408	904,172	914,936	925,700	936,463	947,727	957,991
90	968,755	979,519	990,283	1001,05	1011,81	1022,58	1033,34	1044,19	1054,87	1065,63
100	1076,39	1087,16	1097,92	1108,69	1119,45	1130,21	1140,98	1151,74	1162,51	1173,27

Transformarea yarzilor pătrați în metri pătrați și invers

Pentru calcule s-a admis ca 1 yard pătrat = 0,836124 m²

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,836124	1,67225	2,50837	3,34450	4,18062	5,01674	5,85287	6,68899	7,52512
10	8,36124	9,19736	10,0335	10,8696	11,7057	12,5419	13,3780	14,2141	15,0502	15,8864
20	16,7225	17,5586	18,3947	19,2309	20,0670	20,9031	21,7392	22,5753	23,4115	24,2476
30	25,0837	25,9198	26,7560	27,5921	28,4282	29,2643	30,1005	30,9366	31,7727	32,6088
40	33,4450	34,2811	35,1172	35,9533	36,7895	37,6256	38,4617	39,2978	40,1340	40,9701
50	41,8062	42,6423	43,4784	44,3146	45,1507	45,9868	46,8229	47,6591	48,4952	49,9701
60	50,1674	51,0036	51,8397	52,6758	53,5319	54,3481	55,1842	56,0203	56,8564	57,6926
70	58,5287	59,3648	60,2009	61,0371	61,8732	62,7093	63,5454	64,3815	65,2177	66,0538
80	66,8899	67,7260	68,5622	69,3983	70,2344	71,0705	71,9067	72,7428	73,5789	74,4150
90	75,2512	76,0873	76,9234	77,7593	78,5957	79,4318	80,2679	81,1040	81,9402	82,7763
100	83,6124	84,4485	85,2846	86,1208	86,9369	87,7930	88,6291	89,4653	90,3014	91,1375

Pentru calcule s-a admis ca 1 m² = 1,19599 yard pătrat

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1,19599	2,39199	3,58798	4,78398	5,97997	7,17597	8,37196	9,56796	10,7639
10	11,9599	13,1559	14,3519	15,5479	16,7439	17,9399	19,1359	20,3319	21,5279	22,7239
20	23,9199	25,1159	26,3119	27,5079	28,7039	29,8999	31,0958	32,2918	33,4878	34,6838
30	35,8798	37,0758	38,2718	39,4678	40,6638	41,8598	43,0558	44,2518	45,4478	46,6438
40	47,8398	49,0358	50,2318	51,4277	52,6237	53,8197	55,0157	56,2117	57,4077	58,6037
50	59,7997	60,9957	62,1917	63,3877	64,5837	65,7797	66,9757	68,1717	69,3677	70,5637
60	71,7597	72,9556	74,1516	75,3476	76,5436	77,7396	78,9356	80,1316	81,3276	82,5236
70	83,7196	84,9156	86,1116	87,3076	88,5036	89,6996	90,8956	92,0916	93,2875	94,4835
80	95,6795	96,8755	98,0715	99,2675	100,464	101,660	102,855	104,051	105,247	106,443
90	107,639	108,835	110,031	111,227	112,423	113,619	114,815	116,011	117,207	118,403
100	119,599	120,795	121,991	123,187	124,383	125,579	126,775	127,971	129,167	130,363

Transformarea kilogramelor în pfunzi englezi şi invers

Pentru calcul s-a admis ca 1 kg = 2,204622 pfunzi englezi,
1 pfund englez = 0,453592 kg

kg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Pfund englez	kg
0	—	2,2046	4,4092	6,6139	8,8185	11,023	13,228	15,432	17,637	19,842	1	0,45359
10	22,046	24,251	26,455	28,660	30,865	33,069	35,274	37,479	39,683	41,888	2	0,90718
20	44,092	46,297	48,502	50,706	52,911	55,116	57,320	59,525	61,729	63,934	3	1,36078
30	66,139	68,343	70,548	72,753	74,957	77,162	79,366	81,571	83,776	85,980	4	1,81437
40	88,185	90,390	92,594	94,799	97,003	99,208	101,41	103,62	105,82	108,03	5	2,26796
50	110,23	112,44	114,64	116,84	119,05	121,25	123,46	125,66	127,87	130,07	6	2,72155
60	132,28	134,48	136,69	138,89	141,10	143,30	145,51	147,71	149,91	152,12	7	3,17515
70	154,32	156,53	158,73	160,94	163,14	165,35	167,55	169,76	171,96	174,17	8	3,62874
80	176,37	178,57	180,78	182,98	185,19	187,39	189,60	191,80	194,01	196,21	9	4,08233
90	198,42	200,62	202,83	205,03	207,23	209,44	211,64	213,85	216,05	218,26	10	4,53592

Index alfabetic[1]

1 *Matematici*

[1] Termenii urmaţi de semnul *) sînt cuprinşi în tabele.

2 *Fizica*

3 *Mecanica*

4 *Rezistența materialelor*

5 *Teoria mecanismelor şi maşinilor*

Redactor responsabil: TEODORESCU CLOTILDA
şi Ing. MARCOVICI AVRAM
Tehnoredactor: GERU ELENA
şi MORĂRESCU VALERIU

Dat la cules 25.07.1964. Bun de tipar 15.12.1964. Apărut 1964. Tiraj 50.000+200+20. Legate. Hîrtie velină de 63 g/m², 540×840/16. Coli editoriale 70,20. Coli de tipar 69,50. A. 11.020/1964. C.Z. pentru bibliotecile mari 5+62/69(083). C.Z. pentru bibliotecile mici 5+62/69.

Tiparul executat sub comanda nr. 40.572 la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii, Piaţa Scînteii nr. 1, Bucureşti — R.P.R.